Oppgavehefte for Mek 1100

Geir Pedersen

Høst 2009

Oppg. 1 ***Normal til bane i planet.*** Vi har gitt en posisjonsvektor som funksjon av t på dimensjonsløs form

$$\mathbf{r}(t) = (5+t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}.$$

a) Finn hastigheten, $\mathbf{v}$, for $t = 1$.

b) Vi søker en enhetsnormal i xy-planet, $\mathbf{n}$, til $\mathbf{v}$ for $t = 1$. Finn denne ved å bruke likningen $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$. Er enhetsnormalen entydig bestemt ?

c) Bruk vektorprodukt mellom $\mathbf{k}$ og $\mathbf{v}$ for å finne $\mathbf{n}$. Sammenlikn svaret med det fra forrige punkt.

Oppg. 2 ***Normaler til bane i rommet.*** En posisjonsvektor som funksjon av t er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (a+bt)\mathbf{i} + ct^2\mathbf{j} + (bt - ct^2)\mathbf{k}. \tag{1}$$

a) $\mathbf{r}$ og t er gitt med benevning. Finn benevningen på a, b og c.

b) Vi definerer dimensjonsløs posisjon og tid ved

$$\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{R}, \quad t^* = \frac{t}{T}.$$

Bestem R og T slik at (1) forenkler seg til

$$\mathbf{r}^* = (1+t^*)\mathbf{i} + \alpha(t^*)^2\mathbf{j} + (t^* - \alpha(t^*)^2)\mathbf{k},$$

og finn α uttrykt ved a, b og c.

c) Finn to uavhengige normalvektorer til hastigheten for $t^* = 1$.

Oppg. 3 ***Rekkfølge av partiell derivasjon.***

a) Vis at rekkefølgen av derivasjonene i

$$\frac{\partial^{n+m} F}{\partial x^n \partial y^m},$$

er likegyldig når F er gitt på formen $F(x,y) = G(x)H(y)$.

b) Vis at rekkefølgen av partielle derivasjoner er likegyldige for alle polynomer i x og y.

Oppg. 4 ***Retningsderiverte.*** Den retningsderiverte av $\beta(x,y)$ langs enhetsvektoren $\vec{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ er

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s} = \beta'(x,y,\vec{a}) = a_x\frac{\partial\beta}{\partial x} + a_y\frac{\partial\beta}{\partial y},$$

der funksjonen $g(s)$ er definert som $g(s) = \beta(x + a_x s, y + a_y s)$.

a) Vis at den doble retningsderiverte blir

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}s^2} = a_x^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + 2a_x a_y \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + a_y^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}.$$

b) Hva blir det tilsvarende uttrykket for $\frac{\mathrm{d}^n g}{\mathrm{d}s^n}$?

Oppg. 5 ***Taylorpolynom og retningsderivert.*** Taylorutvikling av grad 2 gir

$$\begin{aligned} \beta(x+\Delta x, y+\Delta y) \quad \approx \quad & \beta + \frac{\partial \beta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \beta}{\partial y}\Delta y \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}\Delta y^2, \end{aligned} \tag{2}$$

der det er underforstått at β og dens deriverte er innsatt (x, y) på høyre side.

a) Vi definerer nå $g(s)$ på samme måte som i forrige oppgave ved $g(s) = \beta(x + a_x s, y + a_y s)$. Sett opp Taylorpolynomet av grad 2 for $g(s + \Delta s)$ og bruk dette til å utlede likning (2).

b) Diskuter hvordan vi kan gi et feilledd for (2).

Oppg. 6 ***Parameterisering.***

a) En halvsirkel om origo i xy-planet, med radius R, kan parameteriseres ved

$$\mathbf{r} = R\cos\theta \mathbf{i} + R\sin\theta \mathbf{j}, \qquad \theta \in [0, \pi].$$

Bruk x som parameter og finn $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + y(x)\mathbf{j}$. Er det mulig å bruke y som parameter ?

b) En rett linje i planet er gitt som

$$y = ax + b.$$

Denne kan parametriseres på polar form med vinkelen θ som parameter

$$\mathbf{r} = r(\theta)\mathbf{i}_r(\theta).$$

Vis at

$$r(\theta) = \frac{b}{\sin\theta - a\cos\theta}$$

Oppg. 7 ***Integral langs spiral.*** En spiral i rommet er definert ved parameteriseringen

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = t, \tag{3}$$

der a er en konstant.

a) Vi regner buelengden, s, fra $t = 0$. Finn s som funksjon av t og finn en hvordan kurven gitt ved (3) parameteriseres ved s.

b) Vi har gitt feltet

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Finn

$$\int_\lambda \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der kurven λ er gitt ved (3) for $t \in [0, \pi]$.

c) Bestem et skalarfelt β slik at $\mathbf{F} = \nabla\beta$. Bruk dette til å finne integralet i forrige delspørsmål.

Oppg. 8 ***Volumstrøm ut av halv-ellipse.*** Vi betrakter det dimensjonsløse hastighetshetsfeltet

$$\mathbf{v} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j},$$

og kurven, C, som består av en kvart ellipse. På ellipsen oppfyller x og y

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vi betrakter den delen som er i første kvadrant og løper fra $(a, 0)$ til $(0, b)$.

a) Bruk x til å parameterisere kurven og overfør fluksintegralet

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds,$$

til et vanlig integral i x. Det er ikke meningen at dette integralet skal løses. Enhetsnormalen, $\mathbf{n}$, skal peke bort fra origo.

b) Vis at C kan parameteriseres ved $x = a\cos t$ og $y = b\sin t$. Regn ut fluksintegralet i første delpunkt ved hjelp av denne parameteriseringen.

Oppg. 9 ***Fluks gjennom plan flate.*** Vi har gitt kurven C som den rette linja som løper fra origo til (a, a), der a er en konstant. Et hastighetsfelt er gitt ved

$$\mathbf{v} = U(x^2 - y^2)\mathbf{i} - 2Uxy\mathbf{j},$$

der U er en konstant. Beregn fluksintegralet

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds,$$

der $\mathbf{n}$ har en positiv y-komponent.

Oppg. 10 ***Demningeksempel.*** Vi ser på eksemplet i forelesningsnotatene, del 4.2.3. Parameteriser damprofilen, C, med x som parameter istedet for y og regn ut F_x og F_y ved hjelp av dette.

Oppg. 11 ***Kurveintegral med kryssprodukt.*** Vi har et todimensjonalt vektorfelt $\mathbf{F}$ og en kurve λ i xy-planet. Vi kan da definere et nytt kurveintegral ved

$$\mathbf{I} = \int_\lambda \mathbf{F} \times \mathbf{n} ds,$$

der $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen og s er buelengden, som vanlig. Vis at I blir lik

$$\mathbf{I} = -\mathbf{k} \int_\lambda \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der λ gjennomløpes slik at $\mathbf{n}$ er rettet mot høyre.

Oppg. 12 ***Grense av trykkintegral.*** Vi ser på et trykkintegral langs en lukket kontur, λ, i xy-planet

$$\mathbf{I} = -\int_{\lambda} p\mathbf{n}ds. \tag{4}$$

Vi betegner arealet omsluttet av λ med A og søker, i analogi med definisjonen av divergensen, grensen

$$\lim_{A\to 0} \frac{\mathbf{I}}{A} = -\lim_{A\to 0} \frac{1}{A}\int_{\lambda} p\mathbf{n}ds. \tag{5}$$

Gå fram feks. som i forelesningsnotat til kapittel 4, eller som i kompendium med Taylorutvikling, og vis at dersom λ er et kvadrat med senter i (x_0, y_0) og sidekanter med lengde h blir

$$\lim_{A\to 0} \frac{\mathbf{I}}{A} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{I}}{h^2} = -\nabla p(x_0, y_0)$$

Oppg. 13 ***Endepunktsmetode for kurveintegral.*** Vi har gitt kurveintegralet

$$I = \int_{\lambda} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

der λ er parameterisert ved $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Vi deler opp parameterintervallet i n like store intervaller slik at delintervall i er $[a + (i-1)h, a + ih]$ der $h = (b-a)/n$. På delintervall i tilnærmer vi integranden med verdien i startpunktet slik at

$$\int\limits_{a+(i-1)h}^{a+ih} \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(t)dt \approx h\mathbf{F}(\mathbf{r}(a+(i-1)h)\cdot\mathbf{r}'(a+(i-1)h).$$

a) Framstill diskretisering og den tilnærmede integrasjonen grafisk.

b) Vis at

$$\int\limits_{a+(i-1)h}^{a+ih} \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(t)dt = h\mathbf{F}(\mathbf{r}(a+(i-1)h)\cdot\mathbf{r}'(a+(i-1)h) + R_i,$$

der

$$R_i = \alpha h^2[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}')']_{t=c},$$

der α er en konstant som skal bestemmes og c ligger i delintervall i.

c) Forklar hvorfor vi ikke kan bruke endepunktsmetoden i stedet for midtpunktsmetoden i utledningen av uttrykket for divergensen i forelesningsnotatene til kapittel 4.

Oppg. 14 ***Parametriseringer.***

a) Vi har gitt parametriseringen

$$x = a\cos\phi\sin\theta, \quad y = b\sin\phi\sin\theta, \quad z = c\cos\theta,$$

der $\phi \in [0, 2\pi]$ og $\theta \in [0, \pi]$. Vis at dette svarer til en ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hva slags flate har vi hvis $a = b = c$?

b) Forklar hvorfor en elliptisk sylinder kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}(\phi, z) = a\cos\phi\mathbf{i} + b\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Finn $\mathbf{n}d\sigma$. Bruk spesialtilfellet $a = b$ for å sjekke svaret.

c) Et flate er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t, s) = at\mathbf{i} + bs\mathbf{j} + (ct + es)\mathbf{k}.$$

Finn $\mathbf{n}d\sigma$ og vis at flaten er et plan. Finn også $\mathbf{n}$ og $d\sigma$. Sjekk at du får korrekte resultater når $c = e = 0$.

Oppg. 15 ***Plan definert ved flatenormal og ett punkt.*** Et plan er spesifert ved en flatenormal $\vec{N} = N_x\mathbf{i} + N_y\mathbf{j} + N_z\mathbf{k}$ og ett punkt på flaten $r_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$. Finn likningen for planet på formen

$$ax + by + cz = d.$$

Er a, b, c og d entydig bestemt ?

Oppg. 16 ***Hydrostatisk trykk på sfære.*** Vi vil beregne trykket på en kule med senter i origo og radius a når $p = p_0 - \rho gz$ der z-aksen peker vertikalt oppover

$$\mathbf{F} = \int_\sigma -p\mathbf{n}d\sigma.$$

a) Forlar hvorfor de horisontale komponentene av $\mathbf{F}$ må være null.

b) Følg et av eksemplene i forelesningsnotat 6.1.3 og beregn vertikalkomponenten av $\mathbf{F}$. Tolk svaret.

Oppg. 17 ***Fluks gjennom flate.*** En flate, σ, er definert ved

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + cx^2y^2\mathbf{k},$$

der $-a < x < a$ og $-b < y < b$. Et hastighetsfelt er gitt ved

$$\mathbf{v} = \alpha x\mathbf{i} + \beta y\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}.$$

a) Alt er gitt med benevninger. Finn benevningen på c, α, β, γ.

b) Beregn fluksen

$$\int_\sigma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

der $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} > 0$. Sjekk benevningen.

Oppg. 18 ***Fluks gjennom sylinder.*** En sirkulær sylinder har radius r, høyde H og står på xy-planet.

a) Bruk sylinderkoordinater (polarkoordinater i planet og z) til å parametrisere sylinderens sideflate.

b) Et hastighetsfelt er gitt ved

$$\mathbf{v} = azx\mathbf{i} + bzy\mathbf{j}.$$

Finn den totale volumstrømmen ut av sylinderens sideflate. For hvilke verdier av a og b er den null.

c) For hvilke verdier av a og b er $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$?

Oppg. 19 ***Normaler og arealfaktorer.*** En flate, σ, er gitt som i første eksempel i forelesningsnotat 6.1.3. Sjekk retningen av normalvektoren ved å regne ut $\nabla(z - \eta)$. Finn også enhetsnormalen og $d\sigma$.

Oppg. 20 ***Flateintegral og transformasjon av dobbeltintegral.*** Vi kan skrive et dobbeltintegral på formen

$$I = \int_\Omega F d\Omega, \tag{6}$$

der $d\Omega$ er et "areal-element". Dersom vi bruker kartesiske koordinater blir $d\Omega = dx\,dy$ og integralet kan skrives

$$I = \iint\limits_\Omega F(x, y)\,dx\,dy.$$

a) Vi antar nå at Ω og F er beskrevet med andre type koordinater t og s der det eksisterer en transformasjon $\mathbf{r}(t, s) = x(t, s)\mathbf{i} + y(t, s)\mathbf{j}$. Forklar hvordan (6) i s, t koordinatsystemet kan uttrykkes som flateintegralet

$$I = \int_\sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \tag{7}$$

der σ tilsvarer Ω i x, y-planet og $\mathbf{F} = F\mathbf{k}$.

b) Vis at (7) i dette tilfellet forenkler seg til

$$I = \iint\limits_{\hat{\Omega}} F \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} dt\,ds, \tag{8}$$

der $\hat{\Omega}$ er det området i s, t planet som avbildes på Ω i x, y-planet.

c) La $t = r$ og $s = \theta$ være polarkoordinater i planet. Vis at Integralet da blir

$$\iint\limits_{\hat{\Omega}} F r\,dr\,d\theta.$$

Gi en geometrisk tolkning av arealet $d\Omega = r\,dr\,d\theta$.

Oppg. 21 ***Transformasjon av trippelintegraler.*** I MEK1100 skriver vi helst et volumintegral på formen

$$I = \int_\tau F d\tau, \tag{9}$$

der $d\tau$ er et "volum-element". Dersom vi bruker kartesiske koordinater blir $d\tau = dx\,dy\,dz$ og integralet kan skrives

$$I = \iiint\limits_\tau F(x, y, z)\,dx\,dy, dz.$$

a) Vi antar nå at vi bruker koordinater t, s og q der det eksisterer en transformasjon

$$\mathbf{r}(s,t,q) = x(t,s,q)\mathbf{i} + y(t,s,q)\mathbf{j} + z(t,s,q)\mathbf{k}$$

Vis at en kube med (uendelig små) sider ds, dt og dq i s,t,q rommet avbildes på et parallelepiped med volum

$$d\tau = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) dt\, ds\, dq.$$

b) Vis at (9) da blir

$$I = \iiint\limits_{\hat{\tau}} F \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial q} \\ \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix} dt\, ds\, dq,$$

der $\hat{\tau}$ er volumet i t,s,q rommet som svarer til τ i x,y,z rommet.

Oppg. 22 ***Gauss sats i 3D.***
I denne oppgaven skal Gauss sats i tre dimensjoner,

$$\int\limits_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{F}\, d\tau \equiv \iiint\limits_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma, \tag{10}$$

vises for noen enkle geometrier. En starter med det midterste uttrykket i (10) og integrerer. Det kan være enklere å vise satsen ved a ta for seg delsatsene

$$\int\limits_{\tau} \frac{\partial F_x}{\partial x}\, d\tau = \int_{\sigma} F_x n_x\, d\sigma,$$

etc. som er forklart i forelesningsnotatene.

a) Volumet τ er definert ved $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ og $e \leq z \leq f$. Dette er en terning med sideflater som er parallelle med koordinatplanene.

b) Volumet τ er tetraederet med hjørnepunkter ved $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ og $(0,0,1)$. Dette blir en skjev pyramide med trekantede sideflater der en ligger i xy-planet, en annen i xz-planet, en tredje i yz planet og den siste er den trianglet med hjørner $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ og $(0,0,1)$. Kunne denne utledningen av Gauss sats utvides til å gjelde for et generelt tetraeder ?

Oppg. 23 ***Fluks gjennom to flater som omslutter et volum.*** En flate, σ_A, er definert ved

$$z = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2),$$

der a og b er positive konstanter og (x,y) er med i det rektangulære området $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$.

a) Finn en normalvektor til flaten. Den trenger ikke å være en enhetsnormal.

b) Et vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{v} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + (yz + (x-a) - \frac{1}{2}z^2)\mathbf{k}.$$

Regn ut divergensen og virvlingen til feltet.

c) Bruk Gauss sats til å vise at fluksintegralet

$$Q = \int\limits_{\sigma_A} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

er identisk med

$$Q = \int\limits_{\sigma_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

der σ_0 ligger i xy-planet og er avgrenset ved $-a \leq x \leq a$ og $-b \leq y \leq b$. Vi regner at $\mathbf{n}$ i begge integraler har en positiv z komponent.

d) Regn ut Q ved å integrere over σ_0.

e) Regn ut Q ved å integrere over σ_A.

Oppg. 24 ***Fluks fra punktkilde i 2D.***
Et todimensjonalt hastighetsfelt er gitt ved

$$\mathbf{v} = \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}.$$

a) Vis at

- $|\mathbf{v}(\mathbf{r})| \to \infty$ når $|\mathbf{r}| \to 0$.
- $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ når $\mathbf{r}$ ikke er null.
- $\mathbf{v}$ er rettet ut fra origo.

b) Finn den totale fluksen

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, ds,$$

ut gjennom en sirkel med radius R og sentrum i origo.

c) Brukk Gauss sats til å finne den totale fluksen ut gjenom en vilkårlig kurve, λ, som omslutter origo. (Hint: du må bruke resultatet i forrige delpunkt).

Oppg. 25 ***Fluks fra punktkilde i 3D.***
Et tredimensjonalt hastighetsfelt er gitt ved

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

a) Finn den totale fluksen

$$\int_\sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

ut gjennom en kuleflate med radius R og sentrum i origo.

b) Bruk Gauss sats til å finne den totale fluksen ut gjenom en vilkårlig flate som omslutter origo. Du kan gå ut fra at Gauss sats gjelder for et volum omsluttet av en sammenhengende flate.

Oppg. 26 ***Trykk i lineært hastighetsfelt.*** I en inkompressibel homogen væske, uten ytre volumkrefter, har vi det plane hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = \{a(t)x + b(t)y\}\mathbf{i} + \{c(t)x + d(t)y\}\mathbf{j}, \tag{11}$$

der keoffisientene a, b, c og d i utgangspunktet kan være generelle funksjoner av tiden.

a) Hvilke begrensinger legger kontinuitetslikningen på valg av keoffisienter i (11) ?

b) Vis at trykket oppfyller likningen

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p = \left(\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}y + (a^2 + bc + \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t})x\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}x + (a^2 + bc - \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t})y\right)\mathbf{j}.$$

c) For at vi skal finne et entydig trykk må keoffisientene oppfylle en relasjon. Finn denne og trykket.

d) Vis at virvlingen er konstant.

Oppg. 27 ***Regnskap for bevegelsesmengde.*** Vi skal se på et alternativ for utledning av bevegelseslikningen. For et system av partikler er er bevegelsesmengden

$$\mathbf{I} = \sum m\mathbf{v}.$$

Massemiddelpunktsatsen kan da uttrykkes som

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{I}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F},$$

der $\mathbf{F}$ er summen av ytre krefter. For et endelig volum, τ, med overflate σ kan vi tilsvarende sette opp en bevaringssats for bevegelsesmengde

Tidsendring av bevegelsesmengde i τ
= trykk-kraft på σ + resultant av volumkrefter på τ
- (utstrømsrate av bevegelsesmengde gjennom σ)

Satsen kan brukes på vektorform, eller for hver av komponentene. Vi velger det siste og nøyer oss med å analysere x-komponenten. De andre komponentene kan behandles helt tilsvarende.

a) Forklar hvorfor utstrømsrate av x komponenten av bevegelsesmengden gjennom et flatelement kan skrives

$$\rho v_x \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

og hvorfor tidsendringsraten av samme komponent i et volumelement er

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t}\,d\tau$$

b) Sett opp integraler for alle bidrag til bevaringssatsen i innledningen og vis at dette fører til

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v_x\mathbf{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + g_x,$$

der g_x er x komponenten av den ytre volumkraft per masse.

c) Utled x komponenten av bevegelseslikningen fra resultatet i det forrige delspørsmålet.

Oppg. 28 ***Gradienten i kulekoordinater.*** Vi skal utlede gradienten i kulekoordinater, r,θ og ϕ, på en annen måte enn den som er antydet i kompendiet. Utgangspunktet vårt er to uttrykk for endringen av et skalarfelt, β,

$$d\beta = \nabla\beta \cdot d\mathbf{r}, \quad d\beta = \frac{\partial \beta}{\partial r}dr + \frac{\partial \beta}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \beta}{\partial \phi}d\phi. \tag{12}$$

Dette kombineres så med

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}dr + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}d\phi. \tag{13}$$

Framgangsmåten er generell og kan brukes for transformasjon til andre koordinatsystemer enn kulekoordinater.

a) Vis at (12) og (13) medfører

$$\nabla\beta \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \frac{\partial \beta}{\partial r}, \quad \nabla\beta \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial \beta}{\partial \theta}, \quad \nabla\beta \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \tag{14}$$

b) Vis at (14) svarer til kjerneregelen anvendt på $\beta(x, y, z)$ med $x = x(r, \theta, \phi)$, $y = y(r, \theta, \phi)$ og $z = z(r, \theta, \phi)$.

c) Bruk feks. formelarket på hjemmesiden til å vise

$$\frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} = \mathbf{i}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \phi} = \sin\theta \mathbf{i}_\phi,$$

og vis at dette sammen med (14) gir

$$\nabla\beta = \frac{\partial \beta}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \beta}{\partial \phi}\mathbf{i}_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial \beta}{\partial \theta}\mathbf{i}_\theta$$

Oppg. 29 ***Bevegelseslikningen i polarkoordinater.*** I denne oppgaven skal vi finne hvordan Eulers bevegelseslikning skrives i sylinderkoordinater. Vi skal gjøre dette uten eksplisitt å definere $\nabla\mathbf{v}$ i slike koordinater.

a) Hastighetsfeltet skrives $\mathbf{v} = v_r\mathbf{i}_r + v_\theta\mathbf{i}_\theta + v_z\mathbf{k}$. Vis at

$$\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{d}t} = v_r, \quad \frac{\mathrm{D}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v_\theta}{r}.$$

Tolk resultatene geometrisk.

b) For en partikkel kan vi skrive hastigheten som en funksjon av tiden ved

$$\mathbf{v}(r(t), \theta(t), z(t), t),$$

der $r(t)$, $\theta(t)$ og $z(t)$ angir hvordan r, θ og z varier i tiden for partikkelen. Forklar hvorfor akselerasjonen kan skrives

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r}\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta}\frac{\mathrm{D}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}v_z.$$

c) Vis at

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(v_r \mathbf{i}_r) = \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\mathbf{i}_r + v_r \mathbf{i}_\theta.$$

Finn tilsvarende uttrykk for

$$\frac{\partial}{\partial r}(v_r \mathbf{i}_r), \quad \frac{\partial}{\partial r}(v_\theta \mathbf{i}_\theta), \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \mathbf{i}_\theta) \quad \frac{\partial}{\partial r}(v_z \mathbf{k}), \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(v_z \mathbf{k}).$$

d) Sett sammen informasjonen fra punktene foran og vis at bevegelseslikningen for plan bevegelse kan skrives komponentvis på formen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g_r, \\
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta, \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z,
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

der det ytre kraftfeltet er skrevet $\mathbf{g} = g_r \mathbf{i}_r + g_\theta \mathbf{i}_\theta + g_z \mathbf{k}$.

Oppg. 30 ***Punktkilde og punktvirvel som løsning av bevegelseslikningen.*** Hastighetsfeltet til en punktkilde og en punktvirvel er gitt ved hhv.

$$\mathbf{v} = \frac{A}{r}\mathbf{i}_r,$$

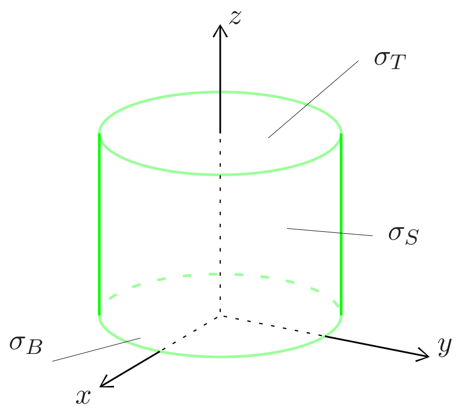
og

$$\mathbf{v} = \frac{A}{r}\mathbf{i}_\theta.$$

a) Bruk bevegelseslikningen på formen gitt i likning (15), i en tidligere oppgave, til å finne trykket for en punktvirvel og en punktkilde. Anta at $\mathbf{g} = 0$ og at trykket i uendelig langt borte fra origo er p_∞.

b) Det er opgitt av vanndamptrykket til væsken er p_d. Hva er den minste verdien r kan ha uten at væsken koker.

Oppg. 31 .



Definisjonsskisse av volum og flater.

Vi lar x, y og z betegne et sett av kartesiske koordinater i rommet, mens $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, θ og z er sylinderkoordinater for det samme rommet. Det er definert tre flater.

σ_S: Dette er en sylinderflate definert ved

$$r = a, \quad 0 \leq z \leq h,$$

der a og h er konstanter.

σ_B: Denne flaten ligger i xy-planet og er begrenset ved

$$x^2 + y^2 \leq a^2,$$

der a er samme konstant som i definisjon av σ_S.

σ_T: Denne flaten er parallel med xy-planet og gitt ved

$$x^2 + y^2 \leq a^2, \quad z = h$$

der a er samme konstant som i definisjon av σ_S.

Vi har også gitt et hastighetsfelt i sylinderkoordinater

$$\mathbf{v} = A \left\{ r\mathbf{i}_r + (z + b)\mathbf{k} \right\},$$

der A og b er konstanter.

a) Finn uttrykket for hastighetsfeltet i kartesiske koordinater. Beregn virvling og divergens.

b) Regn ut volumfluksen gjennom σ_B

$$Q_B = \int_{\sigma_B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

der $\mathbf{n}$ skal ha en positiv z-komponent.
Regn ut volumfluksen gjennom σ_T der $\mathbf{n}$ stadig skal ha en positiv z-komponent.

c) Parameteriser σ_S i z og θ og beregn volumfluksen, Q_S, ut gjennom σ_S som et flateintegral. Velg en enhetsnormal som har positiv $\mathbf{i}_r$-komponent.

d) Bruk resultatetene i deloppgave b og Gauss sats for å beregne Q_S.

e) Finn strømlinjen som går gjennom punktet $(x, y, z) = (\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b, 0)$.