UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK1100 — Sannsynlighetsregning og statistisk modellering.
Eksamensdag:	Fredag 4. juni 2010.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator og formelsamling for STK1100/STK1110.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

En Poissonfordelt stokastisk variabel X med parameter λ har punktsannsynligheter

$$p(x;\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \text{ for } x = 0, 1, 2, \ldots$$

og momentgenererende funksjon

$$M_X(t) = \mathrm{E}[e^{tX}] = e^{\lambda(e^t-1)}$$

(dette skal du ikke vise).

(a) Benytt $M_X(t)$ til å vise at både forventningen $\mathrm{E}[X] = \lambda$ og variansen $\mathrm{V}[X] = \lambda$.

(b) Anta at stokastiske variable X og Y er uavhengige med momentgenererende funksjoner $M_X(t)$ og $M_Y(t)$. Vis at $Z = X + Y$ har momentgenererende funksjon $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$.

(c) Anta at X er Poissonfordelt med parameter λ, Y er Poissonfordelt med parameter μ og at X og Y er uavhengige. Benytt resultatet i (b) til å vise at momentgenererende funksjon for $Z = X + Y$ blir lik $M_Z(t) = e^{(\lambda+\mu)(e^t-1)}$.

Forklar hvorfor dette betyr at Z er Poissonfordelt med parameter $\lambda+\mu$.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

Generelt for uavhengige diskret fordelte variable X og Y gjelder at fordelingen til summen $Z = X + Y$ gis ved

$$P(Z = z) = \sum_{\text{alle } x} P(X = x)P(Y = z - x) \tag{1}$$

(a) Vis dette resultatet (du kan bruke uten videre forklaring at begivenheten $(X = x) \cap (Z = z)$ er ekvivalent med $(X = x) \cap (Y = z - x)$).

(b) Utled ved hjelp av resultatet (1) det samme som ble vist i Oppgave 1, nemlig at hvis X er Poissonfordelt med parameter λ, Y er Poissonfordelt med parameter μ og X og Y er uavhengige, så er summen $Z = X + Y$ Poissonfordelt med parameter $\lambda + \mu$.

Du vil ha nytte av binomialformelen $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Merk også at $P(Y = z - x) = 0$ for $z - x < 0$.

Anta nå at X og Y er uavhengige og kontinuerlig fordelte med tettheter $f_X(x)$ og $f_Y(y)$. Analogt med (1) gjelder da at tettheten $f_Z(z)$ til summen $Z = X + Y$ er gitt ved den såkalte konvolusjonsformelen

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx. \tag{2}$$

(dette skal du ikke vise).

(c) Anta at X og Y er eksponensialfordelte med samme tetthet

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

Bruk (2) til å regne ut tettheten til $Z = X + Y$.

Oppgave 3.

Anta at $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ er et tilfeldig utvalg, dvs. Y_i-ene er uavhengige og har samme fordeling. La $\mu = \mathrm{E}[Y_i]$ og $\sigma^2 = \mathrm{V}[Y_i]$ være henholdsvis forventningen og variansen til Y_i-ene.

(Fortsettes side 3.)

(a) La $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ være gjennomsnittet av Y_i-ene. Vis at $\mathrm{E}[\bar{Y}] = \mu$ og $\mathrm{V}[\bar{Y}] = \frac{\sigma^2}{n}$.

Forklar hvorfor $\bar{Y}$ konvergerer mot μ når $n \to \infty$.

Hva er tilnærmet fordeling for gjennomsnittet $\bar{Y}$ når n er stor? Hvilket resultat fra pensum bruker du her?

Monte Carlo integrasjon er en numerisk integrasjonsmetode basert på å trekke tilfeldige tall og så beregne gjennomsnitt av passende funksjoner over trekningene. Vi er interessert i å beregne et integral $A = \int_0^1 h(x)dx$ for en kontinuerlig funksjon $h(x)$. Det eksakte uttrykket for $h(x)$ spiller ingen rolle i oppgaven, men Monte Carlo integrasjon er av interesse når det ikke er mulig å finne et analytisk uttrykk for integralet.

(b) Anta at X er trukket fra en uniform fordeling på intervallet $[0, 1]$. Forklar hvorfor $Y = h(X)$ har forventning $\mathrm{E}[Y] = A = \int_0^1 h(x)dx$.

Skriv også opp et uttrykk for variansen $\sigma^2 = \mathrm{V}[Y]$ for Y.

(c) Anta at $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige og uniformt fordelte på $[0, 1]$ og la $Y_i = h(X_i)$. Forklar hvorfor Monte Carlo integralet gitt ved gjennomsnittet $\bar{Y}$ blir et anslag for $A = \int_0^1 h(x)dx$.

Diskuter presisjonen i anslaget når antall trekninger n er stort.

(d) Man vil i tillegg beregne $B = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-x^2/2}dx$ for en funksjon $g(x)$. Foreslå en Monte Carlo integrasjonsmetode for B basert på å trekke standardnormalfordelte variable X_i.

SLUTT