# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | ST101 — Innføring i statistikk og sannsynlighetsregning. |
| Eksamensdag: | Mandag 2. desember 2002. |
| Tid for eksamen: | 09.00 – 15.00. |
| Oppgavesettet er på 3 sider. | |
| Vedlegg: | Tabell over standard normal-fordelingen. |
| Tillatte hjelpemidler: | Formelsamlinger for ST100 og ST101, lommeregner, Haugens "Formler og tabeller," Jahren og Knutsens "Formelsamling i matematikk," Rottmanns "Mathematische Formelsammlung." |

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

## Oppgave 1.

Radioaktiv spalting skjer ofte i flere steg; for eksempel spaltes uran (238) i torium (234) (og en alfa-partikkel), og denne spaltes videre i protactinium (234) (og en beta-partikkel). I denne oppgaven skal vi se på en spalting $A \to B$ (prosess 1), og en videre spalting $B \to C$ (prosess 2).

a) La $T_1$ være tid til spalting i prosess 1. Fysikere opererer med det som kalles halveringstid $\tau_1$ for en slik prosess, og skriver: $P(T_1 > t) = 2^{-\frac{t}{\tau_1}}$ $(t > 0)$. Vis at $\tau_1$ blir medianen i fordelingen til $T_1$.

b) Vis at $T_1$ blir eksponensialfordelt (tetthetsfunksjon $\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$ for $t > 0$). Finn $\lambda_1$, $E(T_1)$ og $\mathrm{Var}(T_1)$ uttrykt ved $\tau_1$.

c) Prosess 2 har tid til spalting $T_2$, som er eksponensialfordelt med parameter $\lambda_2$. Vi vet at $T_1$ og $T_2$ er uavhengige. Finn forventning og varians til $T = T_1 + T_2$.

*(Fortsettes side 2.)*

d) Finn tetthetsfunksjonen til $T = T_1 + T_2$.

e) Anta at prosessen starter med $n$ partikler i tilstand $A$. La $X$ være antall partikler i tilstand $C$ ved tid $t = t_0$. Hvilken fordeling har $X$?

# Oppgave 2.

Et elektron har den egenskapen at spinnkomponenten langs en fast akse alltid tar en av verdiene $-1$ eller $+1$ (i passende enheter), med sannsynlighet $\frac{1}{2}$ på hver verdi.

Se på $n$ uavhengige elektroner, og la $X_i$ være spinnkomponenten langs en gitt akse for elektron nr. $i$.

a) Finn forventning og varians for $X_i$ og for $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

b) Finn momentgenererende funksjon for $X_i$ og for $\bar{X}$. Bruk dette til å kontrollere svarene i a).

c) La $n = 100$, og finn en tilnærmet verdi for sannsynligheten for at $\bar{X}$ blir større enn 0.2. Begrunn de hjelperesultatene du bruker. Finn også for $n = 100$ en tilnærmet verdi for sannsynligheten for at $\bar{X}$ enten blir mindre enn $-0.3$ eller større enn 0.1.

d) Vis at hver variabel $Z_i = \frac{1}{2}(X_i + 1)$ er bernoulli-fordelt (det vil si binomisk fordelt med $n = 1$) med parameter $\frac{1}{2}$, og bruk dette til å vise at variabelen $U = \frac{n}{2}(\bar{X} + 1)$ er binomisk fordelt med parametre $n$ og $\frac{1}{2}$.

e) Bruk resultatet i d) til å finne punktsannsynlighetene til $\bar{X}$ når $n = 3$.

# Oppgave 3.

Tvillingpar kan enten være eneggede eller toeggede. I Nord-Europa er sannsynligheten for at et tvillingpar skal være toegget omtrent lik 0.7. Denne verdien benyttes i denne oppgaven

I et enegget tvillingpar er de to tvillingene alltid av samme kjønn. Gå ut fra at sannsynligheten for to jenter ved enegget tvillingfødsel er 0.49.

Ved toegget tvillingfødsel er kjønnet til den ene tvillingen uavhengig av kjønnet til den andre, og sannsynligheten for at en bestemt av tvillingene er jente, er 0.49.

a) Hva er sannsynligheten for to gutter ved enegget tvillingfødsel?

b) Hva er sannsynligheten for at begge tvillingene i et tvillingpar er gutter? Hva er sannsynligheten for at tvillingparet består av en jente og en gutt?

*(Fortsettes side 3.)*

c) Begge tvillingene i et tvillingpar er jenter. Hva er sannsynligheten for at dette er et enegget tvillingpar?

d) På en skole går det fem tvillingpar hvor begge tvillingene er av samme kjønn. Hva er sannsynligheten for at minst ett av disse er toegget?

# Oppgave 4.

a) La $X$ og $Z$ være uavhengige stokastiske variable og definer $Y = X - Z$. Uttrykk $\mathrm{Cov}(X, Y)$ og $\mathrm{Cov}(Z, Y)$ ved hjelp av $\mathrm{Var}(X)$ og $\mathrm{Var}(Z)$.

Finn også uttrykk for $\rho_{XY}$ = korrelasjonen mellom $X$ og $Y$ og $\rho_{ZY}$ = korrelasjonen mellom $Z$ og $Y$ ved $\mathrm{Var}(X)$ og $\mathrm{Var}(Z)$. Hvilke verdier kan $\rho_{XY}$ og $\rho_{ZY}$ anta?

b) Anta at parene $(X_i, Y_i)$, $i = 1, \ldots, n$ er uavhengige og har samme simultanfordeling med $\mu_X = E(X)$, $\mu_Y = E(Y)$, $\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X)$, $\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y)$. Begrunn estimatorene

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{for} \quad \mu_X$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad \text{for} \quad \mu_Y$$

$$\widehat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 \qquad \text{for} \quad \sigma_X^2$$

$$\widehat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \bar{Y}^2 \qquad \text{for} \quad \sigma_Y^2$$

ved momentprinsippet.

c) Vis at $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ er forventningsrett for $\mu_{XY} = E(X_i Y_i)$ og finn på denne bakgrunn momentestimatorene for $\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X_i, Y_i)$ og korrelasjonen $\rho$ mellom $X_i$ og $Y_i$.

SLUTT