MAT4200 HØSTEN 2007

OBLIGATORISK OPPGAVESETT

Innleveringsfrist: Fredag 9. november kl. 14.30

Oppgave 1

La $f\colon A \to B$ være en ringhomomorfi og M en A-modul.

a) Vis at hvis M er A-flat, så er $M_B := B \otimes_A M$ B-flat.

b) Anta at B er flat som A-modul og at for hvert maksimalt ideal $\mathfrak{m} \subset A$ så eksisterer det et maksimalt ideal i B som inneholder $\mathfrak{m}B$. Vis at hvis $M \neq 0$, så er $M_B \neq 0$.

Oppgave 2

La A være en ring. Gitt A-moduler M og N lar vi $\mathrm{Hom}(M, N)$ betegne mengden av A-modul-homomorfier fra M til N. Denne mengden har en naturlig struktur som A-modul.

a) La P være en A-modul. Vis at for enhver injektiv A-modul-homomorfi $\varphi : N' \to N$ så er den induserte A-modul-homomorfien $\mathrm{Hom}(P, N') \to \mathrm{Hom}(P, N)$ injektiv.

b) Vi sier at P er *projektiv* dersom følgende holder: for enhver surjektiv A-modul-homomorfi $\psi : N \to N''$ er den induserte A-modul-homomorfien $\mathrm{Hom}(P, N) \to \mathrm{Hom}(P, N'')$ surjektiv. Vis at hvis P er projektiv og kan genereres av n elementer, så eksisterer det en A-modul L slik at $A^n \cong L \oplus P$. [Hint: Bruk definisjonen av projektivitet av P på $\psi\colon A^n \to P$ til å vise at det eksisterer en homomorfi $\sigma\colon P \to A^n$ slik at $\psi \circ \sigma = \mathrm{id}_P$. Bruk σ til å definere en isomorfi $L \oplus P \to A^n$.]

Oppgave 3

La A være en ring, $\mathfrak{p} \subset A$ et primideal og $S = A \setminus \mathfrak{p}$. La $f\colon A \to S^{-1}A$ være homomorfien gitt ved $f(a) = \frac{a}{1}$. Den $n$te symbolske potensen til $\mathfrak{p}$ er definert som $\mathfrak{p}^{(n)} := f^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p}^n)$ $(= (\mathfrak{p}^n)^{\mathrm{ec}}$, der e betegner utvidelse og c sammentrekning med hensyn på $f)$. Vis at

a) $\mathfrak{p}^{(n)}$ er $\mathfrak{p}$-primær,

b) $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$ hvis og bare hvis $\mathfrak{p}^n$ er $\mathfrak{p}$-primær.

Oppgave 4

a) Anta at A og B er ringer, at A e en underring av B og at brøk-kroppene $K(A)$ og $K(B)$ er like. Vis at hvis B er helavsluttet og B er hel over A, så er B lik helavslutningen til A.

b) La k være en kropp, og sett $A = k[x, y, z]/(xy^2 - z^2)$. Du kan anta (uten bevis) at A er et integritetsområde. Vis at

$$K(A) = k(\tfrac{z}{y}, y)$$

og finn helavslutningen til A.

Oppgave 5

La k være en algebraisk lukket kropp. Vis at ethvert maksimalt ideal i polynomringen $k[x_1, \ldots, x_n]$ kan skrives på formen $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, der $a_1, \ldots, a_n \in k$.