STK1100: Kombinatorikk

Januar 2009

Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Uniform sannsynlighetsmodell:

Et stokastisk forsøk har *N* utfall
Det er de *mulige utfallene* for forsøket

Vi antar at de *N* utfallene er *like sannsynlige*

Da har hvert utfall sannsynlighet 1/*N*

En begivenhet *A* består av *n* utfall
Det er de *gunstige utfallene* for begivenheten *A*

Sannsynligheten for begivenheten *A* er

$$\boxed{P(A) = \frac{n}{N} = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}}$$

For å bruke en uniform sannsynlighetsmodell må vi finne antall mulige og antall gunstig utfall

I enkle situasjoner som kast med to terninger kan vi skrive opp alle mulige utfall og alle utfall som er gunstige for den begivenheten vi er interessert i

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

"Sum sju øyne"

I Lotto er det over 5 millioner mulige vinnerrekker

Vi må være veldig tålmodige for å skrive opp alle disse!

Vi må derfor kunne beregne antall mulige vinnerrekker uten å skrive dem opp

Kombinatorikk er navnet på den delen av matematikken som gir oss løsningen på dette og liknende problemer

Multiplikasjonssetningen

Eksempel 1: På en meny er det:
- 4 forretter
- 10 hovedretter
- 5 desserter

På hvor mange måter kan vi sette sammen et måltid med én forrett, én hovedrett og én dessert?

Måltidet kan settes sammen på $4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$ måter

Ovenfor har vi tre "forsøk":
(i) valg av forrett
(ii) valg av hovedrett
(iii) valg av dessert

Generelt har vi *multiplikasjonssetningen:*

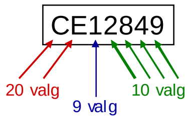
Vi har *k* forsøk.
I det første forsøket er det n_1 mulige utfall,
i det andre forsøket er det n_2 mulige utfall, … ,
i siste forsøket er det n_k mulige utfall.
Da er det til sammen

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$$

mulige utfall

Eksempel 2:
Et bilnummer består av to bokstaver og 5 siffer

Hvor mange bilnummere kan vi lage?



Vi kan lage

$$20 \cdot 20 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 36\,000\,000$$

forskjellige bilnummer

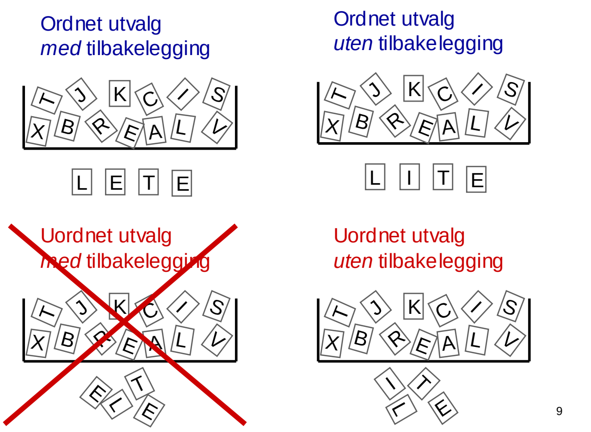
Ulike typer utvalg

Vi skriver bokstavene i alfabetet på hver sin lapp og legger de 29 lappene i en eske

Vi trekker så fire lapper, én etter én.
Vi sier at vi trekker et *utvalg* på fire bokstaver

Hvis vi legger en lapp tilbake før vi trekker den neste, trekker vi *med tilbakelegging*
Hvis vi *ikke* legger lappen tilbake, trekker vi *uten tilbakelegging*

Hvis rekkefølgen bokstavene trekkes i har betydning, trekker vi et *ordnet utvalg*
Hvis rekkefølgen *ikke* har betydning, trekker vi et *uordnet utvalg*



Ordnet utvalg med tilbakelegging

Se på bokstaveksempelet

Hver gang vi trekker er det 29 bokstaver å velge mellom

Vi kan velge de fire bokstavene på

$$29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = 707281$$

forskjellige måter når vi tar hensyn til rekkefølgen

Generelt har vi en mengde med n elementer

Vi velger k elementer fra mengden med tilbakelegging

Vi kan lage

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k\ ganger} = n^k$$

ordnede utvalg

Eksempel 3:
På en tippekupong er det gitt 12 kamper

For hver kamp skal en tippe H, U eller B

Hvor mange forskjellige tipperekker kan vi lage?

Vi kan lage

$$3 \cdot 3 \cdots 3 = 3^{12} = 531441$$

forskjellige tipperekker

Ordnet utvalg uten tilbakelegging

Se igjen på bokstaveksempelet.

- Første gang er det 29 bokstaver å velge mellom
- Andre gang er det 29-1 bokstaver å velge mellom
- Tredje gang er det 29-2 bokstaver å velge mellom
- Fjerde gang er det 29-3 bokstaver å velge mellom

Vi kan velge de fire bokstavene på

$$29 \cdot (29-1) \cdot (29-2) \cdot (29-3) = 570024$$

forskjellige måter når vi tar hensyn til rekkefølgen

Generelt har vi en mengde med n elementer

Vi velger k elementer fra mengden uten tilbakelegging

Vi kan lage

$$P_{k,n} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ faktorer}}$$

ordnede utvalg (eller permutasjoner)

Eksempel 4:
Landslagstreneren i langrenn for menn har sju løpere å velge mellom til OL-stafetten for menn over 4x10 km

På hvor mange måter kan han sette opp stafett-laget når vi tar hensyn til hvem som skal gå de ulike etappene?

Treneren kan sette opp stafettlaget på

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

måter

Vi har fortsatt en mengde med n elementer, og vi velger k elementer fra mengden uten tilbakelegging

Når $k = n$ velger vi alle elementene.

Da svarer et ordnet utvalg til en bestemt rekkefølge (eller permutasjon) av de n elementene

Det er

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

slike rekkefølger

Eksempel 5:
Vi ser på eksempelet med stafettlaget. Treneren har bestemt seg for hvilke fire løpere som skal gå stafetten

Hvor mange lagoppstillinger kan han da velge mellom?

Treneren kan velge mellom

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

lagoppstillinger

Eksempel 6:
I en klasse er det 23 elever

Hva er sannsynligheten for at minst to har samme fødselsdag?

Vi regner først ut sannsynligheten for at ingen har samme fødselsdag

Antall mulige ordnede utvalg: 365^{23}

Antall gunstige ordnede utvalg: $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 343$

$$P(\text{ingen samme fødselsdag}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 343}{365^{23}} = 0.493$$

$$P(\text{minst to samme fødselsdag}) = 1 - 0.493 = 0.507$$

Uordnet utvalg uten tilbakelegging

Vi ser på stafetteksempelet

På hvor mange måter kan treneren velge ut de 4 som skal gå stafetten (blant de 7) når vi *ikke* bryr oss om hvem som skal gå de ulike etappene?

La x være antall måter han kan gjøre det på

Merk at x er antall *uordnede* utvalg av 4 løpere blant 7 når utvelgingen skjer uten tilbakelegging

Vi vil bestemme x ved å finne antall *ordnede* utvalg på to måter

19

Antall ordnede utvalg av 4 løpere blant 7 løpere er $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$ (jf. eksempel 4)

Fra ett uordnet utvalg kan lage $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$ ordnede utvalg (jf. eksempel 5)

Vi kan derfor lage $x\cdot 4!$ ordnede utvalg

Dermed er $x\cdot 4! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4$

Dette gir $x = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4!} = 35$

Treneren kan velge ut de som skal gå stafetten på 35 måter når vi ikke bryr oss om hvem som skal gå de ulike etappene

20

Generelt har vi en mengde med n elementer

Vi velger k elementer fra mengden uten tilbakelegging

Vi kan lage

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

uordnede utvalg

NB! For uordnet utvalg spiller det ingen rolle om vi velger ett element om gangen, eller om vi velger alle på en gang

21

Merk at

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{k!\qquad (n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-k)!}$$

Formelen gjelder også for $r = 0$ og $r = n$ siden vi setter $0! = 1$

Enkelte ganger skriver vi $C_{k,n}$ i stedet for $\binom{n}{k}$ (f.eks. lommeregnere)

$\binom{n}{k}$ kalles *binomialkoeffisienter* (siden de inngår i binomialformelen)

22

Eksempel 8:

En klasse har 25 elever

Fire elever skal velges til en festkomité

Hvor mange måter kan det gjøres på?

De 4 elevene kan velges på

$$\binom{25}{4} = \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 12650$$

måter

23

Eksempel 9:

Når du tipper én lottorekke, krysser du av sju tall fra 1 til 34

Hvor mange lotto-rekker fins det?

Det fins

$$\binom{34}{7} = \frac{34\cdot 33\cdot 32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 5379616$$

forskjellige lottorekker

24

Eksempel 10:

En pokerspiller får delt ut fem kort

Hva er sannsynligheten for at spilleren bare får hjerter?

Antall mulige måter å dele ut fem kort på:

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2598960$$

Antall av disse som gir bare hjerter:

$$\binom{13}{5} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1287$$

$$P(\text{bare hjerter}) = \frac{1287}{2598960} = 0.0005$$

25