Løsningsforslag til eksamen i MEK4350 11/12–2017

Oppgave 1

a. Spekteret $S(\omega)$ har dimensjon m^2 s.

Anta spekteret beskriver en potenslov av typen $S(\omega) \propto \omega^{-\alpha}\gamma^{\beta}\rho^{\delta}$, da får vi følgende likningssett for eksponentene:

Masse: $\beta + \delta = 0$

Lengde: $-3\delta = 2$

Tid: $\alpha - 2\beta = 1$

Dette gir løsning $\alpha = 7/3$.

b. Dersom vannoverflaten har "skarpe kanter" kan vi ikke derivere overflatehevningen $\eta(\boldsymbol{x}, t)$ mer enn to ganger med hensyn på en av romkoordinatene (la oss si x) før en Dirac delta dukker opp. I så fall vet vi at Fourier transformen $\hat{\eta}(\boldsymbol{k}) \propto k_x^{-2}$.

Spekteret er proporsjonalt med kvadratet av Fourier transformen, så $S(\boldsymbol{k}) \propto k_x^{-4}$.

Dersom vi transformerer til polare koordinater $(k_x, k_y) \to (k, \theta)$ vil det dukke opp en Jacobideterminant k, så $S(k) \propto k^{-3}$.

Dersom vi antar dispersjonsrelasjonen $\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho}k^3$ så vil det dukke opp ytterligere en Jacobideterminant $\mathrm{d}k/\mathrm{d}\omega \propto \omega^{-1/3}$, så $S(\omega) \propto \omega^{-2}\omega^{-1/3} = \omega^{-7/3}$.

Vi fikk samme svar!

Oppgave 2

a. Vi kan skrive om

$$\eta(x,t) = A\cos(k_* x - \omega_* t + \Theta) = \frac{A}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_* x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_* t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_* x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_* t}\right)$$

og dersom dette skal skrives på formen

$$\eta(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\eta}_{n,m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_n x - \omega_n t)}$$

så ser vi ved inspeksjon at

$$\hat{\eta}_{n,m} = \frac{A}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\delta_{n,n_*}\delta_{m,m_*} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}\delta_{n,-n_*}\delta_{m,-m_*}\right)$$

b. Forventningen

$$\mu(x,t) = \mathrm{E}[\eta(x,t)] = \mathrm{E}[A]\,\mathrm{E}[\cos(k_* x - \omega_* t + \Theta)] = 0$$

fordi

$$\mathrm{E}[\cos(k_* x - \omega_* t + \Theta)] = \int_0^{2\pi} \cos(k_* x - \omega_* t + \theta)\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

c. Autokorrelasjonsfunksjonen

$$\begin{aligned} R(x+\xi, x, t+\tau, t) &= \mathrm{E}[\eta(x+\xi, t+\tau)\eta(x,t)] \\ &= \mathrm{E}[A^2]\,\mathrm{E}[\cos(k_*(x+\xi) - \omega_*(t+\tau) + \theta)\cos(k_* x - \omega_* t + \theta)] \\ &= \frac{\alpha^2}{6}\cos(k_*\xi - \omega_*\tau) \end{aligned}$$

fordi

$$\mathrm{E}[A^2] = \int_0^{\alpha} a^2 \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}a = \frac{\alpha^2}{3}$$

og

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}[\cos(k_*(x+\xi) - \omega_*(t+\tau) + \theta)\cos(k_* x - \omega_* t + \theta)] \\ &= \mathrm{E}[\cos^2(k_*x - \omega_*t + \theta)\cos(k_*\xi - \omega_*\tau) - \cos(k_*x - \omega_*t + \theta)\sin(k_*x - \omega_*t + \theta)\sin(k_*\xi - \omega_*\tau)] \\ &= \frac{1}{2}\cos(k_*\xi - \omega_*\tau) \end{aligned}$$

Prosessen er svakt stasjonær fordi $\mu(x,t) = \mu$ og $R(x+\xi, x, t+\tau, t) = R(\xi, \tau)$ ikke avhenger av absolutt rom og tid.

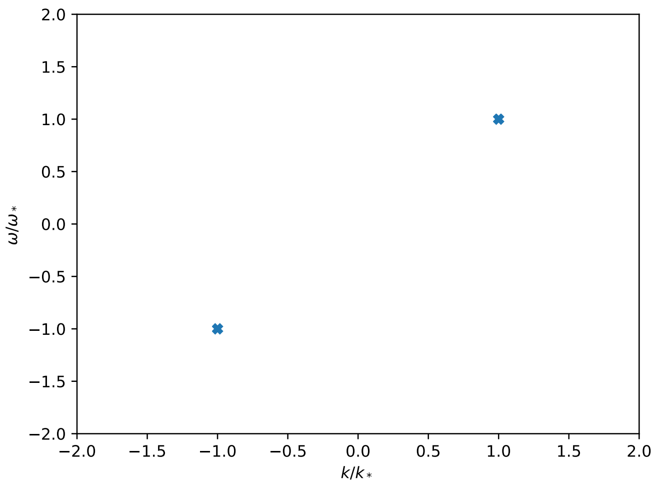
d. Effektspekteret er

$$\begin{aligned} F_{n,m} &= \frac{1}{\Delta k \Delta\omega}\frac{1}{LT}\int_0^T \int_0^L R(\xi,\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_n\xi - \omega_m\tau)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\alpha^2}{12\Delta k\Delta\omega}\left(\delta_{n,n_*}\delta_{m,m_*} + \delta_{n,-n_*}\delta_{m,-m_*}\right) \end{aligned}$$

Normaliseringskriteriet er oppfylt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{n,m}\Delta k\Delta\omega = R(0,0)$$

Skisse: To punkter i (k,ω)-planet som ligger symmetrisk rundt origo.



e. Vi regner først ut hva estimatoren er

$$\tilde{F}_{n,m} = \frac{A^2}{4\Delta k \Delta\omega} \left(\delta_{n,n_*}\delta_{m,m_*} + \delta_{n,-n_*}\delta_{m,-m_*}\right)$$

$\tilde{F}_{n,m}$ er forventningsrett da $\mathrm{E}[\tilde{F}_{n,m}] = F_{n,m}$ (husk at $\mathrm{E}[A^2] = \frac{\alpha^2}{3}$).
Variansen til estimatoren er

$$\mathrm{Var}[\tilde{F}_{n,m}] = \mathrm{E}[\tilde{F}^2_{n,m}] - (\mathrm{E}[\tilde{F}_{n,m}])^2$$

hvor

$$\mathrm{E}[\tilde{F}^2_{n,m}] = \frac{\alpha^4}{5\cdot 16(\Delta k\Delta\omega)^2} \left(\delta_{n,n_*}\delta_{m,m_*} + \delta_{n,-n_*}\delta_{m,-m_*}\right) = \frac{9}{5}F^2_{n,m}$$

fordi $\mathrm{E}[A^4] = \frac{\alpha^4}{5}$.
Følgelig har vi

$$\mathrm{Var}[\tilde{F}_{n,m}] = \frac{\alpha^4}{180(\Delta k\Delta\omega)^2} \left(\delta_{n,n_*}\delta_{m,m_*} + \delta_{n,-n_*}\delta_{m,-m_*}\right) = \frac{4}{5}F^2_{n,m}$$

Det er greit å bare regne ut variansen av estimatoren, eller eventuelt standardavviket, eller eventuelt å regne ut "Coefficient of Variation"

$$\frac{\sqrt{\mathrm{Var}[\tilde{F}_{n,m}]}}{\mathrm{E}[\tilde{F}_{n,m}]} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

som er mindre enn 1, så estimatoren fungerer bedre her enn den hadde gjort for en Gaussisk prosess.

f. Vi vet at prosessen har forventning 0 så det er tilstrekkelig å se på

$$\mathrm{E}[\eta^4(x,t)] = \mathrm{E}[A^4]\,\mathrm{E}[\cos^4(k_* x - \omega_* t + \Theta)] = \frac{\alpha^4}{5}\frac{3}{8}$$

så kurtosen er

$$\kappa = \frac{\mathrm{E}[\eta^4(x,t)]}{(\mathrm{Var}[\eta(x,t)])^2} = \frac{\frac{3\alpha^4}{5\cdot 8}}{\left(\frac{\alpha^2}{6}\right)^2} = 2.7$$

mindre enn 3 som den skulle ha vært dersom prosessen var Gaussisk.

Oppgave 3

a. Legg først merke til at oppgaveteksten spesifiserer at vi skal se på kammer og ikke overflatehevning. En kam med høyde η_c for en oscillasjon $\eta(\xi) = A\cos(\xi)$ forekommer når betingelsene $\eta'(\xi) = 0$ og $\eta''(\xi) < 0$ er oppfylt. Dette forekommer når $\xi = 2\pi n$ for heltall n, og vi får $\eta_c = A$.

Legg videre merke til at oppgaven spesifiserer at A er uniformt fordelt fra 0 til α, følgelig er A ikke Rayleigh fordelt!

Overskridelsessannsynlighet

$$P_e(z) = P\{\eta_c > z\} = \begin{cases} 1 & z < 0 \\ 1 - \frac{z}{\alpha} & 0 < z < \alpha \\ 0 & z > \alpha \end{cases}$$

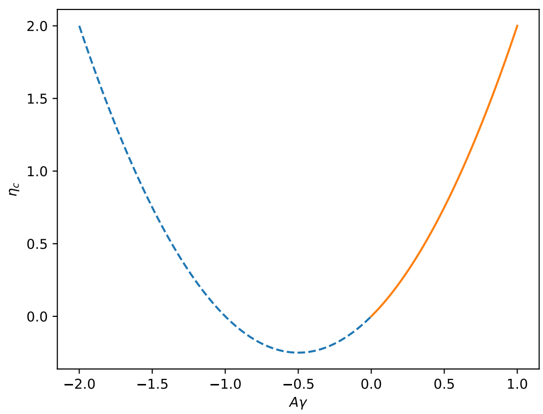
Skisse: Se på den heltrukne kurven i siste figur.

b. Legg først merke til at en kam med høyde η_c for en ikkelineær oscillasjon $\eta(\xi) = A\cos(\xi) + \gamma A^2\cos(2\xi)$ forekommer når betingelsene $\eta'(\xi) = 0$ og $\eta''(\xi) < 0$ er oppfylt. Dette forekommer når $\xi = 2\pi n$ for heltall n, og vi får $\eta_c = A + \gamma A^2$.

Merk: Det finnes én løsning til, for A veldig stor vil det kunne dannes lokale kammer på bunnen av bukene til den ledende ordens lineære oscillasjonen. Disse vil forekomme når $\xi = \pi + 2\pi n$ for heltall n, og vi får $\eta_c = -A + \gamma A^2$. Disse kan vi imidlertid trygt se bort fra fordi det ikkelineære bidraget er ment å være lite i forhold til det ledende ordens lineære bidraget.

Legg videre merke til at oppgaven stadig spesifiserer at A er uniformt fordelt fra 0 til α, følgelig er A ikke Rayleigh fordelt!

Se på figuren for kamhøyden $\eta_c = A + \gamma A^2$:



I denne figuren er det kun den heltrukne delen av kurven som er relevant, fordi den antatte fordelingen til A medfører at A ikke kan være negativ.

La oss regne ut terskelverdien for A som svarer til en ikkelineær terskelverdi for kamhøyden $\eta_c = z$,

$$\gamma A^2 + A - z = 0,$$

det gir

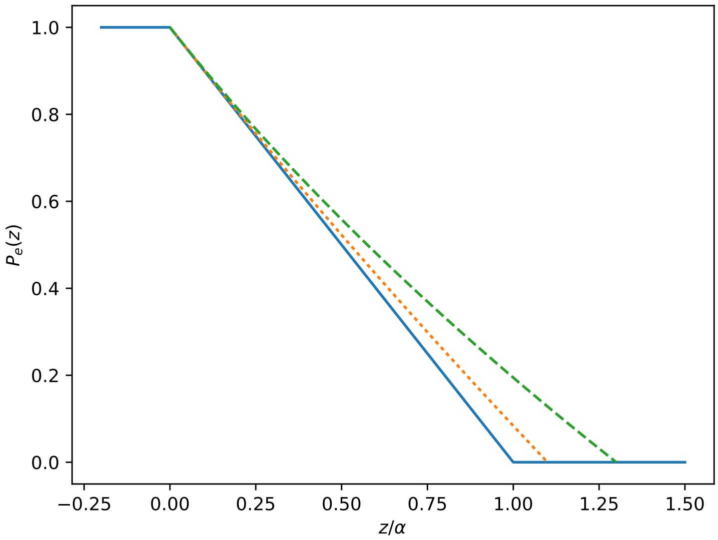
$$A = \frac{\sqrt{1 + 4\gamma z} - 1}{2\gamma}$$

hvor vi har valgt det positive fortegnet foran kvadratrota fordi $A \geq 0$ som diskutert ovenfor.

Da får vi

$$\begin{aligned} P_e(z) = P\{\eta_c > z\} = P\{A > \frac{\sqrt{1+4\gamma z}-1}{2\gamma}\} \\ = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{1+4\gamma z}-1}{2\gamma\alpha} & z < \alpha(1+\gamma\alpha) \\ 0 & z > \alpha(1+\gamma\alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

Skisse: Tayfun-kurven ligger over og til høyre for ledende ordens kurve.



I denne figuren er den heltrukne kurven den lineære løsningen ($\gamma = 0$), den prikkete kurven tilsvarer $\gamma\alpha = 0.1$, og den strekete kurven tilsvarer $\gamma\alpha = 0.3$.