Oppsummering matematikkdel ECON 2200

Kjell Arne Brekke

7. mai 2008

1 Innledning

En rask oppsummering av hele kurset vil ikke kunne dekke alt vi har gjennomgått. Men alt er pensum, selv om det ikke blir eksplisitt nevnt her. For meg som bruker denne matematikken til daglig, kan det kanskje være sentrale ting som er så opplagt at jeg glemmer å nevne dem. Dere kan få spørsmå til eksamen hvor dere trenger matematikk som jeg ikke nevner i denne oppsummeringen.

2 Algebra, Ligninger og funksjoner

Stoffet fra de to første forelseningene har vi brukt igjen og igjen gjennom hele kurset. Med en time til repetisjon vil vi ikke rekke å si så mye om dette i denne runde.

Er du usikker på om vi kan skrive $(c+k)y$ som $cy+ky$? Eller lurer du på om vi kan korte bort $2-$tallet i

$$\frac{2}{x+2}?$$

Er du usikker på hvordan du kan tegne grafen til funksjonen $f(x) = 3x - 2$? Er du usikker på hvordan du skal løse ligningen

$$p(1-t) - ky = 0$$

for å finne et uttrykk for y? Dette er enkle eksempler, men tenk gjennom hva du har opplevd som vanskelig på seminaroppgavene. Har det ofte vært denne typen spørsmål, så er det lurt å bruke litt tid på å friske opp igjen de grunnleggende kunnskapene.

3 Derivasjon

Vi husker at vi definerte den deriverte $f'(x)$ som grenseverdien til uttrykket

$$\frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

når vi lar a bli mindre og mindre. I mange tilfeller vil $a = 1$ være liten nok, og da er

$$f'(x) \approx f(x+1) - f(x)$$

altså tilveksten i f når vi øker x en enhet. I noen tilfeller vil vi imidlertid la a bli mye mindre før vi har en god tilnerming. En positiv derivert betyr altså at funksjonen vokser, mens en negativ derivert betyr at den avtar.

Vi brukte definisjonen til å finne noen fundamentale derivasjonsregler, de mest fundamentale av disse bruker vi nå uten å tenkte over at vi bruker en bestemt regel.Ta derivasjonen

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

Vi deriverer hvert ledd i summe for seg. Potensregelen forteller oss f.eks. at den deriverte av x^2 er $2x$. Vi vet også at 3 tallet foran må taes med så vi får $3 \cdot 2x = 6x$ som derivert av det første leddet. Konstantleddet til slutt har derivert lik 0. Om alt dette gir mening og du klarer på egenhånd å finne at

$$f'(x) = 6x + 2.$$

så trenger du ikke pugge reglene som blir brukt.

Det står da igjen tre regler som en må kunne

$$\begin{aligned}
\text{Produktregelen} \quad &: \quad F(x) = f(x)g(x) \Longrightarrow F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\text{Brøkregelen} \quad &: \quad F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\
\text{Kjerneregelen} \quad &: \quad F(x) = f(g(x)) \Longrightarrow F'(x) = f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}$$

I tillegg til å kunne reglene, må en kunne se når de kan brukes. Eksempel

$$F(y) = p(y)y$$

her bruker vi produktregelen (Tenk på det som $f(y)g(y)$ der $f(y) = p(y)$ og $g(y) = y$).

$$F'(y) = p'(y)y + p(y)$$

Eksempel 2:

$$F(x) = \frac{\ln x}{x}$$

gir ved brøkregelen

$$F'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Eksempel 3

$$F(x) = e^{x^2} = f(g(x)$$

der

$$\begin{aligned} f(u) &= e^u \\ u &= g(x) = x^2 \end{aligned}$$

Som gir

$$F'(x) = f'(u)g'(x) = e^u 2x = 2xe^{x^2}$$

4 Anderderiverte og elastisiteter

Ta funksjonen $g(x) = 3x^2$ vi vet at

$$g'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$$

Den andrederiverte får vi ved å bruke samme derivasjonsregler en gang til, altså å derivere den deriverte. det gir

$$g''(x) = 6$$

Tolkningen av den andrederiverte er viktig. $g'' > 0$ betyr at funksjonen er konveks, den kummer oppover og et stasjonærpunkt er en minimum. (Positiv 2.derivert gir smilemunn.) $g'' < 0$ betyr at funksjonen er konkav og krummer nedover og et stasjonærpunkt er en maksimum. (Negativ 2.derivert gir surmunn.)

Et siste begrep vi har brukt en del er elastisiteter. For $g-$funksjonen vår blir de

$$\frac{g'(x)x}{g(x)} = \frac{dg}{dx}\frac{x}{g} = \frac{6x \cdot x}{3x^2} = 2$$

merk her at jeg har brukt en alternativ skrivemåte for den deriverte, som gir uttrykket en litt mer symmetrisk form.

5 Maksimum og minimum

Når en funksjon vokser er

$$f(x+a) > f(x)$$

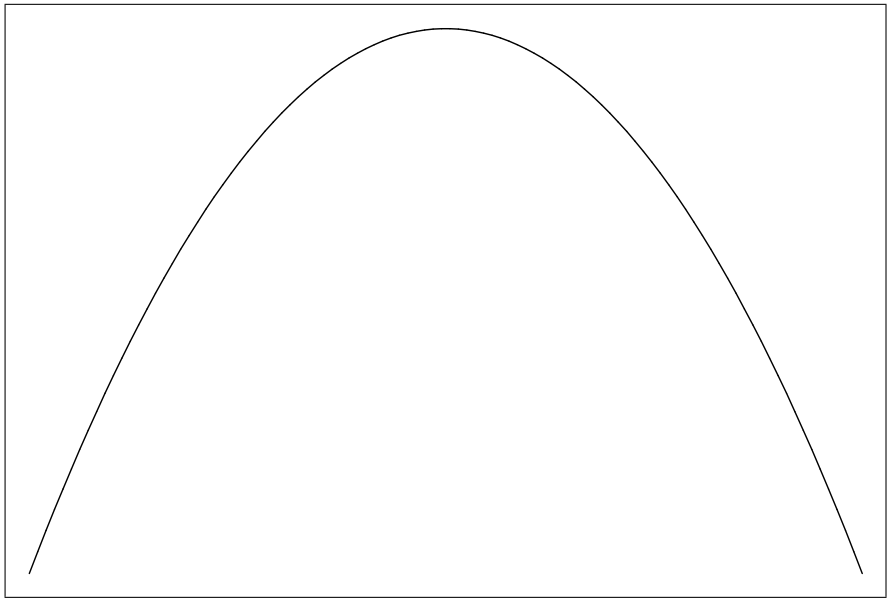
som betyr at den deriverte blir positiv, men på toppen er det flatt. Dersom $x = c$ er et maksimumspunkt er da

$$f'(c) = 0$$

mens

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{for } x < c \\ < 0 & \text{for } x > c \end{cases}$$

Dette er illustrert i figuren



Om $x = c$ er et minimum blir det motsatt, dvs

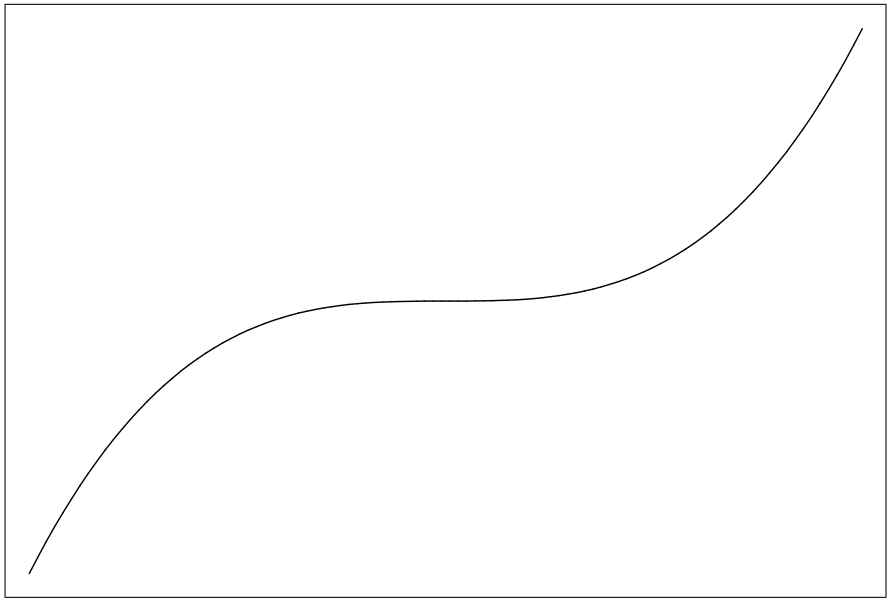
$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{for } x < c \\ > 0 & \text{for } x > c \end{cases} .$$

men selv om

$$f'(c) = 0$$

trenger det ikke være hverken minimum eller maksimum, se figuren.

6

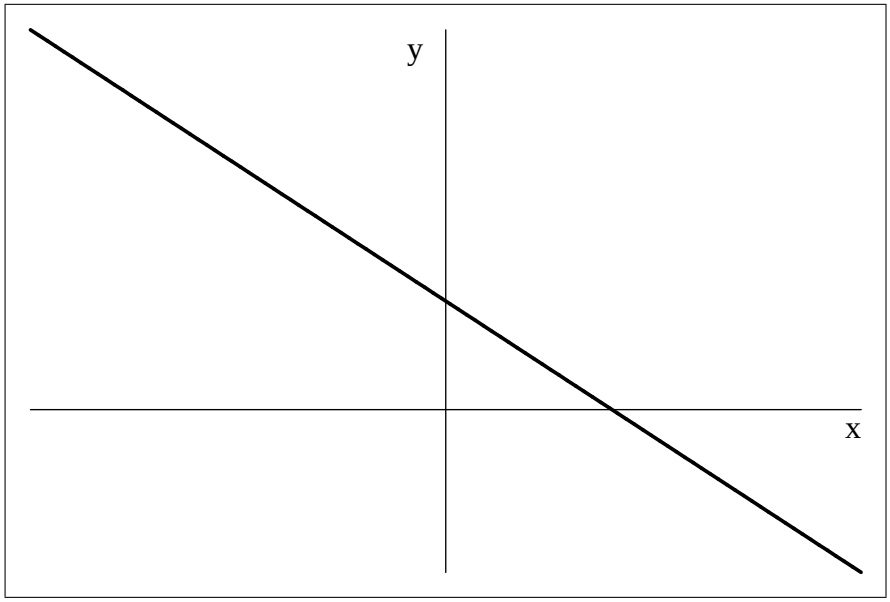


Andreordensbetingelser

For å være sikker på at vi har et maksimum (minimum) så må vi sjekke at funksjonen faktisk først vokser og så avtar (og omvendt for minimum). En enkel test er fortegnet på den andrederiverte, om

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{for } x < c \\ = 0 & \text{for } x = c \\ < 0 & \text{for } x > c \end{cases} \qquad \text{(1. derivert test)}$$

så betyr jo det at den andrederiverte faller i $x = c$, og om $f''(x) < 0$ for alle x så ser vi av figuren at førstederiverts-testen er tilfredsstilt.



7 Flere variable

Funksjoner av flere variable har vi brukt mye i økonomien, fra nyttefunksjoner $u(x, y)$ produktfunksjoner $F(K, L)$ osv. Derivasjon av slike funksjoner er ikke noe hokus pokus.

Se på funksjonene

$$\begin{aligned} f(x, y) &= yx^2 \\ g(x) &= 3x^2 \end{aligned}$$

Her er

$$g'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$$

og partiell-derivasjon av f mhp x blir helt tilsvarende

$$f'_x(x, y) = y \cdot 2x = 2xy.$$

Partiell-derivasjon betyr at vi studerer effekten av en partiell endring i en variabel mens vi holder den andre konstant. Når vi beregner $f'_x(x, y)$ kan vi tenke på y som en konstant.

8 Maksimering med flere variable

Mye er likt, en måte å tenkte det på:

Om $f(x, y)$ har et maksimum i $x = x_0$, $y = y_0$ så må funksjonen

$$g(x) = f(x, y_0)$$

ha et maksimum i $x = x_0$ Altså

$$g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0$$

og med andreordensbetingelse

$$g''(x) = f''_{xx}(x, y) < 0$$

På samme måte må vi ha

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

og

$$f''_{yy}(x, y) < 0$$

For minimum må selvsagt de andrederiverte være positive.

I tillegg har vi et krav, både for minimum og maksimum, at f''_{xy} ikke kan bli for stor:

$$f''_{xx} f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 > 0$$

Det faller utenfor kurset å forklare hvorfor dette kravet ser akkurat slik ut.

9 Maksimering med bibetingelser

Her må dere kunne Lagrange metoden

$$\begin{aligned} & \max_{x,y} f(x, y) \\ \text{s.t. } g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Gir Lagrangefunksjonen

$$\mathcal{L} = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

og vi ser på stasjonærpunktene til Lagrangefunksjonen

Et typisk eksempel er nytte-maksimering

$$\begin{aligned} & \max_{x,y} u(x, y) \\ \text{s.t. } px + qy - m &= 0 \end{aligned}$$

gir Lagrangfunksjonen

$$\mathcal{L} = u(x, y) - \lambda \left(px + qy - m \right)$$

og stasjonærpunkter

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= u'_x - \lambda p = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= u'_y - \lambda q = 0 \end{aligned}$$

som vi kan regne om til

$$\frac{u'_x}{u'_y} = \frac{p}{q}.$$

10 Logaritmer og eksponentialfunksjoner

Vi husker her at

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x \\ \ln(e^x) &= x \end{aligned}$$

Ln er hendig ved at

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

men husk at

$$\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$$

Derivasjonsregelene er også godt å kunne

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

mens

$$g(x) = e^x$$

gir

$$g'(x) = e^x$$

11 Geometriske rekker

Summen av de n første leddene en geometrisk rekke

$$S_n = a + ak + ak^2 + ... + ak^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} ak^i$$

finner vi ved å gange med k og observere at det meste blir som før

$$kS_n = ak + ak + ak^2 + ... + ak^n$$

Bare det første leddet i S_n og det siste i kS_n er spesielle. Når vi ta differansen ser vi da at

$$\begin{aligned} S_n - kS_n &= a - ak^n \\ (1-k)S_n &= a(1-k^n) \\ S_n &= a\frac{1-k^n}{1-k} \end{aligned}$$

Om du sparer 10 000 per år i ti år med 5% rente vil det etter siste beløpet stå ($a = 10000$, $n = 10$, og $k = 1,05$)

$$S_n = 10000\frac{1-1.05^{10}}{1-1.05} = 125780$$