Livsforsikring - et eksempel på bruk av forventningsverdi

Notat til STK1100

Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Februar 2004

Innledning

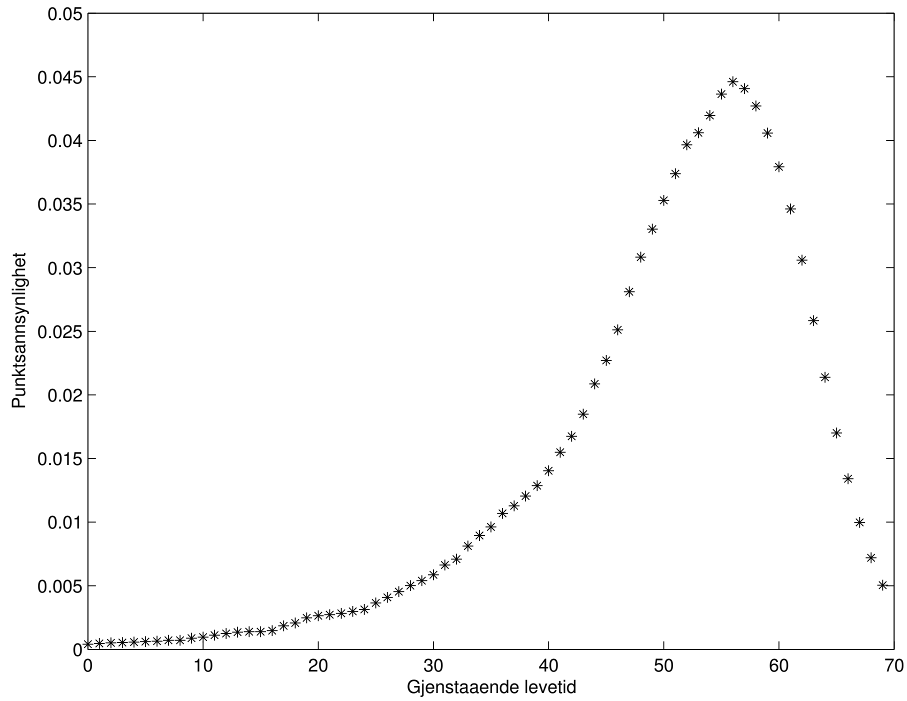
Vi skal i dette notatet se hvordan en kan bestemme premien (= prisen) til en livsforsikring. Framstillingen vil være en forenkling av det som gjøres i et forsikringsselskap. Notatet illustrerer likevel prinsippet for beregning av livsforsikringspremier. Forenklingene består i at vi:

- ser bort fra selskapets omkostninger og fortjeneste
- benytter dødelighetsopplysninger fra Statistisk sentralbyrå over dødeligheten i den norske befolkningen (i 1993) i stedet for dødeligheten blant forsikrede
- regner som om inn- og utbetalinger bare kan skje en gang hvert år

Problemstilling

For å være konkrete vil vi anta at en 30 år gammel kvinne tegner en livsforsikring som vil gi hennes etterlatte (mann og barn) en erstatning på en million kroner hvis kvinnen dør før hun fyller 65 år. Hvis hun blir minst 65 år utbetales ingen ting. For denne livsforsikringen må kvinnen hvert år betale en viss premie (så sant hun er i live).

Inn- og utbetalingene er stokastiske størrelser: Hvor mye kvinnen betaler inn i premie og hvor mye hennes etterlatte får utbetalt i erstatning vil avhenge av hvor gammel kvinnen blir. Premien bestemmes slik at forventningsverdien til (nåverdien av) premieinnbetalingene er lik forventningsverdien til (nåverdien av) erstatningsutbetalingen. Det gir en "rettferdig premie" (når vi ser bort fra selskapets omkostninger og fortjeneste). For hvis selskapet tegner mange livsforsikringer av den typen vi har beskrevet, vil gjennomsnittlig inn- og utbetaling pr. polise bli like store.



Figur 1: Punktsannsynlighet for gjenstående levetid for en 30 år gammel kvinne

Gjenstående levetid

Vi lar den stokastiske variabelen X angi kvinnens gjenstående levetid i hele år. Denne stokastiske variabelen har punktsannsynligheten $p(x) = P(X = x)$; for $x = 0, 1, \ldots, 69$ (vi ser bort fra aldre over hundre år). Vi kan bestemme punktsannsynligheten fra en tabell over ett-årige dødssannsynligheter. For hvis q_k er sannsynligheten for at en k år gammel kvinne skal dø i løpet av ett år, gir produktsetningen at

$$p(x) = \prod_{k=0}^{x-1} (1 - q_{30+k}) \cdot q_{30+x} \tag{1}$$

Her er $\prod$ tegnet for produkt på tilsvarende måte som $\sum$ er tegnet for sum. Figur 1 viser denne punktsannsynligheten (basert på dødelighetstabellen for Norge for 1993).

Nåverdi

Kvinnen betaler inn premier til forsikringsselskapet hvert år fra hun er 30 år, mens en eventuell erstatningsutbetaling til de etterlatte først kommer senere. For å ta hensyn til denne forskjellen i tid mellom inn- og utbetalinger benyttes nåverdiene av disse. Nåverdien av et beløp på B kroner som betales om k år, er det beløpet en må sette i banken i dag for å ha B kroner om k år når det beregnes renter og renters rente. Vi regner med at forsikringsselskapet benytter en rentefot på 3% pro anno. Da er nåverdien av B kroner som betales om k år lik $B/1.03^k$.

Erstatningsutbetalingen

La oss se nærmere på nåverdiene av inn- og utbetalingene og deres forventningsverdier. Vi ser først på erstatningsutbetalingen. Hvis kvinnen dør før hun blir 65 år, dvs. hvis $X \leq 34$, vil selskapet betale ut en million kroner til de etterlatte om X år. Hvis kvinnen blir minst 65 år, dvs. hvis $X \geq 35$, vil selskapet utbetale ingen ting. La $h(X)$ være nåverdien av erstatningsutbetalingen. Da er

$$h(X) = \begin{cases} \frac{1\,000\,000}{1.03^X} & \text{for } X \leq 34 \\ 0 & \text{for } X \geq 35 \end{cases}$$

Forventet nåverdi av erstatningsutbetalingen er derfor

$$E[h(X)] = \sum_{x=0}^{69} h(x)p(x) = 1\,000\,000 \sum_{x=0}^{34} \frac{p(x)}{1.03^x} \tag{2}$$

Ved å bruke (1) og (2) finner vi at forventet nåverdi av erstatningsutbetalingen er 46 860 kroner.

Premieinnbetalingene

Vi ser så på premieinnbetalingene. Vi antar at kvinnen betaler en årlig premie på K kroner pr. år fra og med sin 30 årsdag og til og med sin 64 årsdag (men selvfølgelig bare hvis hun er i live). Vi får nåverdien av alle premieinnbetalingene ved å summere nåverdiene av hver av dem. Dermed blir nåverdien av kvinnens samlede premieinnbetalinger

$$g(X) = \sum_{k=0}^{\min(X,34)} \frac{K}{1.03^k} = K\, \frac{1-(1/1.03)^{\min(X,34)+1}}{1-1/1.03} \tag{3}$$

Her følger den siste likeheten av formelen for summen av en endelig geometrisk rekke:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Av (3) finner vi at forventet nåverdi av premieinnbetalingene er

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \sum_{x=0}^{69} g(x)p(x) \\ &= K\, \frac{\sum_{x=0}^{69} p(x) - \sum_{x=0}^{33} (1/1.03)^{x+1}\, p(x) - \sum_{x=34}^{69} (1/1.03)^{34+1}\, p(x)}{1-1/1.03} \\ &= K\, \frac{1-\sum_{x=0}^{33} (1/1.03)^{x+1}\, p(x) - (1/1.03)^{35}\, P(X \geq 34)}{1-1/1.03} \qquad (4) \end{aligned}$$

Ved å bruke (1) finner vi at brøken i (4) er lik 21.85. Forventet nåverdi av premieinnbetalingene er dermed $21.85\,K$ kroner.

Årlig premie

Den årlige premien K bestemmes nå slik at forventet nåverdi av premieinnbetalingene blir lik forventet nåverdi av erstatningsutbetalingen, dvs. slik at (4) og (2) blir like. Det gir $21.85\,K = 46\,860$. Kvinnen må altså betale en årlig premie på $K = 46\,860/21.85 = 2145$ kroner for livsforsikringen.