FASIT MAT1000 VÅR 2007

Oppgave 1

a) Den deriverte til f er

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} = x^{-1} - x^{-2}.$$

Vi ser at $f'(x) > 0$ for $x > 1$, $f'(1) = 0$ og $f'(x) < 0$ for $0 < x < 1$. Altså er f voksende på $[1, \rightarrow\rangle$ og avtagende på $\langle 0, 1]$. Punktet $x = 1$ er et minimumspunkt for f, og minimumsverdien er $f(1) = 1$.

b) Den annenderiverte til f er

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3}$$

Vi ser at $f''(x) > 0$ for $0 < x < 2$, $f''(2) = 0$ og $f''(x) < 0$ for $x > 2$. Altså krummer grafen til f oppover for $x \in \langle 0, 2\rangle$ og nedover for $x \in \langle 2, \rightarrow\rangle$. For $x = 2$ får vi vendepunktet $(2, \ln 2 + \frac{1}{2})$ på grafen til f.

c) Vi skal undersøke $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ og $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Ved å plotte f på kalkulatoren ser vi at det virker som om $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$. Hvis dette er riktig, er y-aksen en vertikal asymptote for f. Skriv $f(x) = \frac{x\ln x + 1}{x}$. Det er nok å vise at $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$. Vi har

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}},$$

som er et "$\frac{-\infty}{\infty}$-uttrykk". Siden

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0,$$

følger det fra l'Hôpitals regel at

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0.$$

(Alternativt argument: f er strengt avtagende på $\langle 0, 1\rangle$ og grafen til f krummer oppover på dette intervallet, derfor må $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$.)

Vi har $\lim_{x\to\infty}(\ln x + \frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty}(\ln x) = \infty$, siden $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}) = 0$, så f har ingen horisontal asymptote.

d) Delvis integrasjon ($u = \ln x$, $v' = 1$) gir

$$\int \ln(x)dx = x\ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Arealet til området avgrenset av grafen til f, x-aksen, og linjene $x = 1$ og $x = 2$ er

$$\int_1^2 f(x)dx = [x\ln x - x + \ln x]_1^2 = 3\ln 2 - 1.$$

e) Taylor-polynomet av grad 2 til f i $x = 1$ er

$F_2(x) = f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = 1+\frac{1}{2}(x^2-2x+1) = \frac{3}{2}-x+\frac{1}{2}x^2.$

Oppgave 2

a) Middelverdien til

$$h(t) = 7 + 3\cos(\frac{\pi}{12}t) - \sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{12}t)$$

er $C_0 = 7$. Amplituden er $C = \sqrt{3^2 + 3} = 2\sqrt{3}$. Perioden til $h(t)$ er $T = 2\pi/(\frac{\pi}{12}) = 24$. Akrofasen t_0 er gitt ved at $\tan\frac{\pi}{12}t_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ og at vinkelen $\frac{\pi}{12}t_0$ skal ligge i samme kvadrant som $(3, -\sqrt{3})$, altså i 4. kvadrant. Dette gir $\frac{\pi}{12}t_0 = \frac{11\pi}{6}$, altså $t_0 = 22$.

Tilførselen er størst når $t = t_0 + n \cdot 24 = 22 + 24n$, der n er et helt tall.

b) Det følger fra punkt a) at

$$h(t) = 7 + 2\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{12}(t - 22))$$

Det ubestemte integralet er lik

$$\int h(t)dt = 7t + 2\sqrt{3} \cdot \frac{12}{\pi}\sin(\frac{\pi}{12}(t - 22)) + C.$$

Det renner

$$\int_{22}^{46} h(t)dt = 7 \cdot 24 + 2\sqrt{3} \cdot \frac{12}{\pi}(\sin(2\pi) - \sin(0)) = 7 \cdot 24 + 0 = 168$$

kubikkmeter vann inn i tjernet i løpet av 24 timer. (Siden funksjonen er periodisk med periode 24, er det det samme hvilket intervall av lengde 24 vi integrerer over.)

Oppgave 3

a) Vekstraten på tidspunktet $t = 0$ er $N'(0)$. Vi har

$N'(t) = -B(1+ke^{-\lambda Bt})^{-2} \cdot ke^{-\lambda Bt} \cdot (-\lambda B) = k\lambda B^2 e^{-\lambda Bt}(1+ke^{-\lambda Bt})^{-2},$

så vi får $N'(0) = \frac{k\lambda B^2}{(1+k)^2}$.

b) Vi har

$$\lambda N(t)\big(B - N(t)\big) = \lambda B(1 + ke^{-\lambda Bt})^{-1}\big(B - B(1 + ke^{-\lambda Bt})^{-1}\big),$$

som gir

$$\lambda N(t)\big(B - N(t)\big) = \lambda B^2(1 + ke^{-\lambda Bt} - 1)(1 + ke^{-\lambda Bt})^{-2} = N'(t).$$

Oppgave 4

a) Siden $\det M = 0.48 - 0.08 = 0.4$ er forskjellig fra 0, er matrisen M inverterbar. Dens inverse matrise er

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ -0.5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ligningen

$$M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \end{bmatrix}$$

har løsningen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1}\begin{bmatrix} 60 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Sesongen før var det altså 50 tomme kasser.

b) Det karakteristiske polynomet til M er

$$\det(M - \lambda I) = (0.8 - \lambda)(0.6 - \lambda) - 0.08 = \lambda^2 - 1.4\lambda + 0.4. = (\lambda - 1)(\lambda - 0.4)$$

Egenverdiene til M er derfor $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 0.4$.

Utregning gir

$$M\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$M\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.4 \end{bmatrix} = 0.4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

så den første vektoren er en egenvektor med egenverdi 1 og den andre en egenvektor med egenverdi 0.4.

c) Vi vil skrive

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 90 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vi må altså finne a og b slik at

$$2a + b = 10 \text{ og } a - b = 90.$$

Det gir $a = 100/3$ opg $b = -170/3$. Vi finner

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = M^n\begin{bmatrix} 10 \\ 90 \end{bmatrix} = \tfrac{100}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{170}{3}(0.4)^n\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Det gir

$$x_n = \tfrac{200}{3} - (0.4)^n\tfrac{170}{3},$$

som er et (tilnærmet) svar på hvor mange kasser som er i bruk etter n sesonger.

SLUTT