FASTSTOFFMEKANIKK
(ME 150)

Eksamensoppgaver 1994-1997
Løsningsforslag 1994-1997

Nov. 1998 / J. Hellesland

Harald Oxaas

FORORD

Ved Avdeling for mekanikk, Universitetet i Oslo, gis den grunnleggende undervisning i faststoffmekanikk, eller materialmekanikk som området også ofte betegnes, gjennom emnet ME 150 – FASTSTOFFMEKANIKK. Dette har vært slik fra og med 1994. Tidligere ble grunnundervisningen i dette fagområdet gitt gjennom emnet ME 204 – MATERIALMEKANIKK. Innholdet i ME 150 avviker forholdsvis lite fra ME 204. Mens det sistnevnte dekket både skive- og plateteori, i tillegg til de vanlige mer sentrale delområdene, er skiveteorien ikke med i ME 150. Dette er hovedforskjellen.

Det foreliggende heftet inneholder eksamensoppgaver i ME 150 fra 1994. Videre er løsningsforslag, utarbeidet av undertegnede, medtatt. Disse er utarbeidet med symbolbruk osv. som i den benyttede læreboken "Mechanics of Engineering Materials", Longman House, av Benham, Crawford and Armstrong (1.utg. 1987, 2.utg. 1996).

Det foreligger et eget hefte med en tilsvarende samling av eksamensoppgaver og løsningsforslag fra det tidligere emnet ME 204 for perioden 1985–1993. Løsningsforslagene for denne perioden ble delvis utarbeidet av Bonsak Schieldrop, og delvis av undertegnede. De fleste av disse oppgavene kan løses med de kunnskaper som erverves gjennom ME 150. Den interesserte student kan derfor også ha nytte av å regne gjennom disse tidligere gitte oppgavene.

Jostein Hellesland,
Professor, Avdeling for mekanikk,
Matematisk institutt,
Universitetet i Oslo (UiO).

Nov. 1998

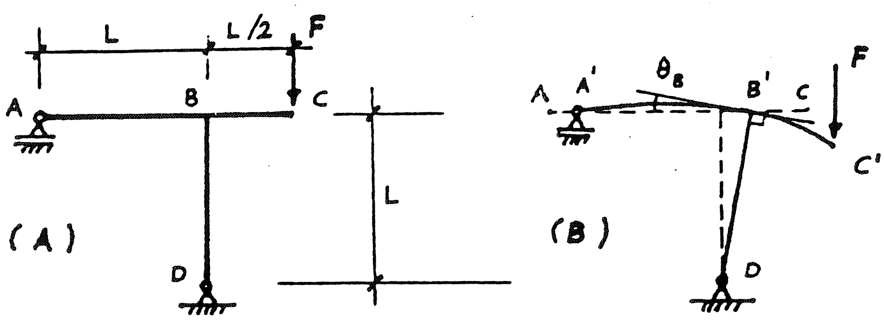
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 150 — Faststoffmekanikk.
Eksamensdag:	Mandag 5. desember 1994.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung, lommekalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1. (ca. 25%)



Figuren (A) viser en plan ramme bestående av en horisontal bjelke ABC som er kontinuerlig forbundet i B med en vertikal søyle BD. Søylen er leddlagret i D og bjelken har et forskyvelig leddlager (som kan overføre både opp- og nedadrettet kraft) i A. En vertikal last F virker i C. Alle deler av rammen har samme bøyestivhet EI.

a) Beregn momenter (M), skjærkrefter (Q) og aksialkrefter (N) i de forskjellige rammedeler og tegn opp tilhørende snittkraftdiagram med angivelse av snittkreftenes retninger.

Lasten F fører til forskyvninger (bøyelinjer) som er vist, sterkt forstørret, i Fig. B for tilfellet der aksial- og skjærdeformasjoner er neglisjert.

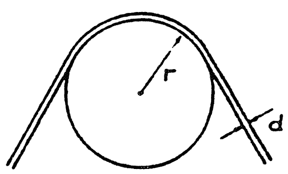
(Fortsettes side 2.)

b) Fra kjennskap til sammenhengen mellom moment og krumning, kommenter (begrunn) *kort* hvorvidt disse bøyelinjene stemmer med M-diagrammet funnet ovenfor.

Videre, antyd *kort* to endringer i den skisserte forskyvningsfigur ved B′ som må forventes dersom aksial- og skjærdeformasjoner ikke var neglisjert.

c) Beregn rotasjonen (θ_B) ved B og vertikalforskyvningen ved C, for eksempel ved å dele opp løsningen i to randverdiproblemer (AB og BC). Bestem til slutt horisontalforskyvningen av B. Aksial- og skjærdeformasjoner skal neglisjeres.

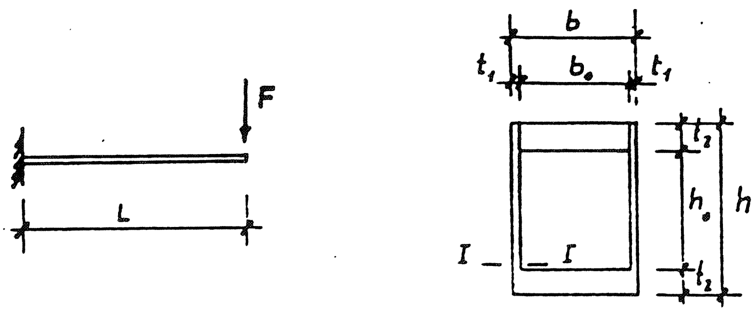
Oppgave 2. (ca 10%)



En stålstang med massivt sirkulært tverrsnitt med diameter $d = 4$ mm er bøyd over en trommel med radius $r = 0.5$ m. Overgangen mellom stang og trommel kan antas friksjonsløs.

Anta at stålstangen er lineært elastisk med elastisitetsmodul $E = 200\,GPa$, og bestem a) maksimal bøyespenning og b) bøyemoment i stangen.

Oppgave 3. (ca 30%)



En utkragerbjelke med en vertikallast F ved den frie enden har et rektangulært hulltverrsnitt hvor den øvre flensen er limt til de to vertikale stegene, som vist i figuren. Samme material er benyttet i hele tverrsnittet.

(Fortsettes side 3.)

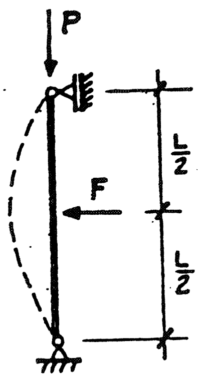
Oppgitt: $L = 1$ m, $h = 280$ mm, $b = 210$ mm, $t_1 = 15$ mm og $t_2 = 40$ mm.

a) Den maksimalt tillatte skjærspenningen som kan overføres i limfugene er $\tau_{till} = 10 MPa$. Hvor stor er da den største last F som kan tillates ved utkragerenden?

b) For bjelketverrsnittet ved den innspente enden skal normal- og skjærspenninger beregnes ved overgangen mellom stegene og nedre flens (snitt I–I).

c) Tegn Mohrs spenningssirkel for denne spenningstilstanden (spørsmål b)) og bestem hovedspenningene og deres retninger. Tegn videre opp et element orientert i hovedretningene og med hovedspenningene påsatt.

Oppgave 4. (ca 20%)



En symmetrisk belastet søyle med konstant bøyestivhet EI er leddlagret ved hver ende. Den er belastet med en aksial trykkraft P og en horisontal tverrlast F ved søylemidte.

a) Still opp differensialligningen for den ene halvdelen av søylens bøyelinje. Det skal tas hensyn til aksialkraftens virkning på forskyvningene (linearisert andre ordens teori). Skjærdeformasjoner skal neglisjeres.

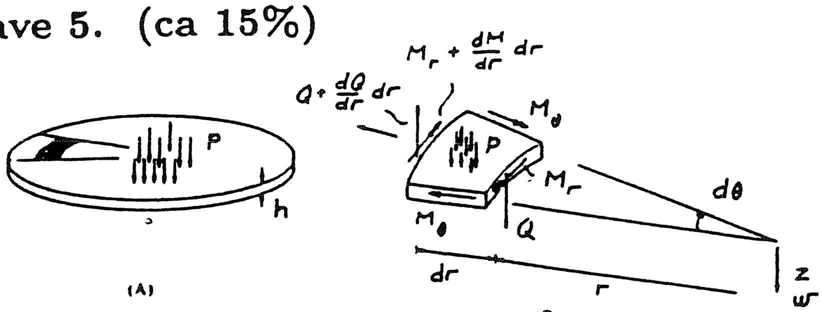
b) Vis at maksimalt moment ved søylemidte blir

$$M_{maks} = \frac{F}{2k} \tan\left(\frac{kL}{2}\right) \qquad \text{hvor } k = \sqrt{P/EI}\,.$$

c) Redegjør for hvordan momentuttrykket ovenfor kan benyttes til å bestemme kritisk trykkraft (P_{kr}), og angi videre et uttrykk for denne trykkraften.

(Fortsettes side 4.)

Oppgave 5. (ca 15%)



(A) (B)

Figuren viser en sirkulær plate (A) samt et utsnitt (B) av platen. Den har tykkelse h og er belastet med en fordelt last $p = p(r)$.

Momenter (M_r og M_θ) og skjærkrefter (Q) samt koordinatsystem er definert i figuren (B). Momentene er gitt ved

$$M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

$$M_\theta = -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right)$$

hvor w er forskyvningskomponenten i z-retning, D er platens bøyestivhet og ν er Poissons tall.

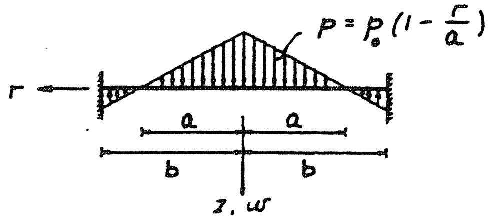
a) Bruk likevektsbetraktninger til å vise at platens differensialligning er

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr} = \frac{Q}{D}$$

eller

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = \frac{Q}{D}.$$

(NB! Overgangen til den siste ligningene trenger ikke påvises).



(C)

Anta nå at platen er fast innspent ved randen og belastet som vist i figuren (C).

b) Bestem forskyvningen w som funksjon av r, og vis til slutt at forskyvningen ved $r = 0$ blir

$$w = \frac{43}{4800}\frac{p_0 a^4}{D}$$

for $a = b$.

SLUTT

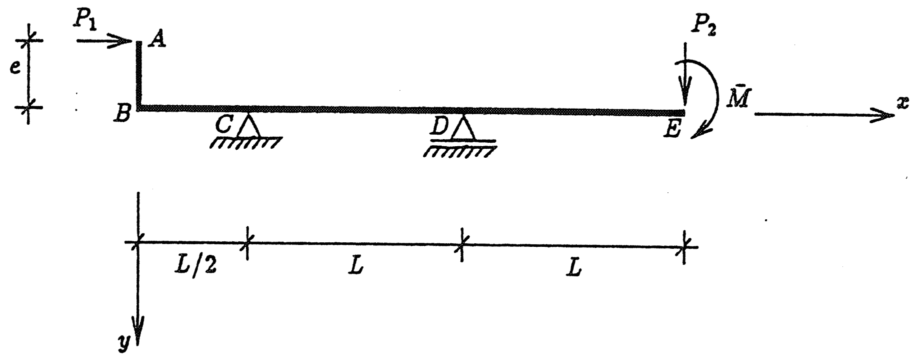
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 150 — Faststoffmekanikk.
Eksamensdag:	Mandag 4. desember 1995.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung, lommekalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1. (ca. 30%)



Figuren viser en bjelke $ABCDE$ som er belastet med lastene P_1, P_2 og $\bar{M}(= P_2L)$. Bjelken har konstant tverrsnitt med areal A, arealtreghetsmoment I og elastisitetsmodul E.

a) Beregn aksialkrefter (N), skjærkrefter (Q) og momenter (M) i de forskjellige bjelkedeler for hver av lastene P_1, P_2 og $\bar{M}$. Angi verdier i diagrammenes knekkpunkter og snittkreftenes retninger.

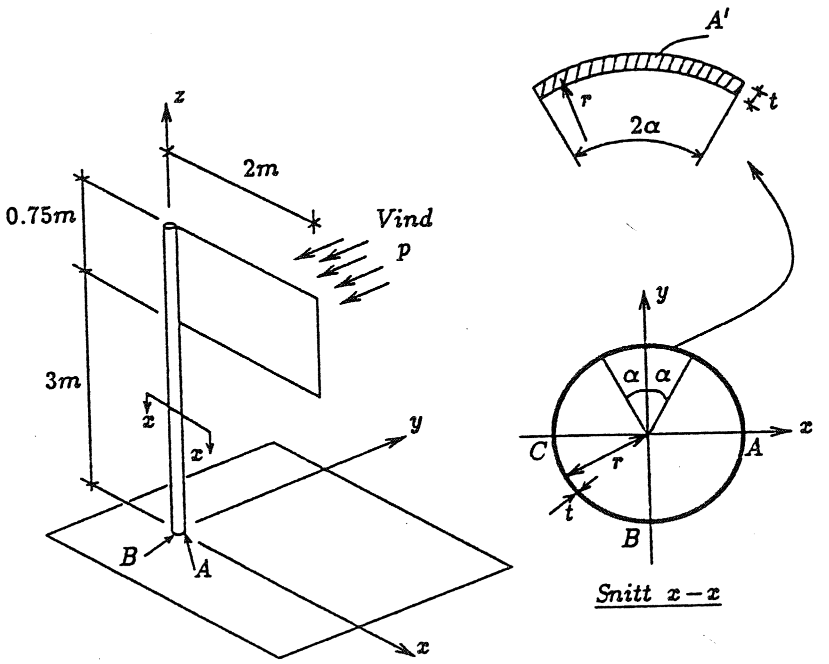
b) Skisser bjelkens bøyelinje for en av lastene P_1, P_2 eller $\bar{M}$. Beregning kreves ikke. Fra kjennskap til sammenhengen mellom moment og

(Fortsettes side 2.)

krumning, kommenter (begrunn) kort hvorvidt den tegnede bøyelinjen stemmer overens med det tilhørende M-diagram.

c) Still opp bøyelinjens differensialligning for bjelkedel CD for tilfellet med alle 3 laster påført. Sett $P_1 = 2P, P_2 = P$ og $e = L/4$ og beregn rotasjonen (vinkeldreiningen) θ_c ved C og den vertikale forskyvningen av midtpunktet mellom C og D. Skjærdeformasjoner skal ikke tas med.

Oppgave 2. (ca. 35%)



Snitt $x-x$

Figuren viser et skilt som er støttet på et rør som er fastinnspent i bunnen. Vindbelastningen på skiltet er $p = 1,5kPa\,(1Pa = 1N/m^2)$ og virker i den viste retning. I beregningene kan det antas at rørtverrsnittet er tynnvegget ($t << r$) og at følgende parametre gjelder: arealtreghetsmoment $I_x = \int y^2 dA = \pi r^3 t$, polært arealtreghetsmoment $J = \int r^2 dA = 2\pi r^3 t$ og arealmoment av det skraverte arealet A' om x-aksen $S_x = \int_{A'} y dA = 2r^2 t \sin\alpha$ (α er vist i figuren).

a) Still opp uttrykkene for spenningene i et tynnvegget sirkulært rørtverrsnitt som er forårsaket av:

(i) et bøyemoment M

(ii) et torsjonsmoment T

(iii) en skjærkraft Q

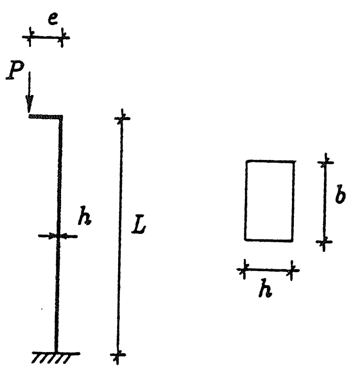
(Fortsettes side 3.)

Utledning kreves ikke.

b) Beregn snittkreftene ved innspenningen pga. vindlasten, og videre, for $r = 50mm$ og $t = 3mm$, beregn spenningstilstandene ved innspenningspunktene A, B og C. Vindbelastning på røret skal neglisieres.

c) Tegn Mohrs spenningssirkel for spenningstilstanden funnet i spørsmål b) for punktet B. Bestem videre hovedspenningene og deres retninger og tegn opp et element orientert i hovedretningene og med hovedspenningene påsatt.

Oppgave 3. (ca. 20%)



En søyle med konstant bøyestivhet EI og rektangulært tverrsnitt er belastet med en trykkraft P som er plassert med en eksentrisitet e i forhold til søyleaksen.

a) Still opp differensialligningen for søylens bøyelinje i det betraktede plan idet det skal tas hensyn til aksialkraftens virkning på forskyvningene (lineærisert andre ordens teori). Skjærdeformasjoner skal negliseres.

b) Bestem

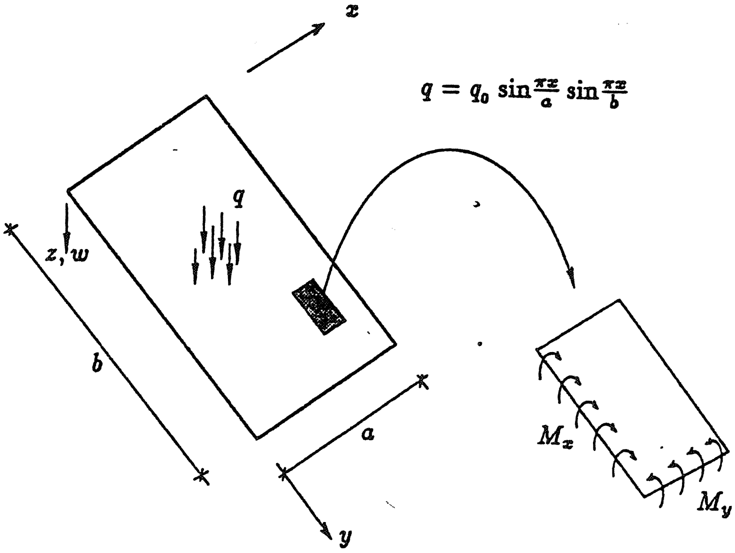
(i) søylens maksimale utbøyning

(ii) maksimalt bøyemoment i søylen.

c) Bestem hvor stor eksentrisiteten e kan være for uten å forårsake strekkspenning i noen del av tverrsnittet ved innspenningen.

(Fortsettes side 4.)

Oppgave 4. (ca. 15%)



Figuren viser en lineært elastisk tynn plate som er fritt opplagt på alle kanter. Platen er belastet med en fordelt last q som varierer som angitt. Den generelle differensialligningen for platen er:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \tag{1}$$

hvor w er forskyvningskomponenten i z-retning og $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ er platens bøyestivhet pr. lengdeenhet. h er platetykkelsen, ν er tverrkontraksjonstallet og E er elastisitetsmodulen.

a) Utled uttrykk for momentene M_x og M_y (dvs. momentene pr. lengdeenhet om hhv. y- og x-aksen som vist på et element i figuren). Følgende oppgis: platetøyningene i x- og y-retning er hhv. $\varepsilon_x = z/R_x$ og $\varepsilon_y = z/R_y$ hvor $1/R_x$ og $1/R_y$ er krumningene av platens nøytralplan i snitt som er parallelle med hhv. xz- og yz-planet. Videre gjelder Hookes lov for plan spenningstilstand.

b) Still opp randbetingelsene for den fritt opplagte platen og vis at

$$w = C \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \tag{2}$$

er en løsning for platen, og bestem konstanten C.

SLUTT

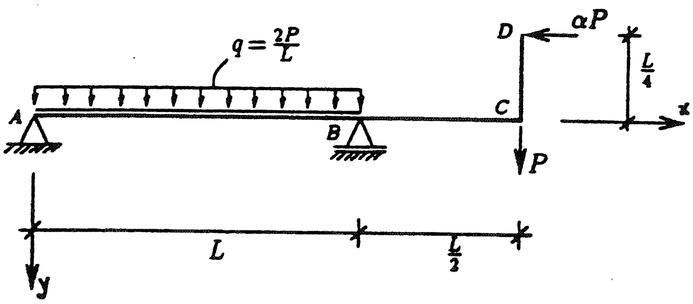
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 150 — Faststoffmekanikk.
Eksamensdag:	Tirsdag 17. desember 1996.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung, lommekalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1. (ca. 30%)



Figuren viser en bjelke $ABCD$ som er belastet med punktlastene P og αP og den jevnt fordelte lasten q. Bjelken har konstant tverrsnitt med areal A, arealtreghetsmoment I og elastisitetsmodul E.

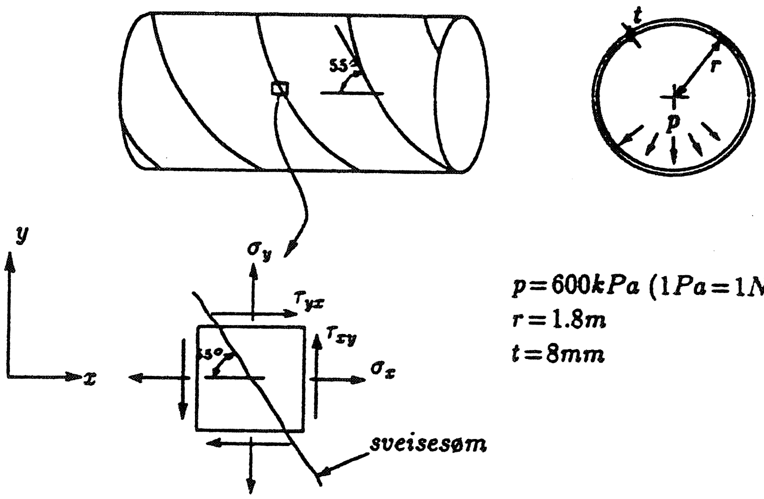
a) Beregn og tegn opp snittkraftdiagrammene (M, Q, N) for konstruksjonen for hver av de tre lastene. Angi snittkreftenes retninger samt verdier i diagrammenes knekkpunkter.

b) For hvilken verdi av α vil rotasjonen ved punkt C bli lik null dersom alle laster virker samtidig. Skjærdeformasjoner skal ikke medtas i beregningene.

(Fortsettes side 2.)

c) Tegn opp det resulterende momentdiagram som oppstår når alle 3 laster påføres samtidig og α settes lik 1.
Fra kjennskap til sammenheng mellom moment og krumning, skissér bjelkens bøyelinje.

Oppgave 2. (ca. 25%)



$p = 600 kPa$ $(1 Pa = 1 N/m^2)$
$r = 1.8 m$
$t = 8 mm$

Figuren viser en sylindrisk tynnvegget beholder ($t \ll r$). Den har en spiralformet sveisesøm som danner en vinkel på 55° med sylinderaksen (x-retning). Beholderen, som er lukket ved endene, har indre radius r, veggtykkelse t og maksimalt internt trykk p.

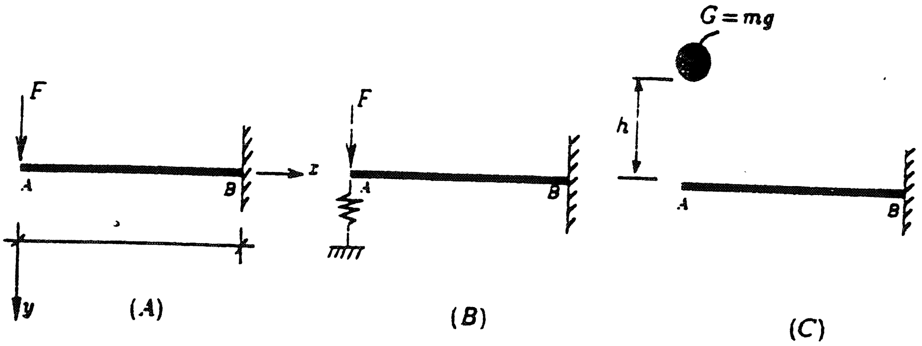
a) Beregn normalspenningene i lengde- og ringretningen på sylinderdelen av beholderen (utledning av uttrykkene for spenningene kreves ikke). Videre, er det mulig å si noe generelt om størrelsen av skjærspenningene (τ i figuren) og normalspenningen i radiell retning.

b) Beregn normal- og skjærspenningen som virker henholdsvis perpendikulært til og parallelt med sveisesømmen.

c) Beregn den maksimale skjærspenningen og avgjør for hvilken verdi av p materialet vil begynne å flyte dersom Tescas flytekriterium blir lagt til grunn. Betegn flytespenningen med f_y og uttrykk resultatet ved denne.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3. (ca. 20%)



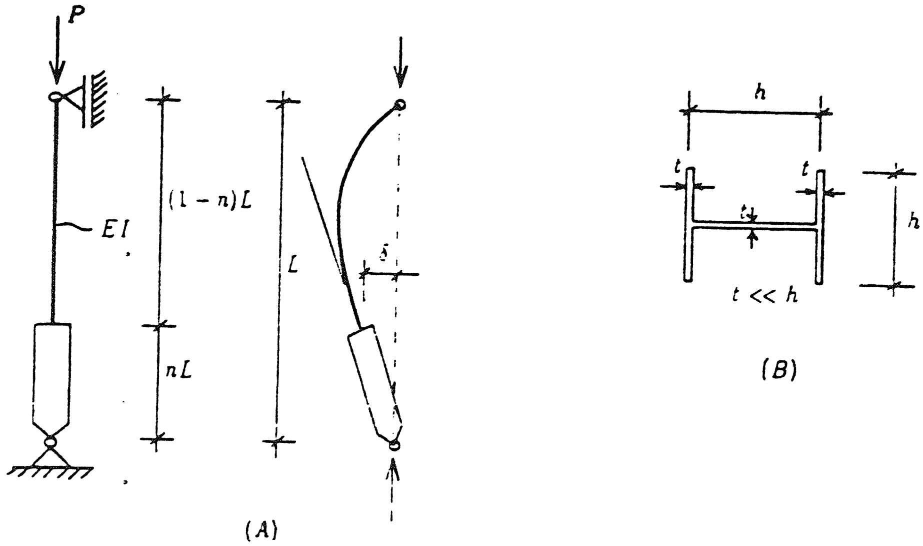
Figuren viser en utkragerbjelke med forskjellige belastninger og randbetingelser (opplagring). Bjelken har lengde L og bøyestivheten EI er konstant. Skjærdeformasjoner skal ikke medtas.

a) Beregn den elastiske tøyningsenergien som lagres i bjelken i Fig. (A) når en last F påføres statisk i punkt A.
Beregn videre nedbøyningen i punkt A ved hjelp av Castiglianos sats.

b) For bjelken i Fig. (B) er en fjær med elastisk fjærstivhet $k = \frac{3EI}{L^3}$ montert ved ende A. Vis at nedbøyningen ved punkt A nå blir lik $0.5\frac{FL^3}{3EI}$ når en last F påføres statisk i punkt A.

c) For bjelken i Fig. (C) slippes det en gjenstand med vekt $G = mg$ ned på ende A fra en høyde h. Beregn nedbøyningen også for dette tilfellet. Sammenlign til slutt dette resultatet, for $h = 0$ og $G = F$, med nedbøyningen funnet i spørsmål a), og kommenter kort eventuelle forskjeller.

Oppgave 4. (ca. 25%)



(Fortsettes side 4.)

Søylen i figuren er leddlagret i hver ende og er belastet med en trykklast P ved søyletopp. Den øvre delen av søylen, med lengde $(1-n)L$, har konstant bøyestivhet EI. Den er innspent i den nedre søyledelen som antas å være fullstendig bøyestiv.

a) Still opp differensialligningen for søylens bøyelinje i det betraktede plan idet det skal tas hensyn til aksialkraftens virkning på forskyvningene (linearisert andre ordens teori).

b) Vis at knekningsbetingelsen, som kritisk last kan bestemmes fra, blir

$$\tan(k(1-n)L) = -knL \qquad \text{hvor } k = \sqrt{P/EI}.$$

og beregn kritisk last for tilfellet hvor øvre og nedre søyledel er like lange. (Gitt: Den transcendente ligningen $\tan x = -x$ har løsningene 0, 2.03, osv.).

c) Søyletverrsnittsformen for den øvre søyledelen er som vist i Fig. (B). Anta at dette tynnveggede H-tverrsnittet er orientert slik at steget blir parallelt med papirplanet, og videre at $n = 0$ og at de viste opplagerbetingelsene i Fig. (A) også er de samme for bøyning tvers på planet. Bestem hvorvidt søylen vil knekke ut i papirplanet eller tvers på papirplanet, og angi den minste kritiske last uttrykt ved E, t, h, L.

SLUTT

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 150 — Faststoffmekanikk.
Eksamensdag:	Tirsdag 16. desember 1997.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung, lommekalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1. (15%)

a) Normalspenningene i et bjelketverrsnitt kan med visse forutsetninger gis ved

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y$$

Påpek de viktigste antagelser som er lagt til grunn, og vis hvordan uttrykket framkommer. N er aksialkraft, A er tverrsnittets areal, og M og I er henholdsvis bøyemoment og arealtreghetsmoment (andre arealmoment) om z-aksen. Oppgitt: $\epsilon_x = \epsilon_0 + y/R$, hvor R er krumningsradius og ϵ_0 er tøyning ved $y = 0$.

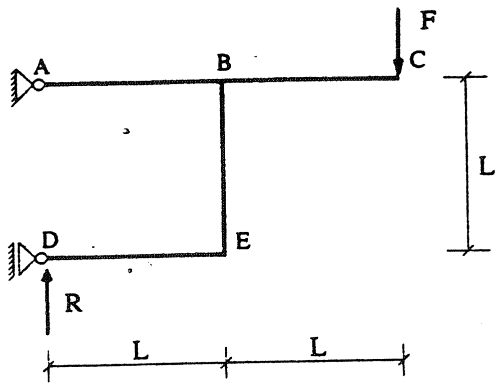
b) Den elastiske tøyningsenergien som lagres i en bjelke utsatt for ren bøyning kan uttrykkes ved

$$U = \int_L \frac{M^2}{2EI} ds$$

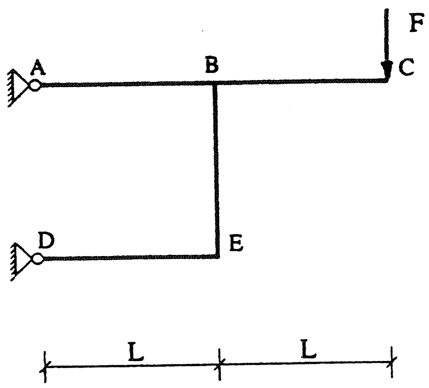
hvor EI er bøyestivheten og s er lengdeaksen. Vis hvordan uttrykket framkommer.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2. (30%)



(A)



(B)

a) Figur (A) viser en statisk bestemt rammekonstruksjon påkjent av vertikallastene F og R i henholdsvis punkt C og D. Den er leddlagret i A og D, og har videre et rullelager ved D.

For hver av lastene F og R (kun en påsatt om gangen) beregnes opplagerkrefter og videre momenter (M) i de forskjellige konstruksjonsdeler.
Tegn opp tilhørende M-diagram. Angi verdier i diagramknekkpunktene og momentenes retninger.

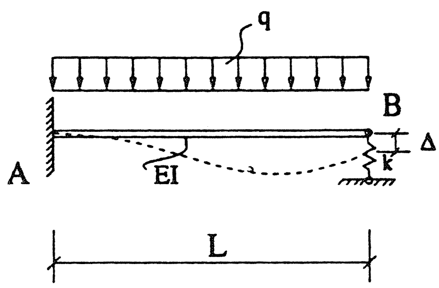
b) Skisser bøyelinjene (forskjøvet tilstand) for hver av lastene, og kommenter kort sammenhengen mellom disse bøyelinjene og M-diagrammene du har funnet foran (pkt. a).

c) Figur (B) viser en ramme som er lik den i Figur (A), men uten rullelager i punkt D. Forklar hvordan Castiglianos sats kan benyttes til å beregne den kraften R som er nødvendig for at rammen i (A) kan erstattes med rammen i (B).

d) Beregn kraften R (jfr. pkt. c)) for tilfellet hvor alle konstruksjonsdeler har samme bøyestivhet EI. Normal- og skjærdeformasjoner skal neglisjeres.

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 3. (15%)



Den statisk ubestemte bjelken i figuren er fast innspent ved ende A og tilknyttet en translasjonsfjær med stivhet k ved ende B. Bøyestivheten er EI.

a) Still opp likevektsligninger og bøyelinjens differensialligning.

b) Still opp randbetingelser og bestem forskyvningen Δ uttrykt ved q, L, EI og k.

Oppgave 4. (25%)

a) I en konstruksjonsdel med plan spenningstilstand er koordinatspenningene i et gitt punkt definert ved

$$\sigma_x = 86\,\text{MPa} \qquad \sigma_y = 49\,\text{MPa} \qquad \tau_{xy} = 14.5\,\text{MPa}$$

Tegn Mohrs spenningssirkel og beregn hovedspenningene og deres retninger. Videre, tegn opp et element orientert i hovedretningene og med hovedspenningene påsatt.

b) Forutsatt at materialet er lineært elastisk med elastisitetsmodul $E = 210\,000\,\text{MPa}$, tverrkontraksjonstall $\nu = 0.3$ og skjærmodul $G = E/2(1+\nu)$, er de tilhørende koordinattøyningene gitt ved

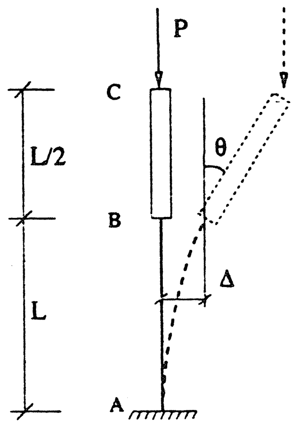
$$\epsilon_x = 340 \cdot 10^{-6} \qquad \epsilon_y = 110 \cdot 10^{-6} \qquad \gamma_{xy} = 180 \cdot 10^{-6}$$

Vis hvordan disse tøyningene framkommer.

c) For tøyningtilstanden i pkt. b), tegn Mohrs tøyningssirkel og beregn hovedtøyningene og deres retninger. Videre, tegn opp et element orientert i hovedretningene og med tøyningene indikert.

(Fortsettes side 4.)

Oppgave 5. (15%)



Søylen i figuren er fast innspent ved A og er belastet med en trykklast P ved søyletopp. Den nedre delen har bøyestivhet EI mens den øvre delen er fullstending bøyestiv.

a) Still opp differensialligningen for bøyelinjen i det betraktede plan for søyledel AB. Det skal tas hensyn til aksialkraftens virkning på forskyvningene (2. ordens teori).

b) Bestem knekningsbetingelsen, som kritisk last kan beregnes fra, og påvis at

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(2.91L)^2}$$

tilfredsstiller betingelsen.

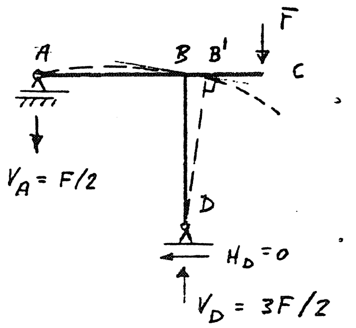
SLUTT

Løsningsforslag

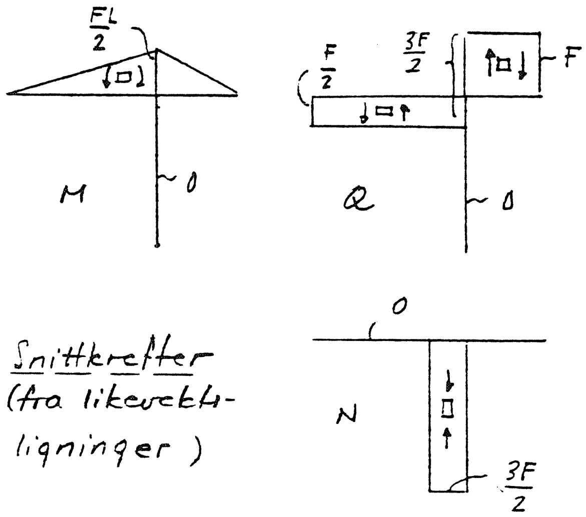
ME 150 LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN 1994

OPPGAVE 1

a) Snittkrefter



Opplagerreaksjoner
(fra likev. lign.;
statisk best. ramme)



Snittkrefter
(fra likevekts-
ligninger)

b) Kommentarer, bøyelinje $(1/R = M/EI)$

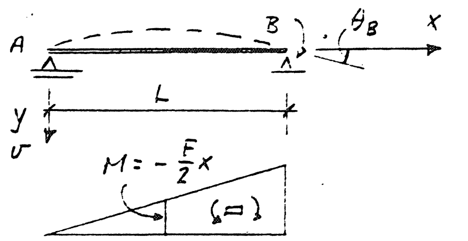
(i) • Strekk på overside ABC stemmer med M-diagr.
• Rett søyle stemmer med $M=0$ (null krumning) langs BD

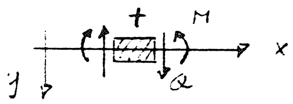
(ii) • Vinkelen mellom ABC og BD forblir ikke 90° når det tas hensyn til skjærdeformasjoner

• B (B') vil senkes noe dersom det tas hensyn til aksialdeformasjoner.

c) Forskyvning, rotasjon

Randverdiproblem AB





Diff. lign. $\quad v'' = -\dfrac{M}{EI} = \dfrac{Fx}{2EI}$

$$v' = \frac{Fx^2}{4EI} + A$$

$$v = \frac{Fx^3}{12EI} + Ax + B$$

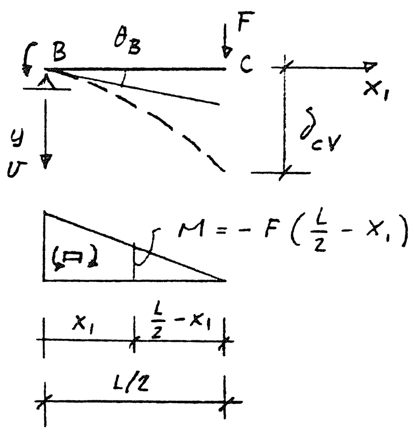
2 / 1994

Randbetingelser

1) $v(0) = 0 \Rightarrow B = 0$ 2) $v(L) = 0 \Rightarrow A = -\frac{FL^2}{12EI}$

Rotasjon $\theta_B = v'(L) = \frac{FL^2}{4EI} - \frac{FL^2}{12EI} = \underline{\underline{\frac{FL^2}{6EI}}}$

<u>Randverdiproblem BC</u>



Diff. ligning

$$v'' = -\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI} F\left(\frac{L}{2} - x_1\right)$$

$$EIv' = F\left(\frac{Lx_1}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right) + A$$

$$EIv = F\left(\frac{Lx_1^2}{4} - \frac{x_1^3}{6}\right) + Ax_1 + B$$

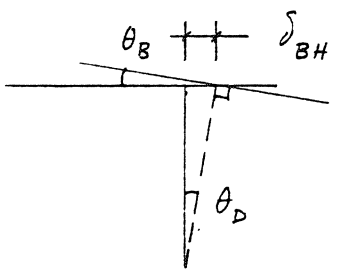
Randbet.

$v(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$v'(0) = \theta_B \Rightarrow A = \theta_B EI = \frac{FL^2}{6}$

Får da $v = \frac{1}{EI}\left(\frac{FLx_1^2}{4} - \frac{Fx_1^3}{6} + \frac{FL^2x_1}{6}\right)$

og $\delta_{CV} = v\left(\frac{L}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{FL^3}{8EI}}}$ Vertikalforskyvn. i pkt. C

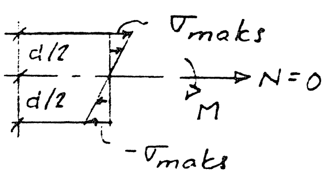


<u>Horisontalforskyvning i B</u>

Fra geometri $\theta_D = \theta_B$

$\delta_{BH} = \theta_D \cdot L = \underline{\underline{\frac{FL^3}{6EI}}}$ $(\tan\theta \approx \theta)$

<u>OPPGAVE 2</u>



$I = \int_A z^2 dA = \frac{\pi d^4}{64}$

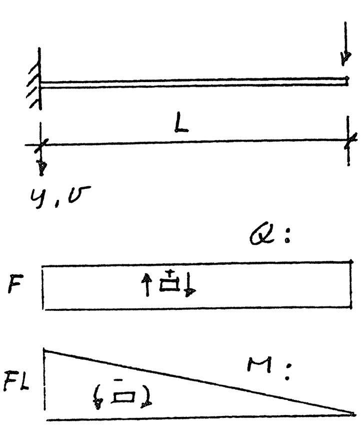
<u>b) Bøyemoment M</u>

$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \Rightarrow M = \frac{EI}{R} = \frac{EI}{(r + d/2)} = \underline{5.01 \text{ Nm}}$

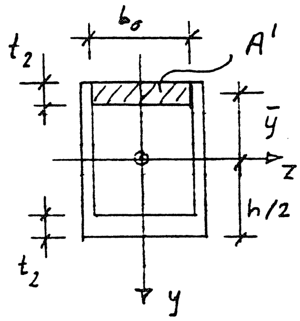
<u>a) Maks. bøyespenning</u> σ_{maks}

$\sigma_{maks} = \frac{M}{I}\frac{d}{2} = \underline{797 \text{ MPa}}$ (N/mm^2)

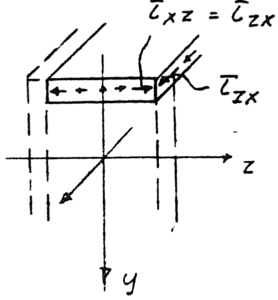
OPPGAVE 3



a) Maks. F



Ved fuge
$\tau_{xz} = \tau_{zx}$



P.g.a. symmetri er skjærspenningene (τ_{zx}) den samme i begge limfuger.

Legger to snitt (ett i hver fuge) $\Rightarrow$ $b = 2t_2$

$$I = I_z = \frac{1}{12}(bh^3 - b_0 h_0^3) = 2.64 \cdot 10^8 \ \text{mm}^4$$

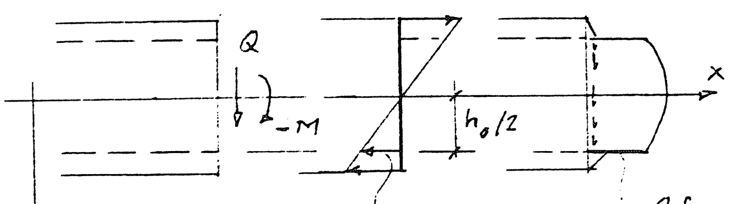
$$S = S_z = A'\bar{y} = b_0 t_2 \frac{h_0 + t_2}{2} = 8.64 \cdot 10^5 \ \text{mm}^3$$

$$\tau_{zx} = \frac{QS}{Ib} = \frac{FS}{I \cdot 2t_2} \leq \tau_{till} = 10 \ \text{MPa} \quad (\text{N/mm}^2)$$

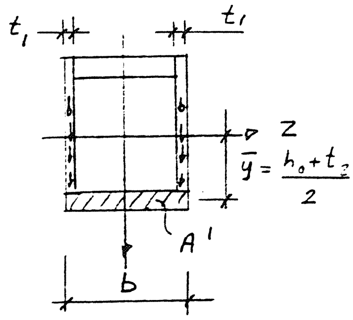
$$\text{o:} \quad F_{maks} = \tau_{till} \frac{I \cdot 2t_2}{S} = 10 \frac{2.64 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 40}{8.64 \cdot 10^5} = 245 \cdot 10^3 \text{N} = \underline{\underline{245 \ \text{kN}}}$$

(Det er ovenfor antatt (som vanlig) at τ_{zx} har samme verdi over fugetykkelsen t_2)

b) Normal- og skjærspenning ved nedre flens



$$\sigma_x = \frac{M}{I}\frac{h_0}{2} \qquad \tau_{xy} = \frac{QS}{Ib}$$



P.g.a. symmetri snittes begge stegene ved overgangen til nedre flens $\Rightarrow$ $\underline{b = 2t_1}$!!

4/1994

I, som ovenfor

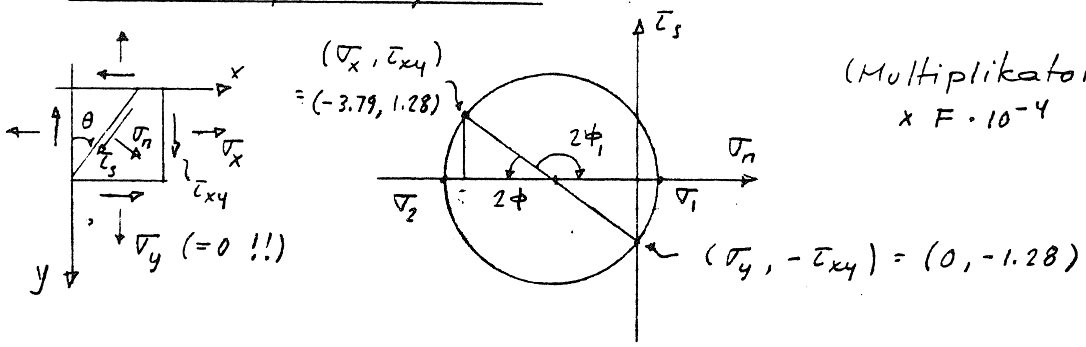
$$S = A'\bar{y} = bt_2 \frac{h_0 + t_2}{2} = 210 \cdot 40 \frac{240}{2} = 1.01 \cdot 10^6 \ mm^3$$

Får da
$$\sigma_x = \frac{M}{I}\frac{h_0}{2} = \frac{-F \cdot 1000}{2.64 \cdot 10^8} 100 = \underline{-3.79 \cdot 10^{-4} \frac{F}{mm^2}}$$

$$\tau_{xy} = \frac{QS}{I \cdot 2t_1} = \frac{F \cdot 1.01 \cdot 10^6}{2.64 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 15} = \underline{1.28 \cdot 10^{-4} \frac{F}{mm^2}}$$

(For $F = 245 \cdot 10^3 N$ $\quad \sigma_x = -92.6 \ N/mm^2 \quad \tau_{xy} = 31.2 \ N/mm^2$)

c) Mohrs spenningssirkel, ..



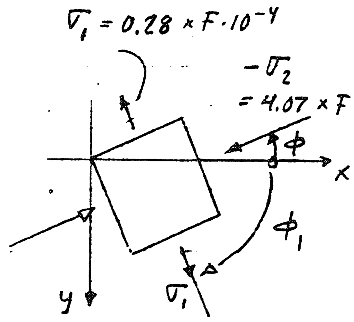
(Multiplikator)
$\times F \cdot 10^{-4}$

For å få samme dreieretning i fysisk plan (x-y) og spenningsplanet er pos. τ_s lagt motsatt av pos. y.

Sirkelradius $\quad r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 2.29 \cdot 10^{-4} \ F/mm^2$

<u>Hovedspenninger</u> $\quad \left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm r = \begin{cases} \underline{0.39 \cdot 10^{-4}} & F/mm^2 \\ \underline{-4.18 \cdot 10^{-4}} & \text{"} \end{cases}$

<u>Hovedretning.</u> $\quad \tan 2\phi_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 1.28}{-3.79} = -0.675$

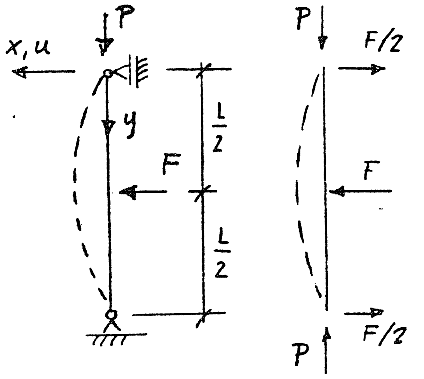


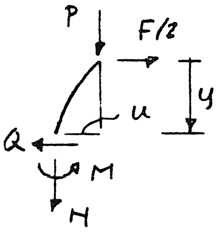
$2\phi_1 = -34.0 + 180° = 146°$, $\quad \underline{\phi_1 = 73°}$

Alternativt kan en dreie $2\phi = 34°$ mot urviseren "for å komme til" σ_2 i Mohrs sirkel, og $\phi = 17°$ (↺) i det fysiske plan.

5 / 1994

OPPGAVE 4





Krefter på utsnitt i forskjøvet tilstand

a) Diff. lign.

$0 \le y \le L/2$

$\Sigma F_y = 0 \qquad N = -P$

$\Sigma M = 0 \qquad M - Pu - \frac{F}{2}y = 0$

$\therefore \quad \underline{M = Pu + \frac{F}{2}y} \quad (1)$

Diff. ligning

$$u'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{Pu}{EI} - \frac{Fy}{2EI} \qquad \text{innfører } \underline{k^2 = P/EI}$$

$$\therefore \quad \underline{u'' + k^2 u = -Fy/2EI} \qquad (2)$$

(Inhomogen 2. ordens d.l.)

b) Maks. moment

$$u = u_h + u_p = A \sin ky + B \cos ky + \overbrace{Cy + D}^{u_p} \qquad (3)$$

Innsetting av u_p i (2) gir $k^2(Cy + D) = -Fy/2EI$

Dvs. $D = 0$ og $C = -F/2k^2EI = -F/2P$

Randbetingelser: 1) $u(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

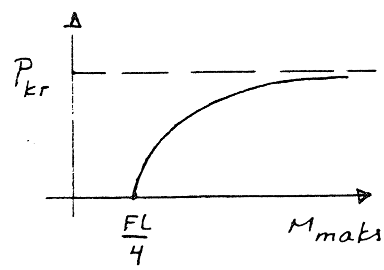
2) $u'(L/2) = kA \cos kL + C = 0 \Rightarrow A = \dfrac{F}{2Pk \cos(kL/2)}$

Maks. $u = u(L/2)$

$$= \frac{F}{2Pk} \frac{\sin(kL/2)}{\cos(kL/2)} - \frac{F}{2P} \cdot \frac{L}{2} = \frac{F}{2Pk} \tan\frac{kL}{2} - \frac{FL}{4P} \qquad (4)$$

$$\text{Maks. } M = Pu(L/2) + \frac{F}{2}\frac{L}{2} = \underline{\frac{F}{2k} \tan\frac{kL}{2}} \qquad (5)$$

c) Kritisk last



Vi vet at forskyvningen og dermed momentet $\to \infty$ når $P \to P_{kr}$.

$M_{maks} \to \infty$ når $\tan\frac{kL}{2} \to \infty$

Dvs. når $\frac{kL}{2} \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \pi/L$

$\underline{P_{kr} = k^2 EI = \pi^2 EI/L^2}$

Denne gjenkjenner vi som knekklasten for den leddlagrede søylen.

6 / 1994

OPPGAVE 5

a) Diff. ligning

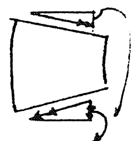
Likevektsligninger :

$$\Sigma F_z = 0 : \quad Q r d\theta + p \overbrace{r d\theta dr}^{dA} - (Q + \frac{dQ}{dr} dr)(r+dr)\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{dQ}{dr} + \frac{Q}{r} = p} \qquad (1)$$

$\Sigma M = 0$: (om ytre rand)

$$(M + \frac{dM}{dr} dr)(r+dr)d\theta - M_r r d\theta - 2M_\theta \sin\frac{d\theta}{2} dr + Q r d\theta dr + p\, dr\, r d\theta \cdot \frac{dr}{2} = 0$$



$M_\theta \sin\frac{d\theta}{2}$

Innfører $\sin\frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$ og neglisjerer dr^2-ledd

$$\underline{r\frac{dM_r}{dr} + M_r - M_\theta + Qr = 0} \qquad (2)$$

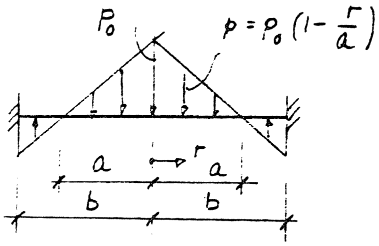
Fører M_r og M_θ (fra oppg.tekst) inn i (2)

$$-Dr\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right) - D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right) + D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right) + Qr = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr} = \frac{Q}{D}} \qquad (3a)$$

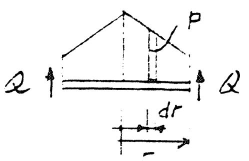
$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right) = \frac{Q}{D}} \qquad (3b)$$

b) Forskyvning $w(r)$



Må først bestemme Q, enten ved en likevektsbetraktning av et utsnitt eller fra (1), omformet til $d(Qr) = prdr$. Benytter den første framg. måten :

$$\int_0^r p \cdot \overbrace{2\pi r dr}^{dA} = Q \cdot 2\pi r \Rightarrow \underline{Q = P_0\left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3a}\right)}$$



Innfører i (3b) og integrerer. Finner :

$$w = \frac{P_0 r^4}{64D} - \frac{P_0 r^5}{225aD} + C_1\frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3$$

Randbet. : $\frac{dw}{dr} = 0$ for $r = 0, b$; $w(b) = 0$

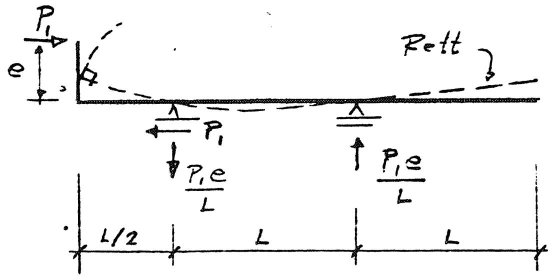
Finner : $\underline{C_2 = 0}$; $\underline{C_1 = -\frac{P_0 b^2}{8D} + \frac{2P_0 b^3}{45aD}}$; $\underline{C_3 = \frac{P_0 b^4}{64D} - \frac{P_0 b^5}{150aD}}$

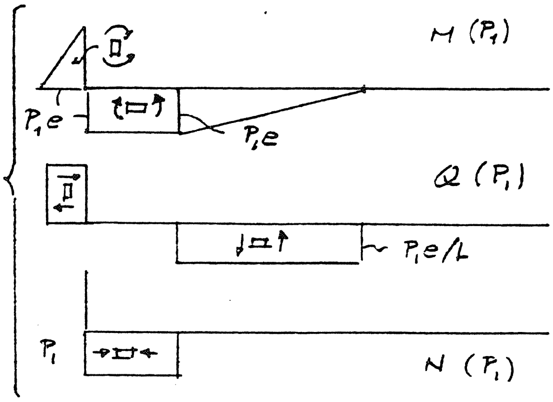
For $r = 0$ og $a = b$: $\underline{\underline{w = C_3 = \frac{43}{4800}\frac{P_0 b^4}{D}}}$

ME 150 LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN 1995

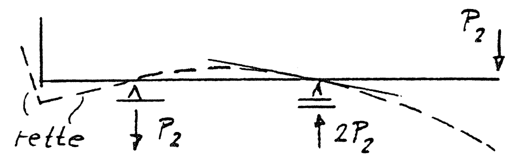
OPPGAVE 1

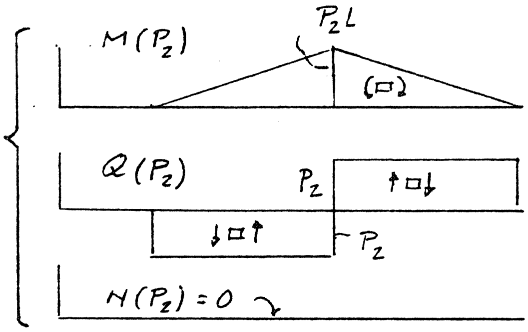
a) Snittkrefter

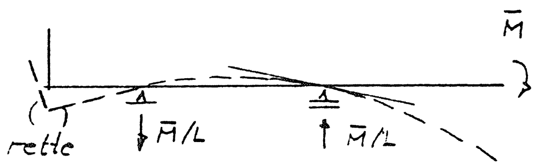


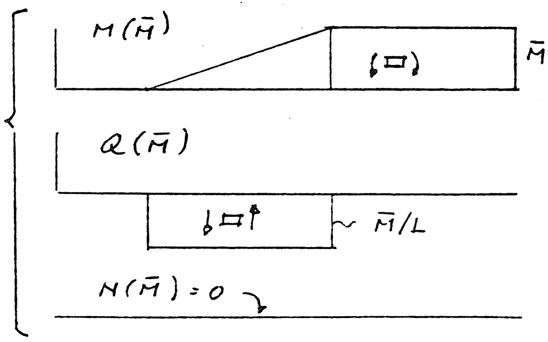


Reaksjonskrefter









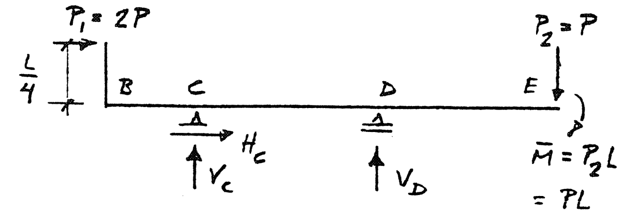
b) Bøyelinjer

Bøyelinjer for de tre lastene er skissert ovenfor.

I områder med $M = 0$ er krumningen $= 0$ og linjene forblir rette

I M-diagrammene er "momenter tegnet på strekksiden". De inntegnede bøyelinjer gir strekk på samme side

c) <u>Differensialligning</u> for CD, θ_c, v

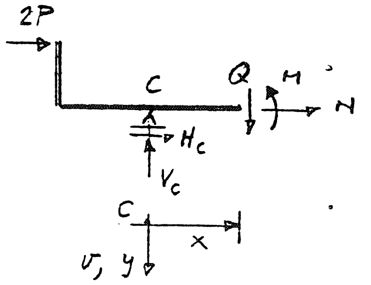


Totale reaksjonskrefter: Superponerer

$$V_c = -\frac{P_1 e}{L} - P_2 - \frac{\bar{M}}{L} = -\frac{5P}{2}$$

$$H_c = -P_1 \qquad = -2P$$

$$V_D = \frac{P_1 e}{L} + 2P_2 + \frac{\bar{M}}{L} = \frac{7P}{2}$$



Moment i felt CD: Kan superponere eller stille opp momentlikevekt på ny. Velger det siste.
Velger for enkelhetsskyld koord.-system som vist.

$$\sum M_{(x)} = 0 \qquad 2P \cdot \frac{L}{4} + V_c \cdot x - M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{P}{2}(L - 5x)$$

<u>Diff. lign.</u>:

$$EI\, v'' = -M = -\frac{P}{2}(L - x)$$

$$EI\, v' = -\frac{P}{2}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

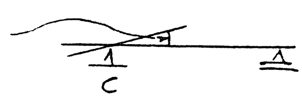
$$EI\, v = -\frac{P}{2}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1 x + C_2$$

Randbetingelser: 1) $v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$

2) $v(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{PL^2}{6}$

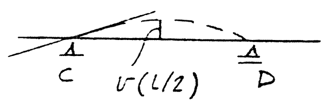
<u>Rotasjonen</u> (helningen) ved C : θ_c

$$\theta_c = v'(0) = \frac{C_1}{EI} = \underline{-\frac{PL^2}{6EI}}$$



<u>Vertikalforskyvningen</u> v for $x = L/2$:

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = \underline{-\frac{3}{32}\frac{PL^3}{EI}}$$



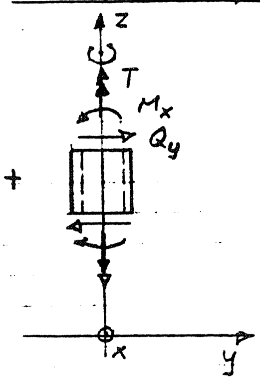
(Dimensjonskontroll bør alltid gjennomføres:

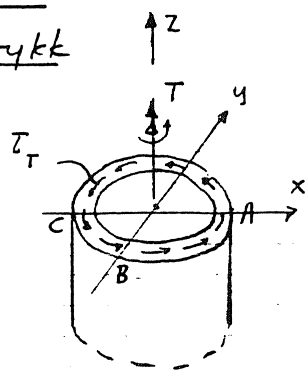
θ_c : $N \cdot m^2 / \frac{N}{m^2} m^4 = \cancel{Nm^2}/\cancel{Nm^2}$ ✓ (radianer)

v : $N \cdot m^3 / \frac{N}{m^2} \cdot m^4 = m$ ✓)

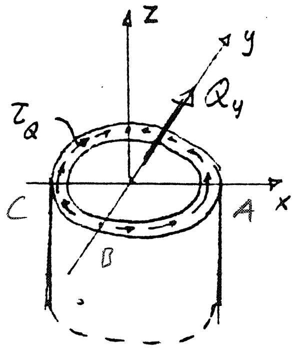
OPPGAVE 2

a) Spenningsuttrykk





(ii)



(iii)

(i) $\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{M_x}{\pi r^3 t} y$

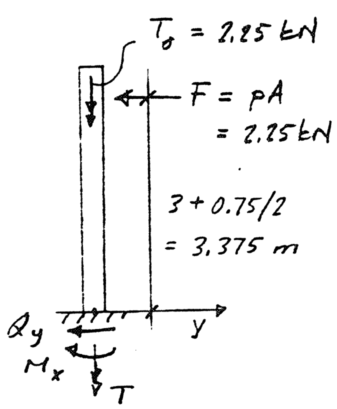
$\tau_T = \frac{Tr}{J} = \frac{T}{2\pi r^2 t}$

$\tau_Q = \frac{Q_y S_x}{I_x \cdot b}$, $b = 2t$!! $= \frac{Q_y}{\pi r t} \sin\alpha$

Det er ovenfor valgt å tilføye indekser som passer for de snittkrefter (M_x , Q_y ...) som oppstår p.g.a. vindbelastningen.

Skjærspenningenes retning blir som vist for de viste retninger for Q_y og T. Normalspenn. er positive som strekk (dvs. for pos. y når M_x har retning som vist).

b) Snittkrefter ved innspenning:



(Pos. snittkrefter ved innspenn.; se fig. øverst t.v.)

Vindflate $A = 2 \cdot 0.75 = 1.5\ m^2$

Vindtrykk $p = 1.5\ kPa = 1.5\ kN/m^2$

Vindkraft $F = pA = 2.25\ kN$

Torsjon $T_o = F \cdot e = 2.25 \cdot \frac{2}{2} = 2.25\ kNm$

Likevekt

$\Sigma F_y = 0$ $\quad Q_y = -F = \underline{-2.25\ kN}$

$\Sigma M_z = 0$ $\quad T = -T_o = \underline{-2.25\ kNm}$

$\Sigma M_x = 0$ $\quad M_x = 2.25 \cdot 3.375 = \underline{7.594\ kNm}$

4 / 1995

Spenninger for $r = 50\,mm$ $t = 3\,mm$

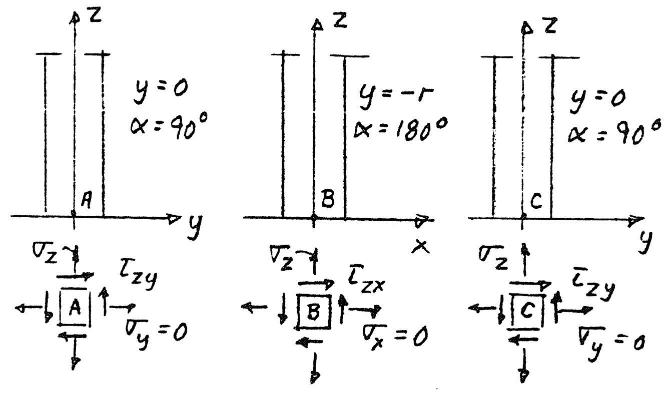
$$\sigma_z = \frac{7.594 \cdot y}{\pi \cdot 0.050^3 \cdot 0.003}\, 10^{-3} = 6446\, y \quad (MN/m^2)$$

$$\tau_T = \frac{-2.25}{2\pi \cdot 0.050^2 \cdot 0.003}\, 10^{-3} = -47.75 = -47.8 \quad MN/m^2$$

$$\tau_Q = \frac{-2.25 \cdot \sin\alpha}{\pi \cdot 0.050 \cdot 0.003}\, 10^{-3} = -4.78 \sin\alpha \approx -4.8 \sin\alpha \quad MN/m^2$$

I pkt. A, B og C er det praktisk å benytte koordinat-spenninger

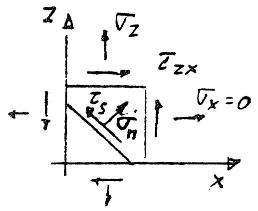
Normalspenn. kun i lengderetning (σ_z) i bjelketeorien.



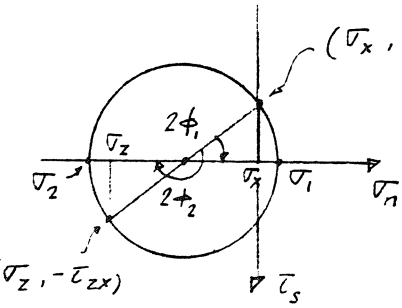
(Dim. $\frac{MN}{m^2}$)

A	B	C
$\sigma_z = 0$	$\sigma_z = -322,3$	$\sigma_z = 0$
$\tau_{zy} = \tau_T + \tau_Q$	$\tau_{zx} = \tau_T$	$\tau_{zy} = -\tau_T + \tau_Q$
$= -52.5$	$= -47.8$	$= 43.0$

c) Mohrs spenningssirkel, hovedspenn. og -retninger



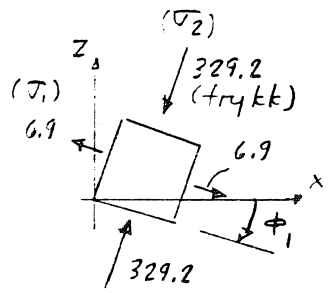
Fysisk plan



Sirkelradius :

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2}$$

$$= 168.1 \ MN/m^2$$



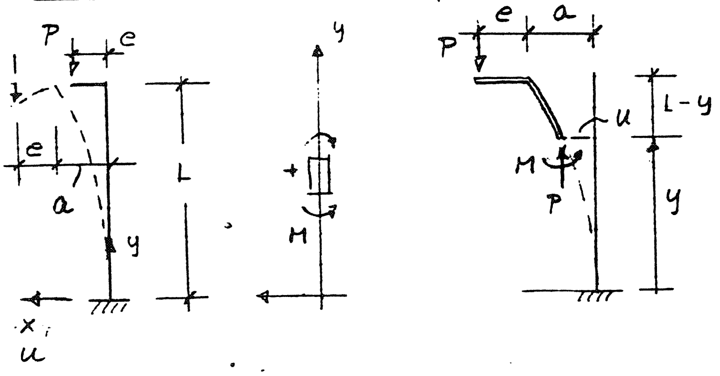
Hovedspenn. $\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm r = \left\{\begin{matrix} +6.9 \ \frac{MN}{m^2} \\ -329.2 \ '' \end{matrix}\right.$

Hovedretn. $\tan 2\phi_1 = \frac{2\tau_{zx}}{\sigma_x - \sigma_z} \Rightarrow \phi_1 = 8.3°$

Dreieretn. blir den samme i fysisk plan og spenningsplanet når akse-retn. er valgt ~~som~~ ovenfor i Mohrs sirkel

OPPGAVE 3

a) Differensialligning



a = forskyvning ved søyletopp

Bestemmer M fra likevekt-betraktning av øvre utsnitt

$$M = -P(e + a - u)$$

Diff. lign.: $$u'' = -\frac{M}{EI} = \frac{P}{EI}(e + a - u)$$

$$\underline{u'' + k^2 u = k^2(e+a)} \qquad \text{med } k^2 = P/EI$$

b) Maks u og M

$$u = u_h + u_p = A\cos ky + B\sin ky + \overbrace{(e+a)}^{u_p}$$

$$u' = -Ak\sin ky + Bk\cos ky$$

Randbetingelser: (Må ha 3 for å bestemme A, B og a)

1) $u'(0) = 0$ gir $B = 0$

2) $u(0) = 0$ gir $A = -(e+a)$

3) $u(L) = a$ gir $-(e+a)\cos kL + (e+a) = a \Rightarrow a = e\left(\frac{1}{\cos kL} - 1\right)$

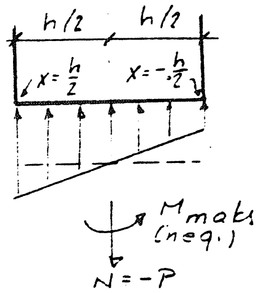
Får da $$u = -Ak\cos ky + (e+a) = \frac{e}{\cos kL}(1 - \cos ky)$$

Ved $y = L$ $$u_{maks} = u(L) = a = \underline{e\left(\frac{1}{\cos kL} - 1\right)}$$

Ved $y = 0$ $$M_{maks} = -P(e+a) = \underline{-Pe/\cos kL}$$

c) Spenninger

(normalspenn. $\sigma = \sigma_y$)



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I}x \qquad I = I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$= \frac{-P}{bh} + \frac{-Pe/\cos kL}{bh^3/12}\left(-\frac{h}{2}\right) \le 0 \quad (\text{trykk})$$

Dvs. $\underline{e \le h\cos kL/6}$

for å unngå og få strekk (ved $x = -\frac{h}{2}$)

6 / 1995 —

OPPGAVE 4

a) Momenter M_x og M_y (pr. lengdeenhet !)

(M_x om y-akse ; M_y om x-akse)

"Deformasjonsanalyse"

Oppgitt $\varepsilon_x = \frac{z}{R_x}$ $\varepsilon_y = \frac{z}{R_y}$

Materiallov , plan spenningstilstand

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E}$$

eller

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{R_x} + \frac{\nu}{R_y}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{R_y} + \frac{\nu}{R_x}\right)$$

Likevektsbetraktning gir de søkte momenter :

$$M_x = \int_{z=-h/2}^{h/2} \sigma_x z\,dz = D\left(\frac{1}{R_x} + \frac{\nu}{R_y}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\,dz = D\left(\frac{1}{R_y} + \frac{\nu}{R_x}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

b) Randbetingelser , w og C

Randbetingelser : $w = 0$ ved alle render $\begin{cases} x = 0, a \\ y = 0, b \end{cases}$

$M_x = 0$ og $M_y = 0$ ved alle render

Plateløsning

Kontroll randb.: $w = C \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$ (2)

$w = 0$ for $x = 0, a$ $y = 0, b$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = C\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \nu\left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right] \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} = 0 \text{ for } x = 0, a$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = C\left[\nu\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right] \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} = 0 \text{ for } y = 0, b$$

Dvs. (2) tilfredsstiller randbetingelsene

Konstanten bestemmes ved innsetting av (2) i (1)

Finner

$$C = \frac{q_0}{\pi^4 D\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2}$$

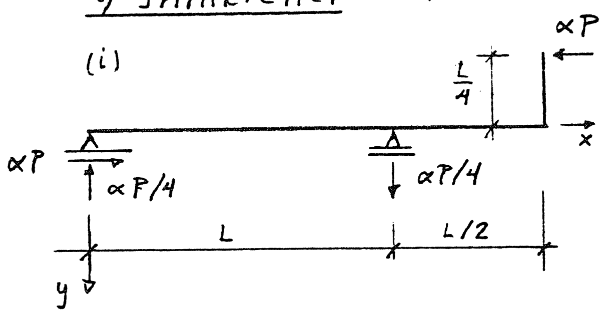
($w_{maks} = C$ finnes for $x = a/2$ og $y = b/2$)

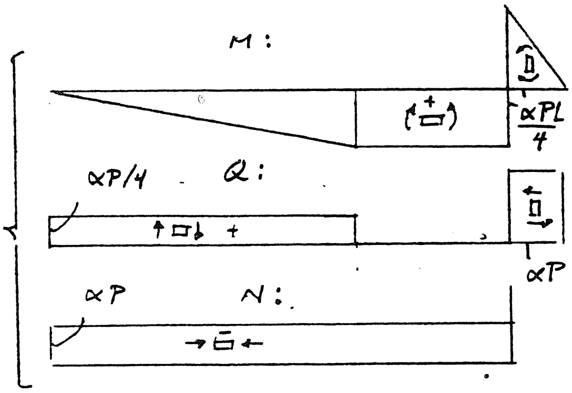
ME 150 LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN 1996

OPPGAVE 1

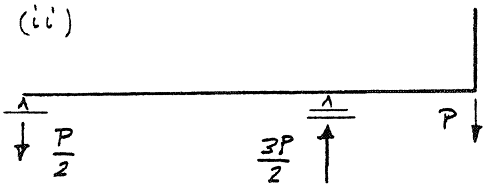
a) Snittkrefter

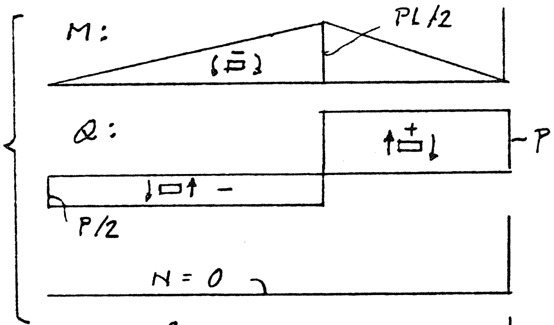
(i)



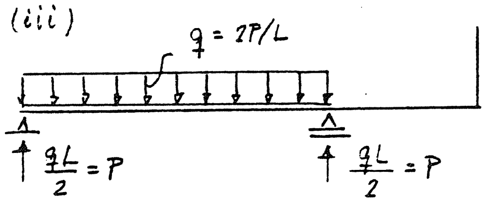


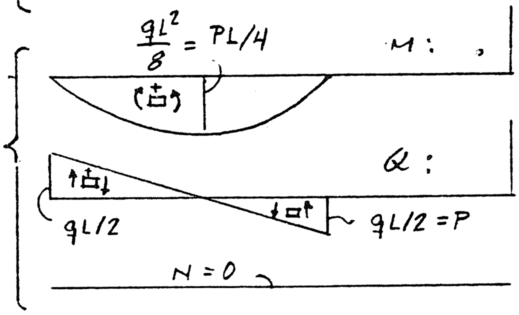
(ii)



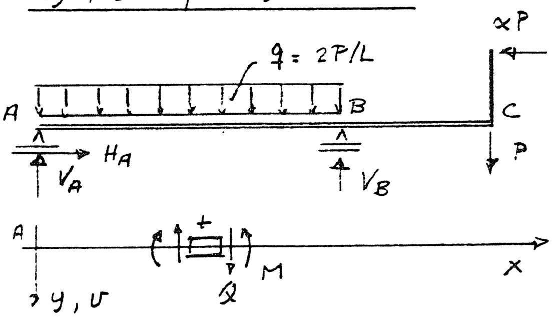


(iii)





b) Rotasjon ved C



Totale reaksjonskrefter :

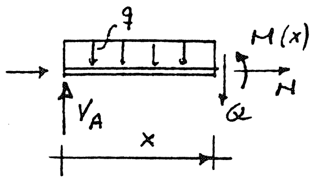
$$V_A = \frac{\alpha P}{4} - \frac{P}{2} + P = \frac{P}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$V_B = -\frac{\alpha P}{4} + \frac{3P}{2} + P = \frac{P}{2}\left(5 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$H_A = \alpha P$$

Differensialligning $v'' = -M/EI$; Momentet $M = M(x)$ kan uttrykkes med en ligning dersom en benytter seg av singularitetsfunksjoner (Macaulays metode). Alternativt kan en dele opp i to randverdiproblemer, et for AB og et for BC. Velger den siste framgangsmåten.

I. Del AB



$$\Sigma M = 0 \Rightarrow M(x) = V_A x - \frac{qx^2}{2} = \frac{P}{2}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)x - \frac{qx^2}{2}$$

$$EI\,v'' = -\frac{P}{2}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)x + \frac{qx^2}{2}$$

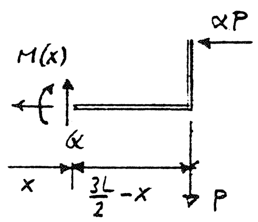
$$EI\,v' = -\frac{P}{4}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)x^2 + \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EI\,v = -\frac{P}{12}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)x^3 + \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Randbetingelser: 1) $v(0)=0 \Rightarrow \underline{C_2 = 0}$ 2) $v(L)=0 \Rightarrow \underline{C_1 = \frac{\alpha P L^2}{24}}$

Rotasjon ved B $\quad v'(L) = \frac{PL^2}{12EI}(1-\alpha)$

II. Del BC



$$\Sigma M = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{\alpha P L}{4} - P\left(\frac{3L}{2} - x\right)$$

$$EI\,v'' = -\frac{\alpha P L}{4} + \frac{3PL}{2} - Px$$

$$EI\,v' = \left(-\frac{\alpha P L}{4} + \frac{3PL}{2}\right)x - \frac{Px^2}{2} + C_1$$

$$EI\,v = \ldots$$

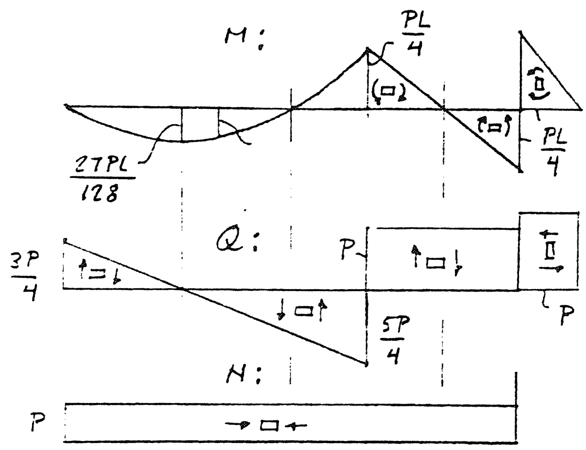
Randbeting.: 1) $v'\left(\frac{3L}{2}\right) = 0 \Rightarrow \underline{C_1 = \frac{3PL^2}{8}(\alpha - 3)}$

2) Kompatibilitet ved B

$$[v'(L)]_{I} = [v'(L)]_{II} \Longrightarrow \underline{\underline{\alpha = 1}}$$

(For $\alpha = 1$ finnes videre $v'(L) = 0$ og $v'\left(\frac{3L}{2}\right) = 0$)

c) Totale snittkrefter for $\alpha = 1$



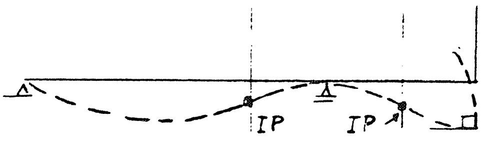
AB: $M = \frac{3P}{4}x - \frac{P}{L}x^2$

$Q = \frac{dM}{dx} = \frac{3P}{4} - \frac{2P}{L}x = 0$

$\Rightarrow \underline{x = 3L/8}$ $\quad .375$

$\Rightarrow \underline{M_{maks} = \frac{27PL}{128}}$

$M = 0 \Rightarrow x = 0$ og $x = \frac{3L}{4}$



Bøyelinjen (tegnet med sterkt overdrevne forskyvninger)
IP = infleksjonspunkt

OPPGAVE 2

a) "Koordinatspenninger"

i) Normalspenn., ringretning $\sigma_y = \sigma_\theta = \frac{pr}{t} = +135$ MPa

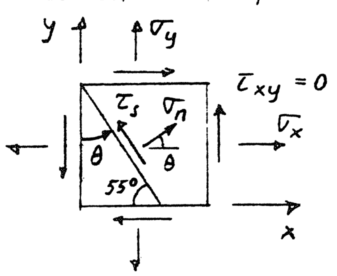
ii) Normalspenn., lengderetning $\sigma_x = \sigma_L = \frac{pr}{2t} = +67.5$ MPa (MN/m^2)

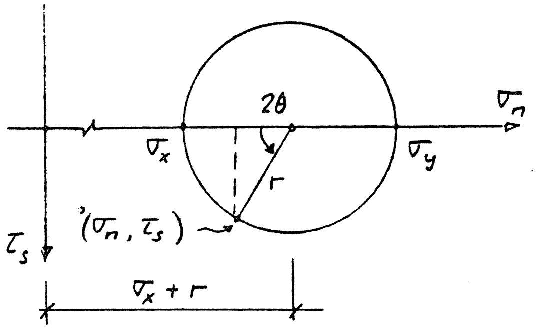
iii) Normalspenn., tverretning $\sigma_z = \sigma_r \approx 0$

($\sigma_r = 0$ på utside og $\sigma_r = -p = -0.6$ MPa på innsiden. Dvs. de er neglisjerbare sammenlignet med σ_θ, σ_L)

iv) Skjærspenning $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ (Skjærspenn. i ringretningen, τ_{xz}, er også null i områder borte fra endelokkene hvor det er lokale "forstyrrelser").

b) Spenninger i sveisesøm





$\theta = 90 - 55 = 35°$

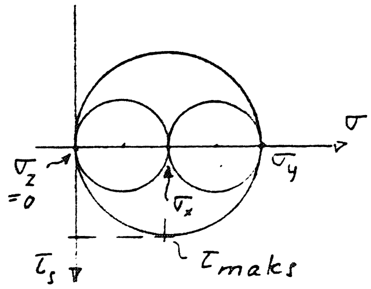
$2\theta = 70°$

Radius:

$r = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} = \underline{33.75 \text{ MPa}}$

Fra sirkelen: $\sigma_n = (\sigma_x + r) - r\cos 2\theta = \underline{89.7 \text{ MPa}}$

$\tau_s = r \sin 2\theta = \underline{31.7 \text{ MPa}}$



c) Maksimal skjærspenning

$\tau_{maks} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} = \frac{pr/t - 0}{2} = \frac{pr}{2t}$

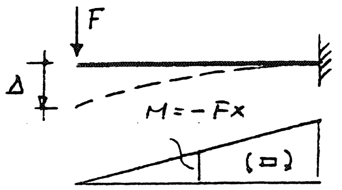
(maks $\tau_{xy} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} = \frac{pr}{4t} < \frac{pr}{2t}$)

.Flytning Iflg. Trescas flytekriterium fås flytning når $\tau_{maks} \geq f_y/2$ (eller $\sigma_{maks} - \sigma_{min} \geq f_y$)

$\tau_{maks} = \frac{pr}{2t} = \frac{f_y}{2} \Rightarrow \underline{p = \frac{f_y t}{r}} = 0.0044 f_y$ MPa

OPPGAVE 3

a) utkragerbjelke med statisk last

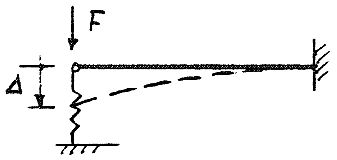


$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx = \int_0^L \frac{(-Fx)^2}{2EI}\,dx = \frac{F^2L^3}{6EI}$$

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{FL^3}{3EI}$$

(Alternativt fra $W = \frac{1}{2}F\Delta = U$)

b) Med translasjonsfjær



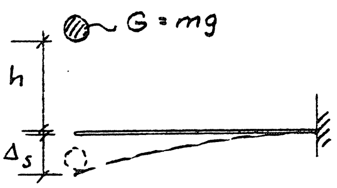
$$M = -Fx + k\Delta \cdot x$$

$$U = U_{bjelke} + U_{fjær} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx + \frac{1}{2}k\Delta^2$$

$$= (F^2 - 2kF\Delta + k^2\Delta^2)\frac{L^3}{6EI} + \frac{k\Delta^2}{2}$$

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial F} = (2F - 2k\Delta)\frac{L^3}{6EI} \Rightarrow \Delta = F/\left(\frac{3EI}{L^3} + k\right)$$

c) Støt mot utkragerbjelke



F_s = ekvivalent statisk last som gir samme Δ_s

$$U = \frac{1}{2}F_s\Delta_s = \frac{F_s^2L^3}{6EI} \quad \text{(som funnet i a))}$$

$$W = mg(h + \Delta_s)$$

$$W = U \Rightarrow F_s = mg(h + \Delta_s)\frac{6EI}{L^3}$$

$$\Delta_s = \frac{\partial U}{\partial F_s} = \frac{\partial}{\partial F_s}\left(\frac{F_s^2L^3}{6EI}\right) = \frac{F_sL^3}{3EI} = \sqrt{mg(h+\Delta_s)\frac{6EI}{L^3}}\cdot\frac{L^3}{3EI}$$

$$\Rightarrow \Delta_s^2 - \frac{6}{9}\frac{mgL^3}{EI}\Delta_s - \frac{6}{9}\frac{mgL^3}{EI}h = 0$$

$$\Delta_s = \frac{mgL^3}{3EI} \pm \sqrt{\left(\frac{mgL^3}{3EI}\right)^2 + \frac{2}{3}\frac{mgL^3}{EI}h}$$

Tilf. $h = 0$ og $mg = F$:

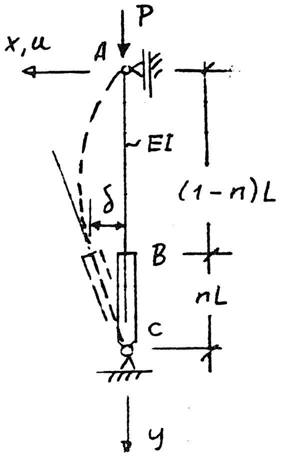
$$\Delta_s = \frac{2FL^3}{3EI} = 2\Delta_{statisk} \text{ (oppg. a))}$$

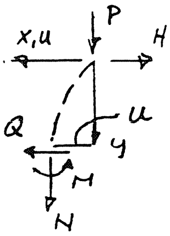
Støtfaktor $\Phi = \dfrac{\Delta_s}{\Delta_{statisk}} = 2$

5 / 1996

OPPGAVE 4

a) Differensialligning





$H = 0$ (finnes fra momentlikevekt av hele staven $\Sigma M_c = 0$)

For utsnitt

($\Sigma F_x = 0 \Rightarrow Q = 0$)

($\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = -P$ (trykk))

$\Sigma M = 0 \Rightarrow \underline{M = Pu}$

$$u'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}u$$

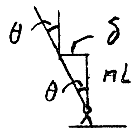
$$\underline{u'' + k^2 u = 0} \qquad \text{hvor } k^2 = \frac{P}{EI}$$

b) Knekning

Løsning $\qquad u = A\cos ky + B\sin ky$

$\qquad u' = -Ak\sin ky + Bk\cos ky$

Randbetingelser: 1) $u(0) = 0 \Rightarrow A = 0$



2) $u((1-n)L) = \delta \Rightarrow B = \dfrac{\delta}{\sin(1-n)kL}$

3) $u'((1-n)L) = -\dfrac{\delta}{nL} \Rightarrow Bk\cos(1-n)kL = -\dfrac{\delta}{nL}$

(NB! negativ)

Fører B fra 2) inn i 3) og finner

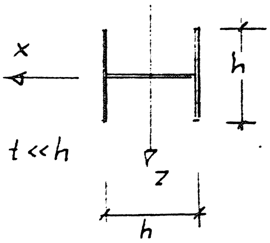
$$\underline{\tan((1-n)kL) = -nkL} \qquad \text{q.e.d.}$$

Tilf. med $n = 1/2$ $\qquad \tan\frac{kL}{2} = -\frac{kL}{2} \Rightarrow \frac{kL}{2} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}} = 2.03$

$$P_{kr} = \frac{2.03^2 \cdot 4\,EI}{L^2} = 16.48\frac{EI}{L^2} = \underline{1.67\frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

c) I-tverrsnitt

, $n = 0 \qquad \tan kL = 0 \Rightarrow kL = \pi \Rightarrow P_{kr} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2} = P_E$



$$I_x = 2\frac{th^3}{12} + \cancel{\frac{ht^3}{12}} \approx \frac{th^3}{6} \quad \text{om } x\text{-aksen}$$

$$I_z = \cancel{2\frac{ht^3}{12}} + 2\cdot th\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{th^3}{12} \approx \frac{7}{12}th^3$$

$I_x < I_z \Rightarrow$ Knekning om x-aksen $\left\{ \begin{array}{l} \text{ut av} \\ \text{papir-} \\ \text{planet} \end{array} \right.$

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2} = \underline{1.65\,E\,th^3/L^2}$$

ME 150 LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN 1997

OPPGAVE 1

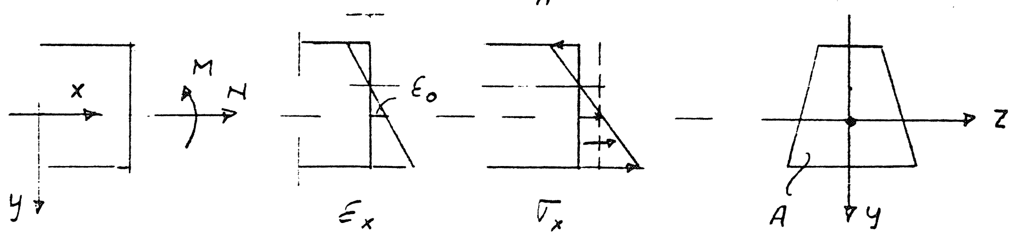
a) Normalspenningsformelen gjelder forutsatt
- i) plan bøyning (bøyning kun om en akse)
- ii) Lineært elastisk materiale
- iii) Opprinnelig rett bjelke
- iv) Krumningsradius $R >>$ tverrsnittshøyde
- v) Lengdeaksen (x-aksen) legges gjennom arealsenteret $\Rightarrow \int_A z\,dA = 0$
- vi) "Plane tverrsnitt forblir plane" (Bernoullis hypotese)

I. Tøyningsanalyse $\qquad \varepsilon_x = \varepsilon_0 + y/R$ (oppgitt) $\qquad$ (1)

II. Materiallov $\qquad \sigma_x = E\varepsilon_x = E\varepsilon_0 + Ey/R \qquad$ (2)

III. Likevekt $\qquad N = \int_A \sigma_x \, dA \qquad$ (3)

$$M = \int_A \sigma_x \, y \, dA \qquad (4)$$



$$N = E\varepsilon_0 \int_A dA + \frac{E}{R}\cancel{\int_A z\,dA} = EA\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{N}{EA} \qquad (5)$$

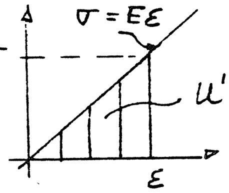
$$M = E\varepsilon_0 \cancel{\int_A y\,dA} + \frac{E}{R}\int_A y^2 dA = \frac{EI}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \qquad (6)$$

Lign. 5 og 6 innsatt i Lign. 2 gir

$$\underline{\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{I}y} \qquad (\leftarrow \overset{+}{\square} \xrightarrow{\sigma_x}) \qquad (7)$$

(Ren bøyning $(N=0) \Rightarrow \sigma_x = \frac{M}{I}y$)

b) Tøyningsenergi



Tøyningsenergitettheten (energien pr. volumenhet):

$$U' = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E}$$

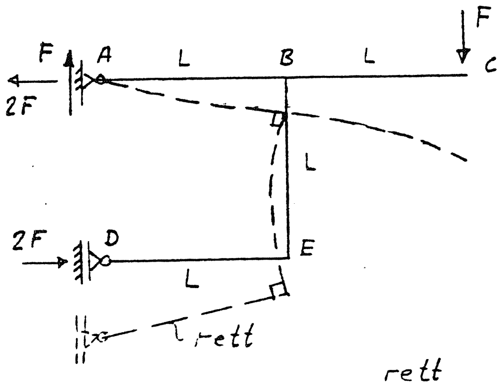
Tøyningsenergien: $U = \int_V U' dV$

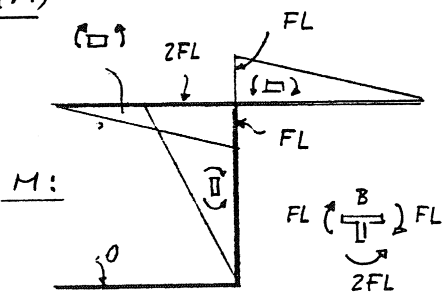
$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_L\int_A \frac{\sigma^2}{2E} ds\, dA = \int_L\int_A \frac{(My/I)^2}{2E} ds\, dA$$

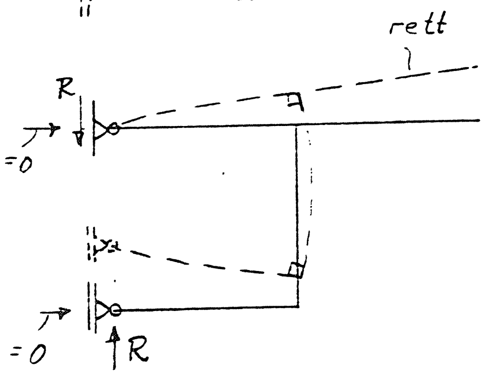
$$= \int_L \frac{M^2}{2EI^2}\underbrace{\left(\int_A y^2 dA\right)}_{I} ds = \underline{\int_L \frac{M^2}{2EI} ds} \qquad \left(\begin{matrix}\text{Normalt}\\ ds = dx\end{matrix}\right)$$

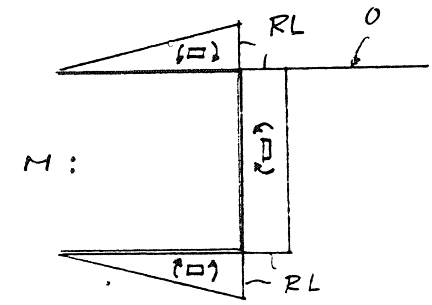
OPPGAVE 2

a) Opplager- og snittkrefter (M)









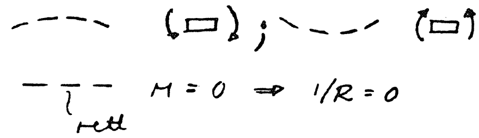
Opplagerkrefter og bøyelinjer (- - -)

Momentdiagram (tegnet på strekksiden)

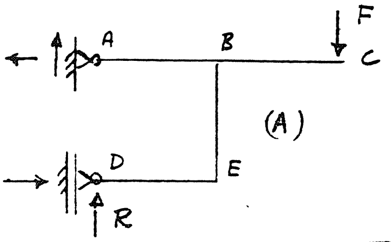
3 / 1997

b) Bøyelinjer

Er skissert ovenfor.



c) Statisk ubestemt ramme



(Δ_D i retn. av R)

Ramme (B) er fastholdt mot forskyvning i vertikalretning i pkt. D. Dvs. $\Delta_D = 0$, og R må velges slik at denne (kompatibilitets-) betingelsen tilfredsstilles.

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \Delta_D = 0 \qquad \left\{ \text{Castiglianos sats} \right.$$

d) R for $\Delta_D = 0$

Momenter p.g.a. F og R i "lokale" aksesystem

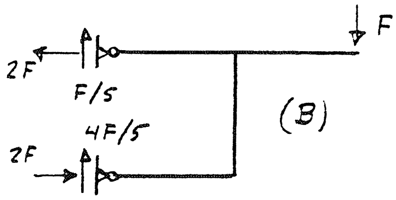
$M_{AB} = Fx - Rx$	(origo i A)	Vedr. fortegn: Dersom F og R gir strekk på forskjellig side må det ene bidraget innføres med neg. fortegn
$M_{BC} = Fx$	(origo i C)	
$M_{BE} = 2Fy - RL$	(origo i E)	
$M_{DE} = Rx$	(origo i D)	

$$\Delta_D = \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{\partial U}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial R} = \int_L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R}\, ds$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\underbrace{\int_0^L (Fx-Rx)(-x)\,dx}_{AB} + \underbrace{0}_{BC} + \underbrace{\int_0^L (2Fy-RL)(-L)\,dy}_{BE} + \underbrace{\int_0^L Rx\cdot x\,dx}_{DE} \right]$$

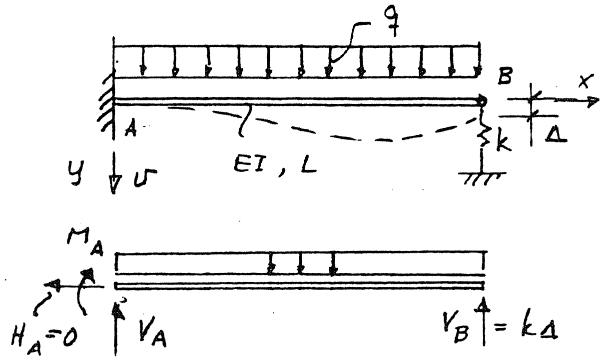
$$= \frac{1}{EI}\left[-\frac{(F-R)L^3}{3} - 0 + \left(-\frac{2FL^3}{2} + RL^3\right) + \frac{RL^3}{3} \right]$$

$$\Delta_D = -\frac{4FL^3}{3} + \frac{5RL^3}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{R = \frac{4F}{5}}$$



Endelige opplagerkrefter for ramme (B).

OPPGAVE 3



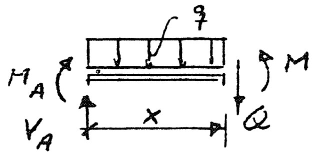
a) Likevektsligninger og diff. ligning

For hele bjelken

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \quad H_A = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + k\Delta = qL \qquad (2)$$

$$\Sigma M_{(B)} = 0 \Rightarrow M_A + V_A L - \frac{qL^2}{2} = 0 \qquad (3)$$



For utsnittet t.v

$$\Sigma M_{(x)} = 0 \Rightarrow M = M_A + V_A x - \frac{qx^2}{2} \qquad (4)$$

Diff. ligning : $\underline{EI\, v'' = -M = -M_A - V_A x + \frac{qx^2}{2}}$ (5)

b) Forskyvning Δ

$$EI\, v' = -M_A x - V_A \frac{x^2}{2} + \frac{q}{6} x^3 + A$$

$$EI\, v = -M_A \frac{x^2}{2} - V_A \frac{x^3}{6} + q\frac{x^4}{24} + Ax + B$$

Randbetingelser

I) $v(0) = 0 \Rightarrow B = 0$ II) $v'(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

III) $M(L) = 0 \Rightarrow v''(L) = 0$ gir det samme som Lign. 3

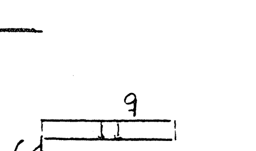
IV) $v(L) = \Delta \Rightarrow EI\,\Delta = -M_A \frac{L^2}{2} - V_A \frac{L^3}{6} + \frac{qL^4}{24}$ (6)

Fra Lign. 3 og 6 $\quad V_A = \frac{3EI\Delta}{L^3} + \frac{5qL}{8}$ (7)

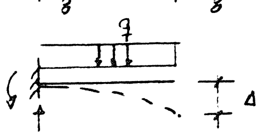
Fra Lign. 7 og 2 $\quad \Delta = \frac{3qL}{8} \dfrac{1}{k + \frac{3EI}{L^3}}$ (8)

(Kontroll :

- For $k \to \infty$ $\quad \Delta \to 0$. Korrekt.



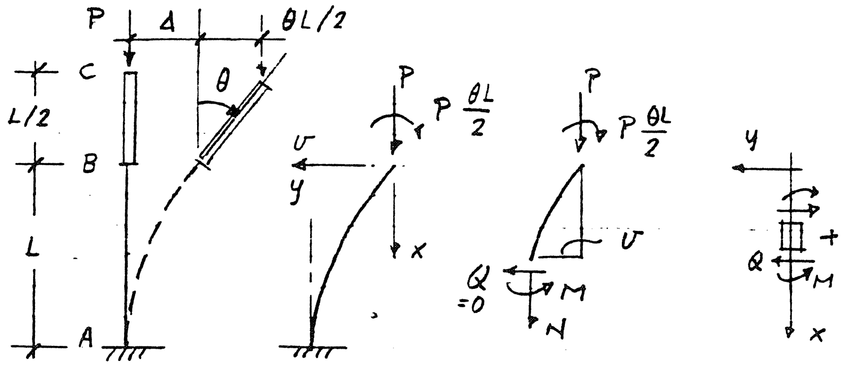
- For $k \to \infty$ $\quad \Delta = \frac{qL^4}{8EI}$. Korrekt.



)

6 / 1997

OPPGAVE 5



a) Differensialligning med $k^2 = P/EI$

Likevekt av utsnitt $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = -P \qquad \Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q = 0$

$$\Sigma M_{(x)} = 0 \Rightarrow M = Pv + P\frac{\theta L}{2}$$

$$v'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}v - \frac{P}{EI}\frac{\theta L}{2} \Rightarrow \underline{v'' + k^2 v = -k^2\frac{\theta L}{2}}$$

b) Knekningsbetingelse

$$v_p = Ax + B \quad \text{Innsatt} \quad k^2(Ax+B) = -k^2\frac{\theta L}{2} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{\theta L}{2} \end{cases}$$

$$v = C\sin kx + D\cos kx - \frac{\theta L}{2}$$

$$v' = Ck\cos kx - Dk\sin kx$$

Randbetingelser

1) $v(0) = 0 \Rightarrow D = \theta L/2$

2) $v'(0) = \theta \Rightarrow C = \theta/k$

3) $v'(L) = 0 \Rightarrow \theta\cos kL - \frac{\theta L}{2}k\sin kL = 0$

Knekn. bet.: $\underline{\underline{\tan kL = \frac{2}{kL}}}$

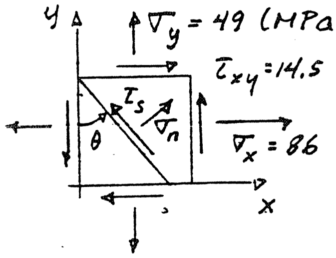
Gitt $P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(2.91L)^2} \Rightarrow kL = L\sqrt{\frac{P_{kr}}{EI}} = L\sqrt{\frac{\pi^2}{(2.91L)^2}} = 1.08$

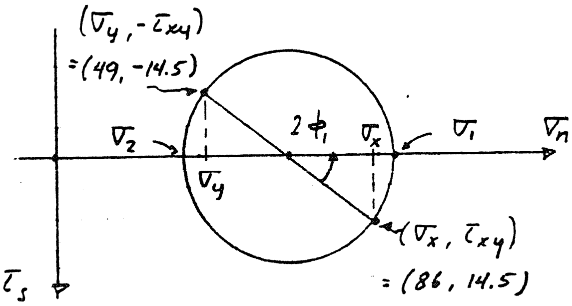
Venstreside $\tan kL = 1.87$
Høyreside $2/kL = 1.85$

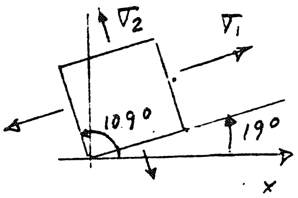
Tilnærmet like. Dvs. den oppgitte P_{kr} tilfredsstiller knekn. betingelsen

OPPGAVE 4

a) Spenninger







$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \left\{\begin{matrix}\underline{91.0 \text{ MPa}}\\ \underline{44.0 \text{ MPa}}\end{matrix}\right.$$

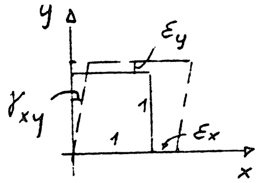
$$\tan 2\phi_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 0.784 \Rightarrow \underline{\underline{\phi_1 = 19.0°}}$$

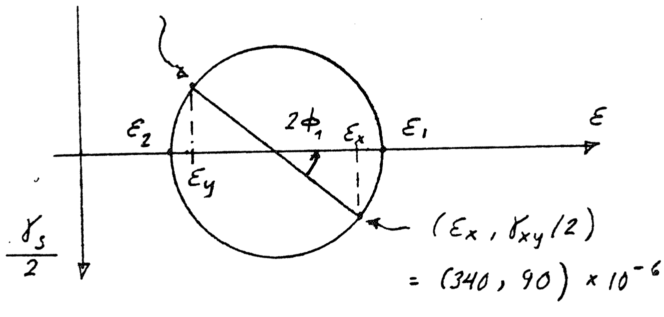
b) Koordinattøyninger

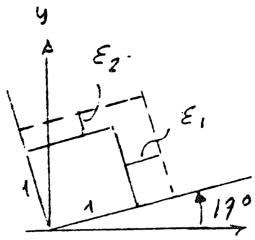
$E = 210\,000$ MPa , $\nu = 0.3$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = \underline{340 \cdot 10^{-6}}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} = \underline{110 \cdot 10^{-6}}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \underline{180 \cdot 10^{-6}}$$

c) Tøyninger







<u>Hovedtøyninger</u> (fra Mohr sirkel:)

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \left\{\begin{matrix}\underline{371 \cdot 10^{-6}}\\ \underline{79 \cdot 10^{-6}}\end{matrix}\right.$$

Element orientert i hovedretn.:

$\phi_1 = 19.0°$

$\phi_2 = 19 + 90 = 109°$

<u>Hovedretninger</u> (fra sirkel:)

$$\tan 2\phi_1 = \frac{\gamma_{xy}/2}{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)/2} = 0.783 \Rightarrow \underline{\underline{\phi_1 = 19.0°}}$$

Dvs. samme retning som funnet for hovedspenningene!