MAT2500 HØSTEN 2009

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Vi har $AB||B'A'$, $BC||C'B'$ og $AC||C'A'$. Det følger av dette at $< BAC =< BC'A'$ og at $< BC'A' =< A'B'C =< B'A'C'$. Tilsvarende vises at de andre korresponderende vinklene er like. Det følger da fra "vinkel-vinkel-vinkel"-setningen at trekantene ABC og $A'B'C'$ er formlike.

b) La O være sentrum i den omskrevne sirkelen til polygonet. Trekanten XOY er likesidet, med toppvinkel $\frac{2\pi}{p}$. La x være lengden til grunnlinjen XY og la y være lengden til sidekantene OX og OY. Da er $\tan\frac{\pi}{p} = \frac{\ell}{2y}$ og $\sin\frac{\pi}{p} = \frac{x}{2y}$. Vi får

$$x = 2y\sin\tfrac{\pi}{p} = \tfrac{\ell}{\tan\frac{\pi}{p}}\sin\tfrac{\pi}{p} = \ell\cos\tfrac{\pi}{p}\,.$$

Oppgave 2

a) Punktene er ikke kolineære, og de tilfredsstiller likningen $x + y + z = 1$, altså er dette en likning for planet gjennom dem.

b) Planet har normalvektor $(1, 1, 1)$. Punktet (t, t, t) ligger i planet hvis og bare hvis $t = \frac{1}{3}$, så det næmeste punktet i planet til origo er $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Avstanden er $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

c) Vi ser at punktene $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$ er hjørnene i en likesidet trekant, og ved symmetri få vi at de seks punktene $(\pm1, 0, 0)$, $(0, \pm1, 0)$, $(0, 0, \pm1)$ danner hjørnene i et oktaeder.

d) Det følger fra punkt a) (og symmetri) at midtpunktene til sideflatene (fjesene) til oktaederet er de åtte punktene $(\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3})$. Dette er hjørnene i en terning.

Oppgave 3

a) Fikspunktene til Möbiustransformasjonen er gitt ved

$$T_A(Z) = \frac{Z + A}{Z + 1} = Z\,,$$

altså ved $Z + A = Z^2 + Z$, som gir $Z^2 = A$. Hvis $A = 0$, er det bare ett fikspunkt, nemlig 0; hvis $A \neq 0$, er det to fikspunkter, $\sqrt{A}$ og $-\sqrt{A}$.

b) Hvis $A = -1$, følger det fra punkt a) at i og $-i$ er fikspunkter.

c) Siden i og $-i$ er fikspunkter og ligger på enhetssirkelen, er det nok å se på et tredje punkt på enhetssirkelen. Vi har $T_{-1}(1) = 0$, så bildet av enhetssirkelen må være linja gjennom i, $-i$ og 0, altså y-aksen (den imaginære aksen).

Oppgave 4

a) Skjæringspunktet P mellom a og b er gitt ved

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [3, 0, -3] = [1, 0, -1].$$

b) Linja c gjennom P og $Q = [1, 3, 0]$ har dualt punkt

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = [3, -1, 3],$$

så en likning for c er $3x - y + 3z = 0$.

c) Kryssforholdet til linjene a, b, c og d er det samme som kryssforholdet til deres duale punkter $A = [1, 2, 1]$, $B = [1, -1, 1]$, $C = [3, -1, 3]$ og D. Punktet C ligger på linja gjennom A og B, og vi ser at $(3, -1, 3) = p(1, 2, 1) + q(1, -1, 1)$, der $p = \frac{2}{3}$ og $q = \frac{7}{3}$. Vi skal finne r og s slik at når D har koordinater $r(1, 2, 1) + s(1, -1, 1)$, så blir kryssforholdet

$$\frac{qr}{ps} = \frac{7r}{2s} = -1.$$

Vi kan velge $r = 2$ og $s = -7$. Det gir $2(1, 2, 1) - 7(1, -1, 1) = (-5, 11, -5)$, altså $D = [-5, 11, -5]$, som viser at en likning for linja d er $5x - 11y + 5z = 0$.

Oppgave 5

a) La a betegne lengden av sidekanten BC, b lengden av CA og c lengden av AB. Vi har $\cos a = B \cdot C = \frac{1}{2}$, så $a = \frac{\pi}{3}$, og $\cos b = C \cdot A = \frac{1}{2}$, så $b = \frac{\pi}{3}$. Vi har $\cos c = A \cdot B = 0$, så $c = \frac{\pi}{2}$.

b) La α, β, γ betegne henholdsvis vinklene i hjørnene A, B, C. Arealet av trekanten er gitt ved formelen $\alpha + \beta + \gamma - \pi$. På grunn av symmetri er $\alpha = \beta$.Vi har

$$\cos\alpha = \frac{(A \times B) \cdot (A \times C)}{|A \times B|\,|A \times C|} = \frac{(0, 0, 1) \cdot (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\sin c \,\sin b} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,.$$

Altså er $\alpha = \beta = \cos^{-1}(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = u$.

Vi får

$$\cos\gamma = \frac{(C \times A) \cdot (C \times B)}{|C \times A|\,|C \times B|} = \frac{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}{\sin b \,\sin a} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}\,.$$

Altså er $\gamma = \cos^{-1}(-\frac{1}{3}) = v$, og arealet av trekanten er

$$2u + v - \pi.$$

Slutt