MEK 4540 – 2010

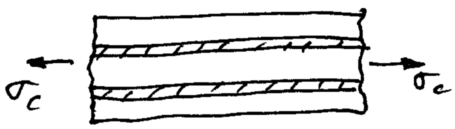
Oppgave 1

a) Hva man bør ta hensyn til:

- Produktets form og størrelse
- Produksjonsvolumet (hvor mange som skal produseres)
- Hvor gode eller konsistente mekaniske egenskaper som kreves
- Hva slags krav man har til overflate-finish.
- Krav til SHM, f.eks. utslipp til luften, helse med tanke på operatørene.
- Kostnader – utstyr, driftsmaterialer, bemanning, osv.

Kan velge mellom ca. 8 produksjonsmetoder som er blitt beskrevet på forelesningene. Besvarelsen bør bestå av både beskrivelse og fordeler/ulemper med tanke på listen ovenfor.

b) For E_L:



Spenning σ_c påføres i fiberretningen:

$$\text{kraft} = \sigma_c A = \sigma_f V_f A + \sigma_m (1-V_f) A$$

A = tverrsnittsarealet

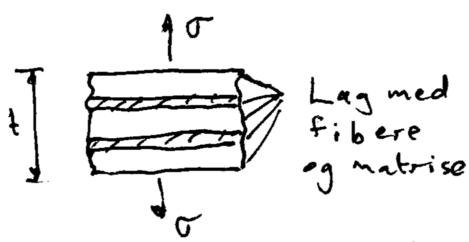
Fibrene og matrisen utsettes for samme tøyning ϵ.

Ligningen deles på $A\epsilon$:

$$\frac{\sigma_c}{\epsilon} = \frac{\sigma_f V_f}{\epsilon} + \frac{\sigma_m}{\epsilon}(1-V_f) A$$

$$\underline{\underline{E_L = E_f V_f + E_m (1-V_f)}}$$

For E_T:



Alle lagene utsettes for samme spenning σ.

Total utvidelse i T-retningen $= \epsilon_c t$

$$= \epsilon_f (V_f t) + \epsilon_m (1-V_f) t$$

Ligningen deles på σt:

$$\frac{\epsilon_c}{\sigma} = \frac{\epsilon_f}{\sigma} V_f + \frac{\epsilon_m}{\sigma}(1-V_f)$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{(1-V_f)}{E_m}}}$$

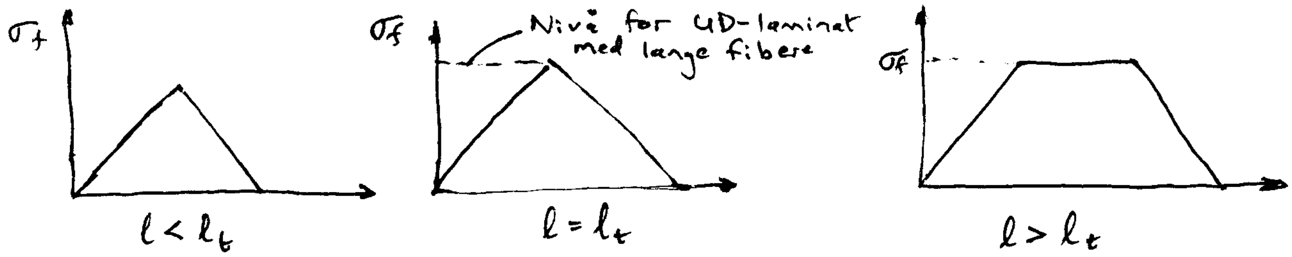
Antagelsene for E_L: Kontinuerlige, parallelle fibere, perfekt heft mellom fiberene og matrisen. Disse antagelsene pleier å være gode og formelen gir god nøyaktighet.

Antagelsene for E_T: Kompositten kan betraktes som separate, uniforme lag med fibere og matrise. Virkeligheten er annerledes, med ujevn spenningsfordeling. Gir kun et grovt estimat. Halpin-Tsai-ligningene gir bedre resultater. (Perfekt heft antas også)

Man kunne nevne også at disse utlignene ser bort fra voids.

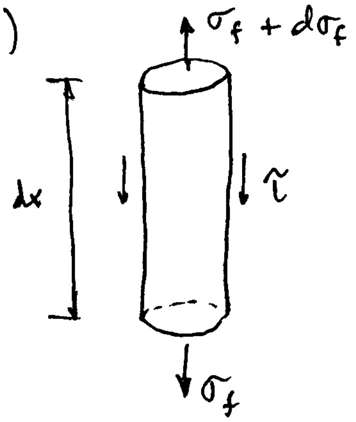
c) Lastoverføringslengden l_t: Den minste fiberlengden slik at spenningen i fibrene bygger seg opp til det samme nivået som i kontinuerlige fibere under samme belastning.

Fordeling av fiberspenning σ_f langs fiberene ser slik ut:



Kritisk fiberlengde l_c: Den minste fiberlengden som kan ta opp bruddlasten for fiberene, dvs. tilfellet med $l = l_t$ hvor $\sigma_f = \sigma_{fu}$.

d)



Kraftlikevekt gir:

$$\left(\sigma_f + d\sigma_f - \sigma_f\right)\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \tau \pi d dx = 0$$

$$\frac{d\sigma_f}{dx} = \frac{4\tau}{d}$$

Vi antar at matrisen er "perfectly plastic" slik at

$$\tau = \tau_y$$

og at $\sigma_f = 0$ ved fiberens ende, $x = 0$.

Da er $\int_0^x d\sigma_f = \int_0^x \frac{4\tau_y}{d}\, dx$

Dette gir $\sigma_f = \frac{4\tau_y}{d} x$

og tøyningen $\epsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{4\tau_y}{d \cdot E_f} x$

I en langfiberkompositt har vi $\epsilon_f = \epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c}$

Disse blir like når $\frac{4\tau_y}{d \cdot E_f} x = \frac{\sigma_c}{E_c}$

dvs. $x = \frac{E_f}{E_c} \cdot \frac{d \cdot \sigma_c}{4\tau_y}$

Dette er fiberlengden som trengs for å bygge opp til samme spenning som i et langfiberkompositt, fra en ende langs fiberen. Samme lengde trengs fra den andre enden, slik at $l_t = 2 \times$ denne lengden:

$$l_t = \frac{E_f}{E_c} \frac{d\,\sigma_c}{2\tau_y}.$$

dvs. $\frac{l_t}{d} = \frac{E_f}{E_c} \frac{\sigma_c}{2\tau_y}$.

Oppgave 2

DEL A

a) $$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.803 & 2.111 & 0 \\ -2.109 & 111.1 & 0 \\ 0 & 0 & 303.0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} (MPa)^{-1}$$

$$[Q] = [S]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1479 & 0.00281 & 0 \\ 0.00281 & 0.00905 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00330 \end{bmatrix} \times 10^{6} \text{ MPa}$$

$$= \begin{bmatrix} 147.9 & 2.81 & 0 \\ 2.81 & 9.05 & 0 \\ 0 & 0 & 3.30 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

b) For 90° lag kan vi bytte L- og T-retninger:

$$[\bar{Q}]_{90} = \begin{bmatrix} 9.05 & 2.81 & 0 \\ 2.81 & 147.9 & 0 \\ 0 & 0 & 3.30 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

(kunne også bruke T-matrisen)

c) A-matrisen bygges opp ved å summere opp $2 \times 0°$-lag + $2 \times 90°$-lag, gitt at $[\bar{Q}]_0 \equiv [Q]$ som gitt i del a), og gange med t.

$$[A] = \begin{bmatrix} 40.80 & 1.459 & 0 \\ 1.459 & 40.80 & 0 \\ 0 & 0 & 1.716 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{GPa} \times \text{mm} \\ = \times 1000 \text{ N/mm} \end{matrix}$$

d) $$\{\epsilon^0\} = \begin{Bmatrix} 1500 \\ -400 \\ 700 \end{Bmatrix} \times 10^{-6}, \quad \{N\} = [A]\{\epsilon^0\} = \begin{Bmatrix} 60.6 \\ -14.13 \\ 1.20 \end{Bmatrix} \text{ N/mm}$$

e) For å finne E-modulen påfører vi laminatet en last

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} 0.52 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ N/mm}$$ (som tilsvarer $\sigma_x = 1$ MPa med $t = 0.13 \times 4$ mm)

og løser $\{\epsilon^0\} = [A]^{-1}\{N\} \rightarrow \{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} 12.76 \\ -0.457 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-6}$

Så er $E_x = \dfrac{1\text{ MPa}}{12.76 \times 10^{-6}} = 78.36$ GPa

DEL B

Siden $\epsilon_{TU} = 0.005$ og $\epsilon_{LU} = 0.015$ ser vi at det er 90°-lagene som først får brudd og at dette skjer når $\epsilon_x = \epsilon_{TU} = 0.005$.

Dette tilsvarer $\sigma = 1\text{MPa} \times \dfrac{0.005}{12.76 \times 10^{-6}} = 392$ MPa.

Dette blir strekkbrudd i matrisen på tvers av fiberene.

Oppgave 3

DEL A

a) • Stor bøyestivhet (i forhold til vekten)
• Stor styrke i bøyning (- - - -)
• Glatte overflater begge sider siden det ikke er behov for avstivning. Dette fører bl.a. til enklere vedlikehold.
• Muligens også termisk isolering, avhengig av kjernematerialet og anvendelse.

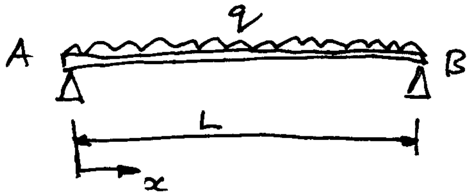
b) • Global knekning (generelt sett en blanding av bøyning og skjær). Knekning med kun bøyning og kun skjær (shear crimping) er begge ekstreme tilfeller når den ene eller den andre type deformasjon er dominerende. (Mulig diskusjon om forholdene for disse.)
• Lokal knekning av skall: face sheet wrinkling (med noen varianter) og dimpling i tilfelle honeycombkjerne.

DEL B

a) Skjærtøyningene kan deles opp i to komponenter — den som gir transversal forskyvning w_s og den som kun gir relativ bevegelse av skallene parallelt med bjelkens akse. γ_0-leddet er den siste. $\gamma_0 = 0$ dersom en eller begge endene av bjelken er fast innspent eller både randbetingelser, selve bjelken og lasten er symmetriske.

b) $M_x = (-)\, D \dfrac{d^2 w_b}{dx^2}$ der D = bøyestivheten tilsvarende EI.

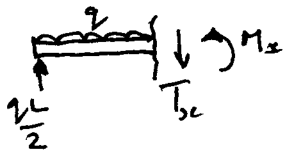
DEL C

a) 

Partielle forskyvninger:

$$w = w_b + w_s$$

fra bøyning — fra skjærdeformasjon



$$M_x = -D w_b'' = q\frac{L}{2}x - q\frac{x^2}{2} \qquad (1)$$

$$T_x = S w_s' = q\frac{L}{2} - qx \qquad (2)$$

(1) integreres:

$$-D w_b' = \frac{q}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 L - \frac{1}{3}x^3\right) + C_1$$

$$-D w_b = \frac{q}{2}\left(\frac{1}{6}x^3 L - \frac{1}{12}x^4\right) + C_1 x + C_2$$

Randbetingelser: $w_b(0)=0 \rightarrow C_2=0$

$w_b(L)=0 \rightarrow 0=\frac{q}{2}\cdot\frac{1}{12}L^4+C_1L$

$C_1=-\frac{1}{24}qL^3$

Så er
$$w_b=\frac{1}{D}\left[-\tfrac{q}{2}\left(\tfrac{1}{6}x^3L-\tfrac{1}{12}x^4\right)+\tfrac{1}{24}qL^3x\right]$$
$$=\frac{qx}{24D}\left(L^3-2Lx^2+x^3\right)$$

(2) integreres: $Sw_s=\frac{qLx}{2}-\frac{1}{2}qx^2+C_3$

Randbetingelser: $w_s(0)=0 \rightarrow C_3=0$

Så er $w_s=\frac{1}{2}\frac{qx}{S}(L-x)$. (Dette tilfredsstiller også $w_s(L)=0$, som en konsekvens av at vi antok symmetri.)

Bidragene kombineres:
$$w=w_b+w_s$$
$$=\frac{qx}{24D}\left[\left(L^3-2Lx^2+x^3\right)+\frac{12D}{S}(L-x)\right]$$
$$=\frac{qx(L-x)}{24D}\left[\left(L^2+Lx-x^2\right)+\frac{12D}{S}\right]$$

Ved bjelkens midtpunkt har vi:
$$\delta=w(L/2)=\frac{q(L/2)^2}{24D}\left[\left(L^2+Lx-x^2\right)+\frac{12D}{S}\right]$$
$$=\frac{qL^2}{96D}\left(\frac{5}{4}L^2+\frac{12D}{S}\right)$$
$$=\frac{5qL^4}{384D}\left(1+\frac{48}{5}\frac{D}{SL^2}\right)$$

b) Hvis ende A blir fast innspent er bjelken statisk ubestemt og ikke lenger symmetrisk. Nå er det 2 ukjente reaksjonskrefter og en ukjent reaksjonsmoment, men kun 2 uavhengige likevektsligninger. I tillegg får vi noen ukjente integrasjonskonstanter:

– Når vi integrerer w_b'' to ganger for å gi oss w_b får vi 2 konstanter
– Når vi integrerer w_s' en gang for å gi oss w_s får vi 1 konstant
Men den siste kan kombineres med en av konstantene fra w_b når vi kombinerer $w_b + w_s$ så vi har følgende ukjente:

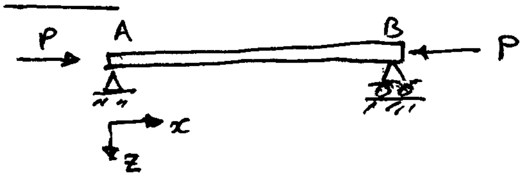
- 2 reaksjonskrefter + 1 reaksjonsmoment
- 2 integrasjonskonstanter

} 5 ukjente.

Disse kan finnes ved å bruke 2 uavhengige likevektsligninger samt følgende randbetingelser:

$$\left.\begin{aligned} w(0) &= w_b(0) + w_s(0) = 0 \\ w_b'(0) &= 0 \\ w(L) &= w_b(L) + w_s(L) = 0 \end{aligned}\right\}$$

DEL D



a) Partielle forskyvninger: $w = w_b + w_s$

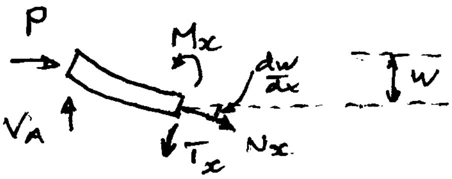
$$\rightarrow \quad w'' = w_b'' + w_s''$$

Fra tidligere har vi: $T_x = S\left(w_s' + \gamma_0 \frac{t_c}{d}\right)$ og $M_x = -D w_b''$

slik at $w'' = -\frac{M_x}{D} + \frac{dT_x}{dx} \cdot \frac{1}{S}$ (siden γ_0 = konstant)

dvs: $\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_x}{D} + \frac{1}{S}\frac{dT_x}{dx}$

Vi finner uttrykk for M_x og T_x ved å betrakte en del av bjelken fra A til avstand x. Likevekt gir:



$M_x = Pw + V_A$ hvor $V_A = 0$ pga global likevekt

og $T_x = P \sin\left(\frac{dw}{dx}\right) = P\frac{dw}{dx}$

Dvs $M_x = Pw$ og $T_x = P\frac{dw}{dx}$ (merk at $T_x = \frac{dM_x}{dx}$)

b) Nå har vi $\quad \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{P}{D}w + \frac{1}{S}P\frac{d^2w}{dx^2}$

$$\left(\frac{S-P}{S}\right)\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{P}{D}w = 0$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{SP}{D(S-P)}w = 0$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} + a^2w = 0 \quad \text{hvor} \quad a^2 = \frac{P}{D}\left(\frac{S}{S-P}\right)$$

Total løsningen er $\quad w = A\sin(ax) + B\cos(ax)$

Randbetingelser: $\quad w=0$ ved $x=0 \rightarrow B=0$

$w=0$ ved $x=L \rightarrow A\sin(aL)=0$

Da er enten $A=0$ (ingen forskyvning)

eller $\sin(aL)=0$, dvs. $aL = n\pi$, $n=1,2,3\ldots$

For å få knekning må vi derfor ha $aL = n\pi$, $\quad n=1,2,3\ldots$

dvs $\quad a^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{P}{D}\left(\frac{S}{S-P}\right)$

$$D(S-P)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = PS$$

$$P\left[S + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D\right] = DS\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

så $\quad P_{cr} = \dfrac{DS\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{S + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D}$

Laveste verdi er gitt ved $n=1$

så $\quad P_{cr} = \dfrac{DS(\pi/L)^2}{S+(\pi/L)^2D} = \dfrac{\pi^2 D}{L^2 + \pi^2 D/S}$

c) Vi skriver dette om til $\quad P_{cr} = \dfrac{\pi^2 D/L^2}{1 + \pi^2 D/L^2 S}$

Når $D/SL^2 \rightarrow 0$: $P_{cr} \rightarrow \pi^2 D/L^2$ = Euler-lasten for en fritt opplagt søyle med lengde L, dvs. vi har kun bøyning.

Når $D/SL^2 \rightarrow \infty$: $P_{cr} \rightarrow S$ = last for "shear crimping" – ingen bøyning og ren skjærdeformasjon.