UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK1100 — Sannsynlighetsregning og statistisk modellering.
Eksamensdag:	Onsdag 9. juni 2004.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Standardnormalfordelingstabell.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent lommeregner og Formelsamling for STK1100 og STK1110.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Tenk deg at du kaster to terninger. La X være antall seksere du får, og la Y angi hvor mange av terningene der antall øyne er et partall. Hvis du for eksempel får sekser på en av terningene og treer på den andre, blir $X = 1$ og $Y = 1$. Hvis du får to femmere, blir $X = 0$ og $Y = 0$.

a) Forklar at den simultane punktsannsynligheten $P(X = x, Y = y)$ er gitt ved tabellen:

	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$y = 0$	$\frac{9}{36}$	0	0
$y = 1$	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	0
$y = 2$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

b) Bestem de marginale punktsannsynlighetene til X og Y.
Er X og Y uavhengige?

c) Bestem den betingede punktsannsynligheten til X gitt $Y = 2$, og finn $E(X \mid Y = 2)$.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

La X være årsinntekten til en tilfeldig valgt person i en befolkningsgruppe. Det er vanlig å anta at X er Pareto-fordelt, det vil si at X har sannsynlighetstettheten

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta\kappa^\theta x^{-\theta-1} & \text{for} \quad x > \kappa \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \tag{1}$$

Her er κ minsteinntekten i den befolkningsgruppen vi betrakter, mens $\theta > 2$ er en parameter som avhenger av lønnsforskjellene i gruppen.

a) Vis at den kumulative sannsynlighetsfordelingen til X er gitt ved

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \kappa^\theta x^{-\theta} & \text{for} \quad x > \kappa \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vis også at median årsinntekt er $2^{1/\theta}\kappa$.

b) Vis at

$$E(X) = \frac{\theta\kappa}{\theta - 1} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{\theta\kappa^2}{(\theta-1)^2(\theta-2)}$$

I resten av oppgaven vil vi se på en befolkningsgruppe der $\kappa = 200\,000$ kroner og $\theta = 2.5$.

c) Beregn median årsinntekt og forventet årsinntekt når $\kappa = 200\,000$ kroner og $\theta = 2.5$. Hvilken av disse størrelsene gir etter din mening best uttrykk for den "typiske årsinntekten"? Svaret skal begrunnes!

Vi lar nå $X_1, X_2, \ldots, X_{50}$ være årsinntektene for et tilfeldig utvalg på 50 personer fra den aktuelle befolkningsgruppen. Disse stokastiske variablene er uavhengige, og de har alle sannsynlighetstettheten (1) med $\kappa = 200\,000$ kroner og $\theta = 2.5$.

d) La $S = \sum_{i=1}^{50} X_i$. Finn forventningen og standardavviket til S.

e) Bestem tilnærmet sannsynligheten for at de 50 personene til sammen vil tjene minst 20 millioner kroner i løpet av ett år.

Oppgave 3.

La X og Y være to stokastiske variabler som har simultan kumulativ fordelingsfunksjon

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y-\alpha xy} & \text{for } x > 0 \text{ og } y > 0 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \tag{2}$$

der $0 \leq \alpha < 1$.

(Fortsettes side 3.)

a) Vis at den simultane sannsynlighetstettheten til X og Y er gitt ved

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} (1-\alpha+\alpha x+\alpha y+\alpha^2 xy)\, e^{-x-y-\alpha xy} & \text{for } x>0 \text{ og } y>0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

b) Vis at den marginale sannsynlighetstettheten til X er

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x>0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

dvs. at X er eksponentialfordelt med parameter $\lambda = 1$.

c) Forklar at også Y er eksponentialfordelt med parameter 1.
For hvilken verdi av α er X og Y uavhengige?

Et lite teknisk system består av to komponenter. De to komponentene er koblet i serie, slik at systemet fungerer så sant begge komponentene fungerer. Hvis X og Y er levetidene til de to komponentene, og T er levetiden til systemet, har vi derfor at $P(T > t) = P(X > t, Y > t)$.

Vi vil anta at den simultane kumulative fordelingen til levetidene til komponentene er gitt ved (2).

d) Finn sannsynlighetstettheten til T.

SLUTT