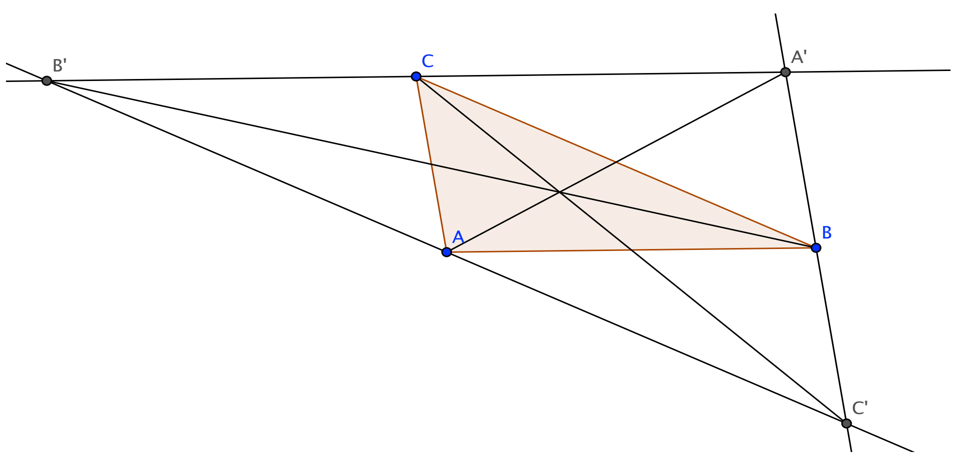
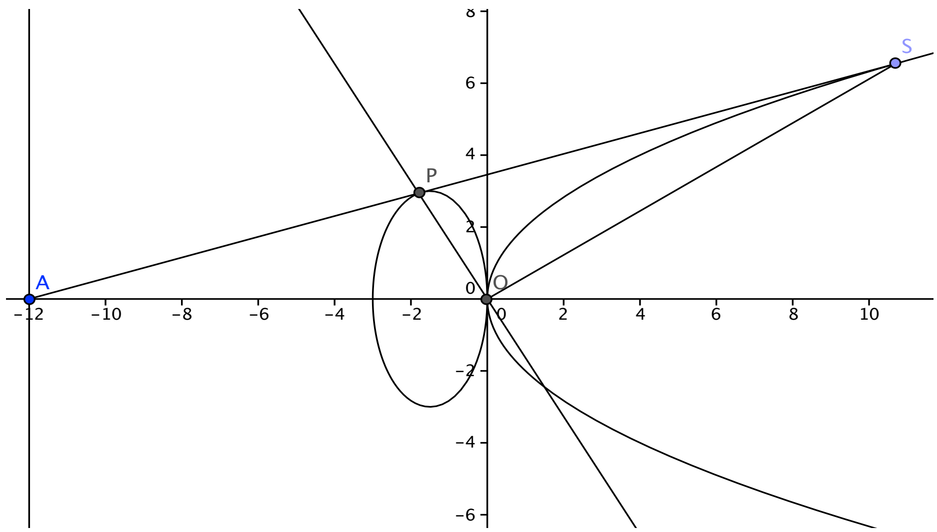
MAT 2500 H2012 LØSNINGSFORSLAG

Løsning oppgave 1:

(a) BC er parallell med $B'C'$, og AB er parallell med $A'B'$, så $ABCB'$ er et parallellogram og $\angle ABC = \angle CB'A$, $AB = CB'$ og $BC = B'A$. TIlsvarende er $\angle BCA = \angle AC'B$, $CB = AC'$, $AC = BC'$ og $\angle CAB = \angle BA'C$, $AC = A'B$, $AB = A'C$. Så $\triangle ABC$ og $\triangle A'B'C'$ har parvis like vinkler og er derfor formlike. Videre er $A'B' = A'C + CB' = 2AB$, $B'C' = B'A + AC' = 2BC$ og $A'C' = A'B + BC' = 2AC$, det vil si $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C' = 1 : 2$.

(b) Av a) er A, B, C midtpunkter på sidene i $\triangle A'B'C'$ så AA', BB' og CC' er medianer som vi vet går gjennom samme punkt (det siste følger av Ceva 's setning).





Løsning oppgave 2:

(a) La $P = (x, y)$, $S = (x_S, y_S)$. Da er $x_S = (1/4)y_S^2$. Linja OS har stigningstall y_S/x_S, så normalen l i origo har stigningstall $-x_S/y_S$. Derfor er

$$y/x = -x_S/y_S = -(1/4)y_S^2/y_S = -(1/4)y_S, \text{så} \quad y_S = -4y/x$$

Stigningstallet til AS er $y_S/(x_S + 12)$ så linja AS har derfor ligning

$$y/(x + 12) = y_S/(x_S + 12)$$

Siden P ligger på l og på AS kan vi sette inn $x_S = (1/4)y_S^2$ og $y_S = -4y/x$ i ligningen til AS. Da får vi

$$y/(x + 12) = (-4y/x)/(1/4(-4y/x)^2 + 12),$$

så

$$y/(x + 12) = -4yx/(4y^2 + 12x^2) = -yx/(y^2 + 3x^2)$$

Så $y = 0$ eller (etter kryssmultiplisering) $y^2 + 3x^2 = -x(x + 12)$. Dette kan vi så ordne til

$$4x^2 + 12x + 9 + y^2 = 9 \quad \text{og} \quad (x + 3/2)^2/(9/4) + y^2/9 = 1$$

Dette er ligningen til det geometriske stedet for P når S gjennomløper parabelen.

(b) Ligningen i a) er ligningen til en ellipse med sentrum i $(-3/2, 0)$ og symmetrilinjer $x = -3/2$ og $y = 0$.

Løsning oppgave 3:

(a) linja l_a har ligning

$$det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} = -4x_0 - ax_1 + 2x_2 = 0$$

(b) Linja l_{-1} har ligning $-4x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$. Skjæringspunktene med kjeglesnittet $x_0x_1 - x_2^2 = 0$ finner vi ved innsetting $x_1 = 4x_0 - 2x_2$. Vi får

$$x_0(4x_0 - 2x_2) - x_2^2 = 0 \quad \text{dvs} \quad x_2^2 + 2x_0x_2 - 4x_0^2 = 0$$

som har løsningene $x_2 = (-1 \pm \sqrt{5})x_0$, så skjæringspunktene blir

$$(1 : 6 - 2\sqrt{5} : -1 + \sqrt{5}), (1 : 6 + 2\sqrt{5} : -1 - \sqrt{5})$$

(c) Linja l_a tangerer kjeglesnittet når $-4x_0 - ax_1 + 2x_2 = x_0x_1 - x_2^2 = 0$ har en løsning. Når vi setter inn $x_2 = 2x_0 + (a/2)x_1$ i den kvadratiske ligningen, får vi en løsning når diskriminanten er null. Ved innsetting får vi $x_0x_1 - (2x_0 + (a/2)x_1)^2 = 0$ som forenkles til

$$4x_0^2 + (2a - 1)x_0x_1 + (a^2/4)x_1^2 = 0$$

Diskriminanten er $(2a - 1)^2 - 16(a^2/4) = 4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 = -4a + 1$. Diskriminanten er null når $a = 1/4$, så l_a tangerer kjeglesnittet når $a = 1/4$.

Løsning oppgave 4:

(a) De åtte punktene $(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \subset \mathbb{R}^3$ er hjørnene en kube K. En side sideflate i K ligger i planet $x = 1$, og har hjørner $(1, \pm 1, \pm 1)$. Midtpunktet av denne sideflaten er punktet $(1, 0, 0)$ som er et av hjørnene i det regulære oktaederet T. Tilsvarende er de andre hjørnene i T midtpunktet på sideflatene i K i planene $x = -1$, $y = \pm 1$ og $z = \pm 1$.

(b) Fire hjørner i K, slik at ingen kanter i K går gjennom to av dem, danner et tetraeder. Slike utvalg av fire hjørner får en ved å velge alle med et jevn antall negative koordinater, eller alle med et odde antall negative koordinater.

$(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$ og $(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (-1, -1, -1)$ er hver for seg hjørner i tetraedre. De er regulære fordi alle kantene er diagonaler i sideflater i K og derfor like lange.