ECON 2130

EKSAMEN 2008 VÅR - UTSATT PRØVE

SENSORVEILEDNING

Oppgaven består av 9 delspørsmål, A,B,C,…., som anbefales å veie like mye,
Kommentarer og tallsvar er skrevet inn mellom << ….. >>.

Oppgave 1

Ved en spørreundersøkelse blant økonomistudenter som skal opp i statistikk ved en høyskole ble studentene spurt om hvilken karakter de forventet ved den forestående eksamen. I tillegg ble de spurt om de hadde regnet ekstra oppgaver utover dem som var satt opp på oppgaveseminaret (svaralternativer "ja" eller "nei").

Basert på resultatene fra spørreundersøkelsen er det satt opp en tabell over antatte sannsynligheter for de 8 svarkombinasjonene som er angitt i tabell 1. For eksempel antas at en tilfeldig valgt student har en sannsynlighet på 0,06 for både å svare "ja" på spørsmålet om ekstra oppgaver og forvente en B til eksamen. Merk at de 8 sannsynlighetene i tabellen summerer seg til 1.

Tabell 1.

		Forventet karakter til eksamen			
		A	B	C	D eller dårligere
Har regnet ekstra oppgaver	Ja	0,12	0,06	0,12	0,02
	Nei	0,13	0,21	0,26	0,08

A. (i) Finn sannsynligheten for at en tilfeldig valgt studenthar regnet ekstraoppgaver utover oppgaveseminaret (dvs. svarer "ja" på spørsmålet om ekstraoppgaver).
(ii) Finn sannsynligheten for at en tilfeldig valgt student forventer minst B (dvs. A eller B) til eksamen.

<< (i) P(ja) = 0,32. (ii) P(minst B) = 0,52 >>

B. (i) Finn sannsynligheten for at en vilkårlig student som *har* regnet ekstraoppgaver utover oppgaveseminaret forventer minst B til eksamen.

(ii) La X være en stokastisk variabel som indikerer forventet karakter til eksamen (for eksempel $X = 1$ for A, $X = 2$ for B, $X = 3$ for C og $X = 4$ for D eller dårligere), og Y som indikerer svaret på spørsmålet om ekstraoppgaver ($Y = 1$ for “ja” og $Y =$ 0 for “nei”). Er X og Y stokastisk uavhengige? Begrunn svaret.

<< (i) $\mathrm{P}(\text{minst B} \mid \text{ja}) = \dfrac{0{,}12 + 0{,}06}{0{,}32} = \dfrac{9}{16} = 0{,}563$.

(ii) Nei. F.eks $P(X = 1)P(Y = 1) = (0{,}25)(0{,}32) = 0{,}08 \neq P(X = 1 \cap Y = 1) = 0{,}12$. >>

Oppgave 2

En jury på 12 medlemmer skal velges ved loddtrekning fra et panel bestående av 8 kvinner og 8 menn.

A. Vis at det er 1820 mulige juryer som kan dannes ut fra panelet.

<< $\dbinom{16}{12} = \dbinom{16}{4} = \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1820$ >>

B. (i) Finn sannsynligheten for at det er like mange menn som kvinner i den uttrukne juryen.
(ii) Finn sannsynligheten for at det blir flertall menn i juryen. [**Hint:** Merk at denne sannsynligheten må på grunn av symmetrien være lik sannsynligheten for flertall kvinner.]

<< (i) La X være antall menn i juryen. Dermed $P(X = 6) = \dfrac{\dbinom{8}{6}\dbinom{8}{6}}{\dbinom{16}{12}}$. Siden

$\dbinom{8}{6} = \dbinom{8}{2} = \dfrac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$, får vi $P(X = 6) = \dfrac{28^2}{1820} = \dfrac{784}{1820} = 0{,}431$.

(ii) La q være s.heten for flertall menn. Vi har $2q + 0{,}431 = 1$, hvorav
$q = \dfrac{1 - 0{,}431}{2} = 0{,}285$ >>

Oppgave 3

8% av befolkningen i en større by lider av en viss sykdom, S. En rimelig og rask diagnostisk test har følgende egenskap: Bruken av testen har to mulige utfall, positivt eller negativt utslag. 80% av dem som lider av S vil få et positivt utslag ved bruk av testen, mens 80% av dem som *ikke* lider av S vil få et negativt utslag. Gitt at en person har fått et positivt utslag på testen. Hva er sannsynligheten for at vedkommende lider av S?

<< La P være begivenheten av positivt utslag. Vi har oppgitt: $P(S) = 0,08$, $P(P \mid S) = 0,8$ og $P(\overline{P} \mid \overline{S}) = 0,8$. Vi får:

$$P(P) = P(S)P(P \mid S) + P(\overline{S})P(P \mid \overline{S}) = (0,08)(0,8) + (1-0,08)(1-0,8) = 0,248$$

Dermed $P(S \mid P) = \dfrac{P(S)P(P \mid S)}{P(P)} = \dfrac{(0.08)(0,8)}{0,248} = 0,258$ >>

Oppgave 4

En skatteinspektør ønsker å anslå andelen, p, av feilfrie regnskap i en gitt bransje. Feilene som kan forekomme i et regnskap deles inn i to kategorier, *alvorlige feil* og *mindre alvorlige feil*. I et rent tilfeldig utvalg på n = 60 regnskap fra bransjen finner inspektøren at 6 regnskap hadde minst en alvorlig feil, mens 14 regnskap hadde minst en mindre alvorlig feil. Blant de regnskapene som hadde feil i det hele tatt var det to som hadde minst en alvorlig og minst en mindre alvorlig feil.

A. Sett opp en forventningsrett estimator for p og beregn estimatet.

<< La A bety at det bare er alvorlige feil i regnskapet, B bare mindre alvorlige feil og C både alvorlige og mindre alvorlige feil. La # bety antall. Vi har: $\#(A \cup C) = 6$, $\#(B \cup C) = 14$ og $\#(C) = 2$. Dermed $\#(A) = 4$, $\#(B) = 12$ og #(regnskap med feil) = 4+12+2 = 18. Hvis X er antall feilfrie regnskap, blir X observert = 60 - 18 = 42 og estimatet

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{42}{60} = 0,7$$ >>

B. La X betegne antall feilfrie regnskap i utvalget. Anta at bransjen er så stor at X kan antas å være binomisk fordelt (n, p).

(i) Beregn et tilnærmet 95% konfidensintervall for p dersom $\hat{p}$ i punkt **A** hadde fått verdien 0,7 (og $n = 60$).

(ii) Hvor mange regnskap måtte inspektøren undersøke dersom hun ville være helt sikker på at lengden av konfidensintervallet ikke ble større enn 0,1 uansett hvilken verdi $\hat{p}$ måtte få i det større utvalget?

<< (i) $0,70 \pm 1.96\sqrt{\dfrac{(0,3)(0,7)}{60}} = 0,70 \pm 0,12 = [0,58,\ 0,82]$

(ii) $2(1,96)\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le 0,1 \Leftrightarrow n \ge 4(1,96)^2\,\hat{p}(1-\hat{p})/0,01$. Siden $\hat{p}(1-\hat{p}) \le 1/4$, er dette helt sikkert oppfylt hvis $n \ge (1,96)^2/0,01 = 384,2$ eller $n \ge 385$. >>

C. Anta fremdeles at $n = 60$ og at den observerte verdien av $\hat{p}$ er 0,7. Tyder dette resultatet på at $p < 0,8$? Sett opp passende hypoteser og beregn p-verdien (tilnærmet). Formuler en konklusjon.

<< $H_0 : p \ge 0,8$ $\quad H_1 : p < 0,8$. Testobservator: $Z = \dfrac{\hat{p} - 0,8}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$.

Observert: $Z_{obs} = \dfrac{-0,1}{0,0592} = -1,69$. P-verdi: $P_{0,8}(Z \le -1,69) \approx 0,0455$.

Forkast H_0 på 5% nivå. >>

Oppgave 5

Anta at X er binomisk fordelt (n, p) der n er antall forsøk og p suksess-sannsynligheten.
(i) Vis at $E\left[X(n-X)\right] = n(n-1)p(1-p)$. [**Hint:** Husk at formelen $E\left[Y^2\right] = \mathrm{var}(Y) + \left[E(Y)\right]^2$ gjelder generelt for en stokastisk variabel Y]

(ii) Den vanlige estimatoren $\hat{p} = X/n$ har varians $\sigma^2 = \mathrm{var}(\hat{p}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$. Bruk (i) til å konstruere en forventningsrett estimator for $\sigma^2 = \dfrac{p(1-p)}{n}$. Er den vanlige estimatoren for σ^2, nemlig $\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$, forventningsrett?

<< (i) :

$$E\left[X(n-X)\right] = nE(X) - E\left[X^2\right] = n^2 p - (np(1-p) + n^2p^2) =$$
$$= n^2p - np + np^2 - n^2p^2 = (n^2 - n)p + (n - n^2)p^2 =$$
$$= (n^2 - n)(p - p^2) = n(n-1)p(1-p)$$

(ii) (i) $\Rightarrow \dfrac{E\left[X(n-X)\right]}{n^2(n-1)} = E\left[\dfrac{X(n-X)}{n^2(n-1)}\right] = E\left[\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}\right] = \dfrac{p(1-p)}{n} = \sigma^2$, hvorav

$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{X(n-X)}{n^2(n-1)} = \dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}$ er forventningsrett. Den vanlige estimatoren underestimerer σ^2 litt. >>