

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamensdato: STK1100 — Sannsynlighetsregning  
og statistisk modellering.  
LØSNINGSFORSLAG

Eksamensdag: Mandag 10. juni 2013.

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30.

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpeemidler: Godkjent lommeregner og Formelsamling for STK1100 og STK1110.

Kontroller at oppgavesettet er komplett  
før du begynner å besvare spørsmålene.

### Oppgave 1.

a) Vi bruker at  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uavhengige tilfeldige variable.

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E[\exp(tY)] = E[\exp(t(a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n))] \\ &= E[\exp(ta_1X_1) \exp(ta_2X_2) \dots \exp(ta_nX_n)] \\ &= E[\exp(ta_1X_1)]E[\exp(ta_2X_2)] \dots E[\exp(ta_nX_n)] \\ &= M_{X_1}(a_1t)M_{X_2}(a_2t) \dots M_{X_n}(a_nt). \end{aligned}$$

b) Fra a) har vi:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{X_1}(a_1t)M_{X_2}(a_2t) \dots M_{X_n}(a_nt) \\ &= \exp(\mu_1a_1t + \sigma_1^2a_1^2t^2/2) \exp(\mu_2a_2t + \sigma_2^2a_2^2t^2/2) \dots \exp(\mu_na_nt + \sigma_n^2a_n^2t^2/2) \\ &= \exp[(\mu_1a_1 + \mu_2a_2 + \dots + \mu_na_n)t + (\sigma_1^2a_1^2 + \sigma_2^2a_2^2 + \dots + \sigma_n^2a_n^2)t^2/2]. \end{aligned}$$

Fra entydighetssetningen for momentgenererende funksjoner følger det at:

$$\begin{aligned} Y &= a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n \\ &\sim N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \dots + a_n\mu_n, a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2). \end{aligned}$$

(Fortsettes side 2.)

## Oppgave 2.

a)

$$M_X(t) = E[\exp(tX)] = \exp(0)p(0) + \exp(t)p(1) = 1 - p + \exp(t)p.$$

b)

$$EX = 0p(0) + 1p(1) = p, \quad E(X^2) = 0^2p(0) + 1^2p(1) = p,$$

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

c) Fra oppgave 1 a) har vi for  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ :

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\dots M_{X_n}(t) \\ &= (1 - p + \exp(t)p)(1 - p + \exp(t)p)\dots(1 - p + \exp(t)p) \\ &= (1 - p + \exp(t)p)^n. \end{aligned}$$

Fra entydighetssetningen for momentgenererende funksjoner følger det at:

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim Binomisk(n, p).$$

d) Fra oppgave 1 a) har vi for  $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 1$ :

$$\begin{aligned} M_V(t) &= M_{Y_1}(t)M_{Y_2}(t)\dots M_{Y_m}(t) \\ &= (1 - p + \exp(t)p)^{n_1}(1 - p + \exp(t)p)^{n_2}\dots(1 - p + \exp(t)p)^{n_m} \\ &= (1 - p + \exp(t)p)^{(n_1+n_2+\dots+n_m)}. \end{aligned}$$

Fra entydighetssetningen for momentgenererende funksjoner følger det at:

$$V = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m \sim Binomisk(n_1 + n_2 + \dots + n_m, p).$$

e) Foreslår estimatoren  $\hat{p} = V/(n_1 + n_2 + \dots + n_m)$  for  $p$ . Den er forventningsrett siden:

$$\begin{aligned} E\hat{p} &= E(V/(n_1 + n_2 + \dots + n_m)) \\ &= (n_1 + n_2 + \dots + n_m)p/(n_1 + n_2 + \dots + n_m) = p. \\ V(\hat{p}) &= (n_1 + n_2 + \dots + n_m)p(1 - p)/(n_1 + n_2 + \dots + n_m)^2 \\ &= p(1 - p)/(n_1 + n_2 + \dots + n_m). \end{aligned}$$

f) Vi har:

$$P(-1.96 \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/100}} \leq 1.96) \approx 0.95$$

Dette er ekvivalent med at:

$$P(\hat{p} - 1.96 \cdot \sqrt{p(1-p)/10} \leq p \leq \hat{p} + 1.96 \cdot \sqrt{p(1-p)/10}) \approx 0.95$$

Dette gir følgende tilnærmete 95% konfidensintervall for  $p$ :

$$\begin{aligned} \hat{p} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/10} &= 20/100 \pm 1.96 \cdot \sqrt{(20/100)(1-20/100)}/10 \\ &= 0.2 \pm 1.96 \cdot \sqrt{(0.2)(0.8)}/10 = 0.2 \pm 1.96 \cdot 0.4/10 = [0.1216, 0.2784]. \end{aligned}$$

### Oppgave 3.

La:

$T_s$  = Levetiden til seriekoblingen av 2. og 3. komponent,

der  $P(T_s \leq t) = F_s(t)$ .

a) Vi bruker at  $T_1, T_2, T_3$  er uavhengige tilfeldige variable

$$\begin{aligned} F(t) &= P(T \leq t) = P(T_1 \leq t)P(T_s \leq t) = P(T_1 \leq t)(1 - P(T_s > t)) \\ &= P(T_1 \leq t)(1 - P(T_2 > t)P(T_3 > t)) = F_1(t)[1 - (1 - F_2(t))(1 - F_3(t))]. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} F(t) &= (1 - \exp(-\lambda_1 t))[1 - \exp(-\lambda_2 t)\exp(-\lambda_3 t)] \\ &= 1 - \exp(-\lambda_1 t) - \exp(-(\lambda_2 + \lambda_3)t) + \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{d}{dt}F(t) = \lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) + (\lambda_2 + \lambda_3) \exp(-(\lambda_2 + \lambda_3)t) \\ &\quad - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t). \end{aligned}$$

d) Vi har:

$$\int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t} t^2]_0^\infty + \int_0^\infty 2t e^{-\lambda t} dt = [\frac{1}{\lambda} (-e^{-\lambda t}) 2t]_0^\infty$$

$$+ \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} 2dt = 2/\lambda^2,$$

$$\int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda.$$

Dermed er:

$$ET = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3},$$

$$V(T) = E(T^2) - (ET)^2 = 2[\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{(\lambda_2 + \lambda_3)^2} - \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2}] \\ - [\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}]^2.$$

SLUTT