HG
Februar 2013

Oppgaveløsninger til undervisningsfri uke 8

Oppgave 3.17

Definer to begivenheter

A = "løgntesten sier at Per lyver"
B = "Per lyver faktisk"

Oppgitt

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= 0.85 \\ P(\bar{A} \mid \bar{B}) &= 0.70 \\ P(B) &= 0.35 \end{aligned}$$

Bayes' regel samt $P(A \mid \bar{B}) = 1 - P(\bar{A} \mid \bar{B})$, gir

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B) + P(\bar{B})P(A \mid \bar{B})} = \frac{(0.35)(0.85)}{(0.35)(0.85) + (1-0.35)(1-0.70)} = 0.604...$$

Oppgave 3.22

Antall mulige kombinasjoner (merk at, for eksempel, de to bokstavene som kommer først ikke trenger å være forskjellige):

$$26^2 \cdot 10^2 \cdot 26 = 1\,757\,600$$

Oppgave 3.24

Alternativ løsning 1:
For hvert mulig antall punkter teller vi opp hvor mange posisjoner som gir akkurat det antallet. Summerer til slutt:

s punkter	Antall posisjoner med s punkter
1	6
2	$\binom{6}{2}=15$
3	$\binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}=20$
4	$\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=15$
5	$\binom{6}{5}=\binom{6}{1}=6$
6	1
Sum	63

Alternativ løsning 2:
På hver plass er de to muligheter, prikk eller ikke-prikk. På de seks plassene blir det dermed $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^6=64$ mulige kombinasjoner av prikker og ikke-prikker. Vi må imidlertid trekke fra en kombinasjon – den tomme som ikke har noen prikker i det hele tatt og som ikke er et gyldig tegn. Dermed svaret

$$2^6-1=63$$

Oppgave 3.27

Det produseres $N=3000$ biler daglig. Av disse har $M=38$ kvalitetsfeil (som er ukjent). Det trekkes et rent tilfeldig utvalg på $n=100$ biler.

La K_x betegne begivenheten at akkurat x biler i utvalget har kvalitetsfeil, der x er et av tallene, 0, 1, 2, 3,….,38. Vi ønsker å finne sannsynligheten

$$P(\text{ ingen biler i utvalget har kvalitetsfeil})=P(K_0)$$

Vi skal nå, litt mer generelt, finne et uttrykk for $P(K_x) = P(x$ biler i utvalget har kvalitetsfeil)
:

Det er $\binom{3000}{100}$ mulige utvalg på 100 biler som alle anses like sannsynlige.

Antall mulige utvalg som har akkurat *x* biler med kvalitetsfeil, er $\binom{38}{x}\cdot\binom{2962}{100-x}$

[**Forklaring:** Det er $\binom{38}{x}$ mulige utvalg av *x* biler fra de 38 med kvalitetsfeil. For *hvert av* disse utvalgene er det $\binom{2962}{100-x}$ måter å trekke ut de øvrige $100-x$ fra de 2962 feilfrie bilene. For å finne totalt antall utvalg på 100 med akkurat *x* biler med kvalitetsfeil, må vi da gange disse to tallene.]

Dermed

$$P(K_x) = \frac{\binom{38}{x}\cdot\binom{2962}{100-x}}{\binom{3000}{100}} \quad \text{for } x = 0,1,2,\ldots,38$$

og spesielt (som i og for seg kunne vært satt opp direkte uten omveien om $P(K_x)$)

$$P(K_0) = \frac{\binom{38}{0}\cdot\binom{2962}{100-0}}{\binom{3000}{100}} = \frac{\binom{2962}{100}}{\binom{3000}{100}} = \frac{2962\cdot 2961\cdot\cdots\cdot 2863}{3000\cdot 2999\cdot\cdots\cdot 2901}$$

siden $1/100!$ kan forkortes bort. Vi legger merke til at tallene (faktorene) 2962, 2961, … ,2901 forekommer både i telleren og nevneren og kan derfor forkortes bort. Vi får dermed

$$P(K_0) = \frac{2900\cdot 2899\cdot\cdots\cdot 2863}{3000\cdot 2999\cdot\cdots\cdot 2963} = \frac{2900\cdot 2899\cdot\cdots\cdot 2863/38!}{3000\cdot 2999\cdot\cdots\cdot 2963/38!} = \frac{\binom{2900}{38}}{\binom{3000}{38}} = 0.274$$

regnet med en kalkulator som har binomialkoeffisienter. Hvis du ikke har det på kalkulatoren din, må du gange og dele alle tallene i det første uttrykket for $P(K_0)$ skritt for skritt, eventuelt bruke logaritmer (kort sagt en kjedelig jobb!). Det går også an å bruke COMBIN-funksjonen i Excel (finnes under mathematical functions). Gjør vi det, får vi

$$\binom{2900}{38} = 5.5830013E+86, \qquad \binom{3000}{38} = 2.0412248E+87$$

Lar vi så Excel beregne forholdet mellom disse to tallene, får vi 0.2735…

Oppgave 3.29

Det er $N = \binom{34}{7} = 5\,379\,616$ mulige (ikke-ordnete) utvalg på 7 tall fra tallene 1,2,…,34.

Siden disse er like sannsynlige, er sannsynligheten for at en enkelt rekke som jeg har satset på, blir trukket ut,

(1) $\qquad P(\text{mine 7 tall blir trukket ut}) = \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{5\,379\,616}.$

Anta jeg satser $n = 1\,000\,000$ rekker. Jeg skal finne sannsynligheten for at en av disse blir trukket ut (gir toppgevinst). Siden de N mulige rekkene er like sannsynlige, kan jeg regne *som om* jeg trekker ut rent tilfeldig $n = 1$ million rekker (mine) fra N mulige rekker hvorav kun $M = 1$ gir toppgevinst. Sannsynligheten for at vinnerrekken havner blant mine n blir da på samme måte som i oppgave 3.27,

$$P(\text{toppgevinst}) = \frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{5\,379\,615}{999\,999}}{\binom{5\,379\,616}{1\,000\,000}} = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

Det siste uttrykket kan forenkles betraktelig:

$$\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{\dfrac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{(N-1)!}{N!}\cdot\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n}{N}$$

[**Alternativ løsning:** Vi kan også bruke (1) mer direkte: La for mine (1 mill) rekker, begivenheten, V_j, bety at min rekke nr. j blir trukket ut til toppgevinst av Lotto. Merk at (de 1 million) begivenhetene, $V_1, V_2, \ldots, V_n$, er disjunkte, hvorav

$P(\text{toppgevinst}) = P\left(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n\right) = P(V_1) + P(V_2) + \cdots + P(V_n) = n\cdot\dfrac{1}{N} = \dfrac{n}{N}$]

Dermed

$$P(\text{toppgevinst}) = \frac{n}{N} = \frac{1\,000\,000}{5\,379\,616} = 0.186$$

Anta en enkelt rekke koster 1 krone (jeg kjenner ikke prisen for tiden). Da vil min investering koste 1 mill kr. pr uke og *K* millioner kr. over *K* uker. La *T* betegne antall ganger jeg vinner toppgevinsten på de *K* ukene. I henhold til de store tall lov vil $T/K \approx 0.186$, eller $T \approx (0.186)K$, slik at jeg i snitt vil få toppgevinst ca $(0.186)K$ uker. Hvis den gjennomsnittlige toppgevinsten er *G* kr pr. uke (for eksempel $G \approx 2.5$ mill, bare for å gjette på noe.. - jeg kjenner ikke gjennomsnittlig toppgevinst), vil altså investeringen i snitt gi ca $(0.186)\cdot K \cdot G$ kr over *K* uker. Dette blir i snitt ca $(0.186)\cdot G \approx (0.186)\cdot(2\,500\,000) = 465\,000$ kr. pr. uke. Altså dårlig avkastning på en ukentlig investering på 1 mill kr. !

Oppgave 3.35

Antall mulige pokerhender er $K = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

Straight flush

(5 i samme farge og i sekvens, for eksempel 3,4,5,6,7 i hjerter. Ess kan være både høy og lav verdi.)

I følgende oppstilling (alle med samme farge) er den understrekne delen en mulig straight flush

<u>Ess, 2, 3, 4, 5</u>, 6, 7, 8, 9, 10, J, D, K, Ess

Det er 10 muligheter å plassere understrekningen. Muligheten, 10, J, D, K, Ess, kalles **Royal straight flush.** Siden vi har 4 farger, får vi $10 \cdot 4 = 40$ mulige straight flush, hvorav 4 er Royal straight flush:

$$P(\text{Royal str. flush}) = \frac{4}{K} = 0.000\,0015$$

$$P(\text{Str. flush}) = \frac{36}{K} = 0.000\,014$$

Fire like.

Det er 13 mulige verdier. Det femte kortet kan være hvilket som helst blant de resterende 48 kortene. Altså $13 \cdot 48 = 624$ muligheter for fire like, og

$$P(\text{Fire like}) = \frac{624}{K} = 0.00024$$

Hus.

Da skal det være 2 kort med en verdi og 3 med en annen verdi. Det er $\binom{13}{2}$ mulige par av verdier (for eksempel paret $\{4,6\}$. Det er 2 muligheter for at et slikt par kan utgjøre et hus, 2 firere og 3 seksere, eller 3 firere og 2 seksere. I det første tilfellet kan de 2 firerne velges ut på $\binom{4}{2}$ måter og de 3 sekserne på $\binom{4}{3}$ måter. Antall mulige hus blir da i alt

$$2\cdot\binom{13}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{3} = 3\,744 \quad \text{og}$$

$$P(\text{Hus}) = \frac{3744}{K} = 0.00144$$

Flush. (5 i samme farge som ikke er blant de 40 str. flush-ene)

Antall hender med 5 i samme farge er $4\cdot\binom{13}{5} = 5148$. Vi må trekke fra 40 str. flush , som gir antall mulige flush, $5148 - 40 = 5108$, og

$$P(\text{Flush}) = \frac{5108}{K} = 0.0020$$

Straight. (5 kort i sekvens som ikke er blant de 40 str. flush)

En sekvens kan for eksempel være av typen, 2,3,4,5,6 (det er 10 slike typer). Det er 4^5 fargekombinasjoner for hver av disse. Og så må vi trekke fra de 40 som er str. flush. Antall mulige straight-er blir da $10\cdot 4^5 - 40 = 10\,200$, og

$$P(\text{Straight}) = \frac{10\,200}{K} = 0.0039$$

Tre like.

Tre kort med samme verdi kan trekkes ut på $13\cdot\binom{4}{3}$ måter. De to resterende kortene kan velges fra de 48 kortene som har en annen verdi, dvs. på $\binom{48}{2}$ måter. Noen av disse, imidlertid, gir "hus" – som må trekkes fra. Antall "tre like" blir dermed

$$13\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2} - (\text{antall "hus"}) = 54\,912, \quad \text{og}$$

$$P(\text{Tre like}) = \frac{54\,912}{K} = 0.021$$

To par.

Antall "to par" er $\binom{13}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{44}{1}=123\,552$ (løst i boka side 105). Dermed

$$P(\text{To par})=\frac{123\,552}{K}=0.048$$

Et par.

Antall måter vi kan velge ut to kort som blir et par, er $13\cdot\binom{4}{2}$ måter. De resterende tre kortene må innebyrdes ha forskjellig verdi[1] – og være valgt ut fra 12 mulige verdier (de som er forskjellig fra par-verdien – noe som kan skje på $\binom{12}{3}$ måter. For hver av disse er det 4^3 fargekombinasjoner. Antall hender som gir "et par" blir da

$$13\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{12}{3}\cdot 4^3=1\,098\,240\text{, og}$$

$$P(\text{Et par})=\frac{1\,098\,240}{K}=0.42$$

Oppgave 3.36

De to første deloppgavene er gjennomgått på forelesningen, så det gjenstår bare den siste deloppgaven, nemlig å vise (Pascals trekant)

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1},\quad \text{der } k, n \text{ er vilkårlige naturlige tall slik at } k\le n$$

Vi tar utgangspunkt i høyresiden og den generelle formelen $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ som gjelder for vilkårlige *k* og *n*:

[1] Ellers ville vi fått hus eller to par.

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!\big(n-1-(k-1)\big)!}$$

Nå har vi $k!=k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=k\cdot(k-1)!$, og $\big(n-1-(k-1)\big)!=(n-k)!=(n-k)\cdot(n-k-1)!$, som settes inn, og felles faktorer settes utenfor (husk også at faktorenes orden i et produkt er likegyldig),

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)\cdot(n-k-1)!}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\cdot\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right]=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\cdot\frac{n-k+k}{k(n-k)}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\cdot\frac{n}{k(n-k)}=\frac{(n-1)!n}{(k-1)!(n-k-1)!k(n-k)}=$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$