Studentmanual

Matematisk analyse 1

8. utgave

Knut Sydsæter
Arne Strøm

Foreløpig utgave, oktober 2010

Forord

Denne manualen gir mer detaljerte løsninger på utvalgte oppgaver (merket SM) i Matematisk Analyse Bind 1, 8. utgave, Gyldendal Akademisk, 2010. Manualen må brukes sammen med fasiten i boka. Boka ble ferdigstilt under stort tidspress. Det er derfor beklageligvis en del trykkfeil. Se listen under.

Oslo, oktober 2010

Knut Sydsæter (`knutsy@econ.uio.no`)

Innhold

Rettelser til boka (enkle trykkfeil ikke tatt med):

Side 237, oppgave 9(e): En parentes for mye. Skal være $\sum_{n=1}^{\infty}(-1/2)^n$.

Side 247, linje 3: . . . i oppgave 5.
Side 371, oppgave 10, siste linje: . . . i eksempel 4.
Side 489, oppgave 1.6.4(c): $1 \le x \le 2$
Side 521, oppgave 8.R.9: Erstatt (b) med det som står i SM .
Side 523, oppgave 9.6.4(b): (i) $Q^* = 450$ (ii) $Q^* = 550$ (iii) $Q^* = 0$
Side 529, oppgave 10.3.7: . . . Se figur f10.3.7.
Side 531, oppgave 10.8.4(c): Legg til x. Se SM .
Side 534, oppgave 10.R.18: Se SM .

1 Innledende emner. Elementær algebra

1.1

1. Trenger egentlig ikke noen ytterligere forklaringer.

1.2

10. (a) Siden $25^5 \cdot 25^x = 25^{5+x}$, får vi $5 + x = 3$, og dermed $x = -2$.
(b) $3^x - 3^{x-2} = 3^{x-2}(3^2 - 1) = 3^{x-2} \cdot 8$, slik at $3^{x-2} = 3$, og dermed er $x = 3$.
(c) $3^x \cdot 3^{x-1} = 3^{2x-1} = 81 = 3^4$ når $x = 5/2$. (d) $3^5 + 3^5 + 3^5 = 3 \cdot 3^5 = 3^6$, slik at $x = 6$.
(e) $4^{-6} + 4^{-6} + 4^{-6} + 4^{-6} = 4 \cdot 4^{-6} = 4^{-5}$, slik at $x = -5$.
(f) $\dfrac{2^{26} - 2^{23}}{2^{26} + 2^{23}} = \dfrac{2^{23}(2^3 - 1)}{2^{23}(2^3 + 1)} = \dfrac{7}{9}$, slik at $x = 7$.

1.3

5. (a) $(2t-1)(t^2-2t+1) = 2t(t^2-2t+1)-(t^2-2t+1) = 2t^3-4t^2+2t-t^2+2t-1 = 2t^3-5t^2+4t-1$
(b) $(a+1)^2 + (a-1)^2 - 2(a+1)(a-1) = a^2 + 2a + 1 + a^2 - 2a + 1 - 2a^2 + 2 = 4$
(c) $(x+y+z)^2 = (x+y+z)(x+y+z) = x(x+y+z) + y(x+y+z) + z(x+y+z)$ $= x^2 + xy + xz + yx + y^2 + yz + zx + zy + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
(d) Med $u = x+y+z$ og $v = x-y-z$ er $(x+y+z)^2 - (x-y-z)^2 = u^2 - v^2 = (u+v)(u-v) = 2x(2y+2z) = 4xy + 4xz$.

1.4

10. (a) Gal. For $x = 1$ er venstresiden lik 4 og høyresiden lik 2. (Vi har at $(2^x)^2 = 2^{2x}$.)
(b) Rett fordi $a^{p-q} = a^p/a^q$ (c) Rett fordi $a^{-p} = 1/a^p$ (d) Gal. For $x = 1$ får vi $5 = 1/5$.
(e) For $x = y = 1$ får vi $a^2 = 2a$, som vanligvis er feil. (Rett er $a^{x+y} = a^x a^y$.)
(f) $2^{\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, ikke $2^{\sqrt{xy}}$.

1.5

5. Multipliser teller og nevner med hhv.: (a) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ (b) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ (c) $\sqrt{3} + 2$ (d) $x\sqrt{y} - y\sqrt{x}$
(e) $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ (f) $1 - \sqrt{x+1}$. (Du bør da etter noe regning få fasitsvarene.)

7. (a) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{4}{x^2-4}$
(b) Siden $4x + 2 = 2(2x+1)$ og $4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1)$, er $2(2x+1)(2x-1)$ minste felles multiplum. Dermed får vi at uttrykket blir
$\dfrac{(6x+25)(2x-1) - 2(6x^2+x-2)}{2(2x+1)(2x-1)} = \dfrac{21(2x-1)}{2(2x+1)(2x-1)} = \dfrac{21}{2(2x+1)}$
(c) $\dfrac{18b^2}{a^2-9b^2} - \dfrac{a}{a+3b} + 2 = \dfrac{18b^2 - a(a-3b) + 2(a^2-9b^2)}{(a+3b)(a-3b)} = \dfrac{a(a+3b)}{(a+3b)(a-3b)} = \dfrac{a}{a-3b}$
(d) $\dfrac{1}{8ab} - \dfrac{1}{8b(a+2)} + \dfrac{1}{b(a^2-4)} = \dfrac{a^2-4-a(a-2)+8a}{8ab(a^2-4)} = \dfrac{2(5a-2)}{8ab(a^2-4)} = \dfrac{5a-2}{4ab(a^2-4)}$
(e) $\dfrac{2t-t^2}{t+2} \cdot \left(\dfrac{5t}{t-2} - \dfrac{2t}{t-2}\right) = \dfrac{t(2-t)}{t+2} \cdot \dfrac{3t}{t-2} = \dfrac{-t(t-2)}{t+2} \cdot \dfrac{3t}{t-2} = \dfrac{-3t^2}{t+2}$
(f) $\dfrac{a\left(1 - \frac{1}{2a}\right)}{0.25} = \dfrac{a - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 4a - 2$, slik at $2 - \dfrac{a\left(1-\frac{1}{2a}\right)}{0.25} = 2 - (4a-2) = 4 - 4a = 4(1-a)$

8. (a) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+1}-3=\dfrac{2(x+1)+x-3x(x+1)}{x(x+1)}=\dfrac{2-3x^2}{x(x+1)}$

(b) $\dfrac{t}{2t+1}-\dfrac{t}{2t-1}=\dfrac{t(2t-1)-t(2t+1)}{(2t+1)(2t-1)}=\dfrac{-2t}{4t^2-1}$

(c) $\dfrac{3x}{x+2}-\dfrac{4x}{2-x}-\dfrac{2x-1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{3x(x-2)+4x(x+2)-(2x-1)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{7x^2+1}{x^2-4}$

(d) $\dfrac{1/x+1/y}{1/xy}=\dfrac{(1/x+1/y)\,xy}{(1/xy)\cdot xy}=\dfrac{y+x}{1}=x+y$

(e) $\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}=\dfrac{h(-2x-h)}{x^2(x+h)^2}$, slik at $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}=\dfrac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}$

(f) Multipliserer vi telleren og nevneren med $x^2-1=(x+1)(x-1)$, får vi $\dfrac{10x^2}{5x(x-1)}=\dfrac{2x}{x-1}$.

10. (a) $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{5}{20}-\frac{4}{20}=\frac{1}{20}$, slik at $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{20}\right)^{-2}=20^2=400$

(b) $n-\dfrac{n}{1-1/n}=n-\dfrac{n\cdot n}{\big(1-1/n\big)\cdot n}=n-\dfrac{n^2}{n-1}=\dfrac{n(n-1)-n^2}{n-1}=\dfrac{-n}{n-1}$

(c) Hvis $u=x^{p-q}$, da er $\dfrac{1}{1+x^{p-q}}+\dfrac{1}{1+x^{q-p}}=\dfrac{1}{1+u}+\dfrac{1}{1+1/u}=\dfrac{1}{1+u}+\dfrac{u}{1+u}=1$.

(d) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}\right)(x^2-1)}{\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)(x^2-1)}=\dfrac{x+1+1}{x^3-x-2x+2}=\dfrac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+1)}=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

1.6

3. Dersom du ikke er fortrolig med regning med ulikheter, kan det være lurt å først teste ulikhetene på noen spesielle verdier av variablene. For eksempel i (a): Er denne rett for $x=0$? Ja, da sier den at $-2<0$, som er rett. Hva med $x=2$? Da sier den at $4<0$, som er galt.

(a) Bruk fortegnsdiagram. (b) $\dfrac{2x+1}{x-3}>1 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-3}-1>0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{x-3}>0$. Bruk så et fortegnsdiagram. (En alvorlig feil er å multiplisere den gitte ulikheten med $x-3$, uten å anta at $x-3>0$. Hvis du multipliserer med $x-3$ når dette tallet er negativt, må ulikhetstegnet snus!)

(c) Fra $a^2\le 25$ ser vi med en gang at $-5\le x\le 5$. (Alternativ: $5a^2\le 125 \Leftrightarrow a^2-25\le 0 \Leftrightarrow (a-5)(a+5)\le 0$. Bruk så et fortegnsdiagram.)

(d) $2<\dfrac{3x+1}{2x+4} \Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{2x+4}-2>0 \Leftrightarrow \dfrac{3x+1-2(2x+4)}{2x+4}>0 \Leftrightarrow \dfrac{-x-7}{2x+4}>0$

Et fortegnsdiagram avslører at ulikheten er oppfylt for $-7<x<-2$.

(e) Ulikheten er ekvivalent med $\dfrac{120}{n}-\dfrac{3}{4}\le 0$, dvs. $\dfrac{3(160-n)}{4n}\le 0$. Bruk så et fortegnsdiagram. (Merk at for $n=0$ har ulikheten ingen mening. For $n=160$ har vi likhet.) (f) Lett: $g(g-2)\le 0$ osv.

(g) $p^2-4p+4=(p-2)^2$, og ulikheten reduseres til $\dfrac{p+1}{(p-2)^2}\ge 0$. Brøken har ingen mening hvis $p=2$. Konklusjonen følger. (h) $\dfrac{-n-2}{n+4}-2\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{-n-2-2n-8}{n+4}\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3n-10}{n+4}\ge 0$, osv.

(i) Se fasiten og bruk et fortegnsdiagram. (Ikke forkort med x^2. Hvis du gjør det, vil $x=0$ opptre som en gal løsning.)

4. (a) Bruk et fortegnsdiagram. (b) Ulikheten er ikke oppfylt for $x = 1$. Hvis $x \neq 1$, er den opplagt oppfylt for $x + 4 > 0$, dvs. $x > -4$ (fordi $(x-1)^2$ er positiv når $x \neq 1$). (c) Fasiten er feil. Rett: $1 \leq x \leq 2$. Bruk et fortegnsdiagram. (d) Ulikheten er ikke oppfylt for $x = 1/5$. Hvis $x \neq 1/5$, er den opplagt oppfylt for $x < 1$. (e) Bruk et fortegnsdiagram. ($(5x-1)^{11} < 0$ hvis $x < 1/5$, > 0 hvis $x > 1/5$.)
(f) $\dfrac{3x-1}{x} > x + 3 \Leftrightarrow \dfrac{3x-1}{x} - (x+3) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-(1+x^2)}{x} > 0 \Leftrightarrow x < 0$. ($1 + x^2$ er alltid positiv.)
(g) $\dfrac{x-3}{x+3} < 2x - 1 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x+3} - (2x-1) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x(x+2)}{x+3} < 0$ osv. (h) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. (i) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.)

Repetisjonsoppgaver for kapittel 1

4. (a) $(2x)^4 = 2^4x^4 = 16x^4$ (b) $2^{-1} - 4^{-1} = 1/2 - 1/4 = 1/4$, slik at $(2^{-1} - 4^{-1})^{-1} = 4$
(c) Forkort med den felles faktoren $4x^2yz^2$. (d) $-(-ab^3)^{-3} = -(-1)^{-3}a^{-3}b^{-9} = a^{-3}b^{-9}$, slik at $[-(-ab^3)^{-3}(a^6b^6)^2]^3 = [a^{-3}b^{-9}a^{12}b^{12}]^3 = [a^9b^3]^3 = a^{27}b^9$ (e) $\dfrac{a^5 \cdot a^3 \cdot a^{-2}}{a^{-3} \cdot a^6} = \dfrac{a^6}{a^3} = a^3$
(f) $\left[\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot \dfrac{8}{x^{-2}}\right]^{-3} = \left[\dfrac{x^3 \cdot 8}{8 \cdot x^{-2}}\right]^{-3} = (x^5)^{-3} = x^{-15}$ 1

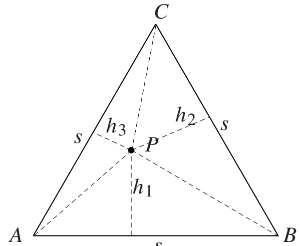
9. Alle er enkle, unntatt (c), (g) og (h): (c) $-\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - \sqrt{6}\right) = -3 + \sqrt{3}\sqrt{6} = -3 + \sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{2}$ $= -3 + 3\sqrt{2}$ (g) $(1 + x + x^2 + x^3)(1 - x) = (1 + x + x^2 + x^3) - (1 + x + x^2 + x^3)x = 1 - x^4$
(h) $(1+x)^4 = (1+x)^2(1+x)^2 = (1 + 2x + x^2)(1 + 2x + x^2)$ osv.

13. (a) og (b) er lette. (c) $ax + ay + 2x + 2y = ax + 2x + ay + 2y = (a+2)x + (a+2)y = (a+2)(x+y)$
(d) $2x^2 - 5yz + 10xz - xy = 2x^2 + 10xz - (xy + 5yz) = 2x(x + 5z) - y(x + 5z) = (2x - y)(x + 5z)$
(e) $p^2 - q^2 + p - q = (p-q)(p+q) + (p-q) = (p-q)(p+q+1)$ (f) $u^3 + v^3 - u^2v - v^2u = u^3 - u^2v + v^3 - v^2u = u^2(u-v) + v^2(v-u) = (u-v)(u^2 - v^2) = (u-v)(u-v)(u+v)$

17. (a) $\dfrac{s}{2s-1} - \dfrac{s}{2s+1} = \dfrac{s(2s+1) - s(2s-1)}{(2s-1)(2s+1)} = \dfrac{2s}{4s^2-1}$
(b) $\dfrac{x}{3-x} - \dfrac{1-x}{x+3} - \dfrac{24}{x^2-9} = \dfrac{-x(x+3) - (1-x)(x-3) - 24}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{-7(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{-7}{x-3}$
(c) Multipliser teller og nevner med x^2y^2. Det gir $\dfrac{y-x}{y^2-x^2} = \dfrac{y-x}{(y-x)(y+x)} = \dfrac{1}{x+y}$

18. (a) Forkort med $25ab$. (b) $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. Forkort med $x + y$. (c) Brøken kan skrives $\dfrac{(2a-3b)^2}{(2a-3b)(2a+3b)} = \dfrac{2a-3b}{2a+3b}$. (d) $\dfrac{4x - x^3}{4 - 4x + x^2} = \dfrac{x(2-x)(2+x)}{(2-x)^2} = \dfrac{x(2+x)}{2-x}$

22. Se på figur M1.R.22. La arealet være A. Da er arealet A lik summen av arealene av trekantene ABP, BCP og CAP, slik at $\frac{1}{2}sh_1 + \frac{1}{2}sh_2 + \frac{1}{2}sh_3 = A$. Dermed er $h_1 + h_2 + h_3 = 2A/s$, som er uavhengig av hvor P er plassert.



Figur M1.R.22

2 Innledende emner. Likninger

2.1

3. (a) Verken $x = -3$ eller $x = -4$ kan være løsninger, siden en nevner blir 0. Multiplikasjon av likningen med fellesnevneren, $(x+3)(x+4)$, gir $(x-3)(x+4) = (x+3)(x-4)$, eller $2x = 0$, og derfor er $x = 0$ eneste løsning. (b) Verken $x = -3$ eller $x = 3$ kan være løsninger. Multiplikasjon med fellesnevneren $(x-3)(x+3)$ gir $3(x+3) - 2(x-3) = 9$, som gir $x = -6$. (c) Her er $x = 0$ ikke en løsning. Multiplikasjon med fellesnevneren $15x$ gir $18x^2 - 75 = 10x^2 - 15x + 8x^2$, som gir $x = 5$.

5. (a) Multiplikasjon med fellesnevneren 12 gir $9y - 3 - 4 + 4y + 24 = 36y$, slik at $y = 17/23$. (b) Verken $x = 0$ eller $x = -2$ er løsninger. Multiplikasjon med $2x(x+2)$ gir $8(x+2) + 6x = 2(2x+2) + 7x$, slik at $x = -4$. (c) Verken $z = -1/2$, $z = -1$ eller $z = 1$ er løsninger. Multiplikasjon av teller og nevner i den første brøken med $1 - z$ gir $\dfrac{2-2z-z}{(1-z)(1+z)} = \dfrac{6}{2z+1}$. Multiplikasjon med $(1-z^2)(2z+1)$ gir $(2-3z)(2z+1) = 6 - 6z^2$, slik at $z = 4$. (d) Vi får $\frac{p}{4} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} + \frac{p}{12} - \frac{1}{3} + \frac{p}{3} = -\frac{1}{3}$. Multiplikasjon med fellesnevneren 24 gir en likning med løsningen $p = 15/16$.

6. Hvis x er antall liter per minutt som kommer fra den "tregeste" kranen (den som bruker 60 minutter på å fylle karet), er antall liter i et fullt kar $60x$. De to andre kranene gir henholdsvis $2x$ og $3x$ liter per minutt. Tiden som trengs for å fylle karet om alle de tre kranene brukes (om ikke trykket reduseres når alle kranene brukes), er da $60x/(x + 2x + 3x) = 60x/6x = 10$ minutter.

2.2

3. (a) Multiplikasjon med abx gir $b + a = 2abx$, slik at $x = \dfrac{a+b}{2ab} = \dfrac{a}{2ab} + \dfrac{b}{2ab} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$. (b) Multiplikasjon med $cx + d$ gir $ax + b = cAx + dA$, slik at $x = (dA - b)/(a - cA)$. (c) Multiplikasjon av likningen med $x^{1/2}$ gir $\frac{1}{2}p = wx^{1/2}$, og dermed $x^{1/2} = p/2w$, slik at, ved å kvadrere hver side, $x = p^2/4w^2$. (d) Multiplikasjon av hver side med $\sqrt{1+x}$ gir $1 + x + ax = 0$, slik at $x = -1/(1+a)$. (e) $x^2 = b^2/a^2$, slik at $x = \pm b/a$. (f) Vi ser øyeblikkelig at $x = 0$.

5. (a) $\alpha x - a = \beta x - b \Leftrightarrow (\alpha - \beta)x = a - b$, slik at $x = (a-b)/(\alpha - \beta)$.
(b) Kvadrering av hver side av $\sqrt{pq} = 3q + 5$ gir $pq = (3q+5)^2$, slik at $p = (3q+5)^2/q$.
(c) $Y = 94 + 0.2(Y - (20 + 0.5Y)) = 94 + 0.2Y - 4 - 0.1Y$, slik at $0.9Y = 90$, og da er $Y = 100$.
(d) Opphøy hver side i fjerde: $K^2 \dfrac{r}{2w} K = Q^4$, slik at $K^3 = 2wQ^4/r$, og dermed $K = \left(2wQ^4/r\right)^{1/3}$.
(e) Multiplikasjon av teller og nevner i brøken til venstre med $4K^{1/2}L^{3/4}$ gir $2L/K = r/w$. Herav får vi $L = rK/2w$. (f) Opphøy hver side i fjerde: $\frac{1}{16}p^4K^{-1}\frac{1}{2}\frac{r}{w} = r^4$. Det følger at $K^{-1} = 32r^3w/p^4$, slik at $K = \frac{1}{32}p^4r^{-3}w^{-1}$.

6. (a) $\dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{T} = \dfrac{T-t}{tT}$, slik at $s = \dfrac{tT}{T-t}$. (b) $\sqrt{KLM} = B + \alpha L$ gir $KLM = (B + \alpha L)^2$, og dermed $M = (B + \alpha L)^2/KL$. (c) Multipliser hver side med $x - z$: $x - 2y + xz = 4xy - 4yz$, eller $(x + 4y)z = 4xy - x + 2y$, slik at $z = (4xy - x + 2y)/(x + 4y)$.
(d) $V = C - CT/N$, slik at $CT/N = C - V$ og derfor $T = N(1 - V/C)$.

2.3

2. (a) $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 5x + (5/2)^2 + 6 - (5/2)^2 = (x - 5/2)^2 - (1/2)^2 = (x - 5/2 - 1/2)(x - 5/2 + 1/2) = (x-3)(x-2) = 0$ for $x = 2$ og $x = 3$. (b) $y^2 - y - 12 = y^2 - y + (\frac{1}{2})^2 - 12 - (\frac{1}{2})^2 =$

$(y-\frac{1}{2})^2-\frac{49}{4}=(y-4)(y+3)=0$ for $y=4$ og $y=-3$ (c) $2x^2+60x+800=2(x^2+30x+400)=2(x^2+30x+15^2+400-225)=2(x+15)^2+350$. Ingen nullpunkter og ingen faktorisering.

(d) $-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\big[x-\big(1+\sqrt{3}\big)\big]\big[x-\big(1-\sqrt{3}\big)\big]=0$ for $x=1\pm\sqrt{3}$

(e) $m^2-5m-3=\big[m-\frac{1}{2}\big(5+\sqrt{37}\big)\big]\big[m-\frac{1}{2}\big(5-\sqrt{37}\big)\big]=0$ for $m=\frac{1}{2}\big(5\pm\sqrt{37}\big)$

(f) $0.1p^2+p-2.4=0.1(p-2)(p+12)=0$ for $p=2$ and $p=-12$

5. (a) Se fasiten. (b) Hvis det første naturlige tallet er n, da er det neste $n+1$, slik at kravet blir at $n^2+(n+1)^2=13$, eller $2n^2+2n-12=0$, dvs. $n^2+n-6=0$, med løsningene $n=-3$ og $n=2$, slik at de to tallene er 2 og 3. (Hvis vi ønsker heltallige løsninger, får vi -3 og -2 i tillegg.)
(c) Hvis den korteste siden er x, er den andre $x+14$, slik at Pythagoras' setning gir $x^2+(x+14)^2=(34)^2$, eller $x^2+14x-480=0$. Løsningene er $x=16$ og $x=-30$, slik at den korteste siden er 16 cm og den lengste 30 cm. (d) Hvis den vanlige hastigheten er x km/h og den vanlige tiden som brukes er t timer, da er $xt=80$. 16 minutter er $16/60=4/15$ timer, slik at det å kjøre med hastighet $x+10$ i $t-4/15$ timer gir $(x+10)(t-4/15)=80$. Den første likningen gir $t=80/x$, som innsatt i den andre gir $(x+10)(80/x-4/15)=80$. Omordning gir $x^2+10x-3000=0$, som har positiv løsning $x=50$. Hans vanlige hastighet er derfor 50 km/t.

2.4

4. (a) Hvis de to tallene er x og y, er $x+y=52$ og $x-y=26$. Addisjon av de to likningene gir $2x=78$, slik at $x=39$, og da er $y=52-39=13$. (b) La en stol koste x og et bord y. Da er $5x+20y=1800$ og $2x+3y=420$. Løsningen av dette systemet er $x=120$ og $y=60$.
(c) La antall enheter produsert av kvalitet B være x. Da vil det bli produsert $x+\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}x$ enheter av kvalitet A, og vi får at $300\cdot\frac{3}{2}x+200x=13\,000$, eller $650x=13\,000$, slik at $x=20$. Derfor bør det produseres 30 enheter av kvalitet A og 20 enheter av kvalitet B.
(d) Hvis hun investerer x til 15 % og y til 20 %, da er $0.15x+0.2y=275$. Dessuten er $x+y=1500$. Løsningene er $x=8000$ og $y=2000$.

2.5

2. (a) Siden $5+x^2$ aldri er 0, er det ingen løsninger.
(b) Likningen er ekvivalente med $\dfrac{x^2+1+2x}{x^2+1}=0$, eller $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}=0$, slik at $x=-1$.
(c) $x=-1$ er opplagt ingen løsning. Multiplikasjon med $(x+1)^{2/3}$ gir at nevneren er lik $x+1-\frac{1}{3}x$, som er 0 for $x=-3/2$. (d) Multiplikasjon med $x-1$ og omordning gir $x(2x-1)=0$, og dermed er $x=0$ eller $x=1/2$.

3. (a) $z=0$ er en løsning. Hvis $z\neq 0$, gir forkorting med z^2 at $z-a=za+zb$, eller $z(1-(a+b))=a$. Hvis $a+b\neq 1$, er $z=a/(1-(a+b))$. Hvis $a+b=1$ er det ingen løsninger med $z\neq 0$.
(b) Likningen er ekvivalent med $(1+\lambda)\mu(x-y)=0$, slik at $\lambda=-1$, $\mu=0$ eller $x=y$.
(c) $\mu=\pm 1$ gjør likningen meningsløs. Multiplikasjon med $1-\mu^2$ gir $\lambda(1-\mu)=-\lambda$, dvs. $\lambda(2-\mu)=0$, slik at $\lambda=0$ eller $\mu=2$.
(d) Likningen er ekvivalent med $b(1+\lambda)(a-2)=0$, slik at $b=0$, $\lambda=-1$ eller $a=2$.

4. (a) Den første likningen gir $x(x-2y)=0$, slik at $x=0$ eller $x=2y$. Hvis $x=0$ gir den andre likningen $y=0$. Hvis $x=2y$ reduserer den andre likningen seg til $-4y^2+4y=0$, eller $y(1-y)=0$, med løsningene $y=0$ eller $y=1$. For $y=1$ er $x=2$. De to løsningene er derfor $(0,0)$ og $(2,1)$.

(b) Den første likningen gir $y = x$, som innsatt i den andre likningen gir $y(3y + 2) = 0$, og dermed er $y = 0$ eller $y = -2/3$. De to løsningene er derfor $(0, 0)$ og $(-2/3, -2/3)$.
(c) Den siste likningen gir $x = -2y$, som innsatt i den første likningen gir $-y(5 + 12y) = 0$, og dermed er $y = 0$ eller $y = -5/12$. De to løsningene er derfor $(0, 0)$ og $(5/6, -5/12)$.
(d) Den første likningen gir $x = \frac{1}{4}y^2$, som innsatt i den andre likningen gir $y^2(3 - \frac{1}{2}y) = 0$, og dermed er $y = 0$ eller $y = 6$. De to løsningene er derfor $(0, 0)$ og $(9, 6)$.
(e) Den siste likningen gir $x = 0$ eller $y = 0$. $x = 0$ passer i den første likningen for alle y. For $y = 0$ gir den første likningen $2x(2x^2 - 1) = 0$ og dermed er $x = 0$ eller $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Løsningene er derfor $(0, t)$ der $t \in \mathbb{R}$, og $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$. (f) Av de to likningene følger det at $2y = 2x - 1$, som innsatt i den siste likningen gir $\dfrac{1}{2x - 1/2} = 2x - 1$, eller $4x^2 - 3x - 1/2 = 0$, med løsningene $x = \frac{1}{8}(3 \pm \sqrt{17})$. De to løsningene er derfor $(\frac{1}{8}(3 + \sqrt{17}), \frac{1}{8}(-1 + \sqrt{17}))$ og $(\frac{1}{8}(3 - \sqrt{17}), \frac{1}{8}(-1 - \sqrt{17}))$.

2.6

5. (Denne kan visst også trenge noen tips.) (a) $x + 2 = \sqrt{4x + 13} \overset{*}{\Longrightarrow} (x + 2)^2 = (\sqrt{4x + 13})^2 \iff x^2 + 4x + 4 = 4x + 13 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3$. Vi ser at *hvis* x passer i $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$, så må x være lik 3 eller -3, men det er ikke sikkert at disse x-verdiene passer i den gitte likningen. Problemet er at implikasjonen $\overset{*}{\Longrightarrow}$ bare går fra venstre mot høyre – vi kan ikke slutte den andre veien. (Om $a^2 = b^2$, så vet vi at enten er $a = b$ eller $a = -b$.) Ved å sette prøve finner vi at $x = 3$ passer i den gitte likningen, mens $x = -3$ ikke passer. (For $x = -3$ får vi $x + 2 = -1$, mens $\sqrt{4x + 13} = \sqrt{1} = 1$.) Likningen har altså den ene løsningen $x = 3$.
(b) Kvadrerer vi begge sider i likningen $|x + 2| = \sqrt{4 - x}$, får vi

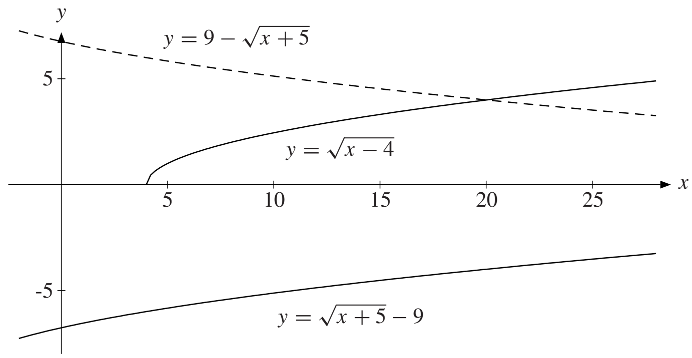
$$\begin{aligned} |x + 2|^2 = (\sqrt{4 - x})^2 &\iff (x + 2)^2 = 4 - x \iff x^2 + 4x + 4 = 4 - x \\ &\iff x^2 + 5x = 0 \iff x(x + 5) = 0. \end{aligned}$$

Den siste likningen har løsningene $x = 0$ og $x = -5$. (Et produkt er jo lik 0 nettopp når minst en av faktorene er lik 0.) Ved innsetting kontrollerer vi lett at både $x = 0$ og $x = -5$ er løsninger av den opprinnelige likningen.
(c) Hvis $x \geq 0$, så er $|x| = x$, og vi får likningen $x^2 - 2x - 3 = 0$, som har røttene $x_1 = 3$ og $x_2 = -1$. Siden vi har antatt at $x \geq 0$, er det bare $x_1 = 3$ som passer i dette tilfellet.

Hvis $x < 0$, så er $|x| = -x$, og vi får $x^2 + 2x - 3 = 0$, med røttene $x_3 = 1$ og $x_4 = -3$. Siden vi nå skal ha $x < 0$, er det bare x_4 som passer her. (Alternativ løsning: Siden $x^2 = |x|^2$, får vi annengradslikningen $|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$, som har løsningene $|x| = 3$ eller $|x| = -1$. Bare $|x| = 3$ er mulig, siden $|x| \geq 0$.)

6. (a) Hvis (i) $\sqrt{x - 4} = \sqrt{x + 5} - 9$, da får vi ved å kvadrere hver side (ii) $x - 4 = (\sqrt{x + 5} - 9)^2$, som reduserer seg til $\sqrt{x + 5} = 5$, slik at $x + 5 = 25$, og dermed $x = 20$. Dette viser at *hvis* x er en løsning av (i), da er $x = 20$. Ingen andre verdier av x kan oppfylle (i). Men når $x = 20$ er venstresiden av (i) $\sqrt{16} = 4$, mens høyresiden er $\sqrt{25} - 9 = 5 - 9 = -4$. Likningen har derfor ingen løsninger. (Merk at $4^2 = (-4)^2$, dvs. kvadratet av venstresiden er lik kvadratet av høyresiden. Dette forklarer hvorfor den falske "løsningen" $x = 20$ kom inn.)
(b) Hvis x er en løsning av (iii) $\sqrt{x - 4} = 9 - \sqrt{x + 5}$, da får vi akkurat som i (a) at x må være en løsning av (iv) $x - 4 = (9 - \sqrt{x + 5})^2$. Her er $(9 - \sqrt{x + 5})^2 = (\sqrt{x + 5} - 9)^2$, slik at likning (iv) er ekvivalent med likningen (ii) i (a). Dette betyr at (iv) har akkurat én løsning, nemlig $x = 20$. Substituere vi denne verdien av x i likning (iii), finner vi at $x = 20$ *er* en løsning av (iii).

En geometrisk forklaring på resultatene kan gis med referanse til følgende figur:



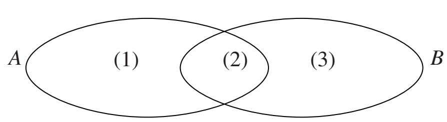
Figur M2.6.6

Vi ser at de to helopptrukne kurvene i figuren ikke har noen punkter felles, dvs. uttrykkene $\sqrt{x-4}$ og $\sqrt{x+5} - 9$ er ikke like for noen verdi av x. (Det er faktisk slik at differensen $\sqrt{x-4} - (\sqrt{x+5} - 9)$ vokser med x, slik at kurvene ikke skjærer hverandre lenger ute til høyre heller.) Dette forklarer hvorfor likningen i (a) ikke har løsning. På den annen side vil den stiplede kurven $y = 9 - \sqrt{x+5}$ skjære grafen til $y = \sqrt{x+5}$ for $x = 20$ (og bare der), som gir løsningen i (b).

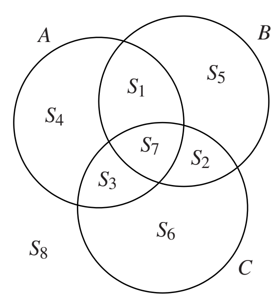
7. (a) Her har vi "hviss" siden $\sqrt{4} = 2$. (b) Et fortegnsdiagram viser at $x(x+3) < 0$ akkurat når x ligger i intervallet $(-3, 0)$. Derfor har vi en implikasjon fra venstre mot høyre (dvs. "bare hvis"), men ikke i den andre retningen. (Hvis f.eks. $x = 1 > -3$, er $x(x+3) = 4$.) (c) $x^2 < 9 \iff -3 < x < 3$, slik at $x^2 < 9$ bare hvis $x < 3$. Er f.eks. $x = -5$, er $x < 3$, men $x^2 > 9$. Vi kan altså ikke ha "hvis" her.
(d) $x^2 + 1$ er aldri 0, så vi har "hviss" her. (e) $x^2 > 0$ hvis $x > 0$, men $x^2 > 0$ også når $x < 0$.
(f) Vi har at $x^4 + y^4 = 0 \iff x = 0$ *og* $y = 0$. Er $x = 0$ og f.eks. $y = 1$, da er $x^4 + y^4 = 1$, så vi kan ikke ha "hvis" her.

2.8

8. (a) Se fasiten. (b) (i) Se på figur M2.8.8. $n(A \cup B)$ er summen av antall elementer i (1), (2) og (3), dvs. $n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A)$. På høyre side er $(A) + n(B)$ antall elementer i (1) og (2) til sammen, pluss antall elementer i (2) og (3) til sammen. Elementene i (2) telles da to ganger. Derfor må du trekke fra $n(A \cap B)$, antall elementer i (2), for å få likhet. (ii) Se igjen på figur M2.8.8. Her er $n(A \setminus B)$ antall elementer i (1). På den annen side er $n(A) - n(A \cap B)$ antall elementer i (1) og (2) til sammen, minus antall elementer i (2), og er dermed også lik antall elementer i (1).



Figur M2.8.8



Figur M2.8.9

9. Se på figur M2.8.9 og la n_k betegne antall personer i mengden merket S_k, for $k = 1, 2, \dots, 8$. Da er $n_1 + n_2 + \dots + n_8 = 1000$. Svarene innebærer at $n_1 + n_3 + n_4 + n_7 = 420$; $n_1 + n_2 + n_5 + n_7 = 316$; $n_2 + n_3 + n_6 + n_7 = 160$; $n_1 + n_7 = 116$; $n_3 + n_7 = 100$; $n_2 + n_7 = 30$; $n_7 = 16$ og $n_8 = 334$. Herav finner vi at $n_1 = 100$, $n_2 = 14$, $n_3 = 84$, $n_4 = 220$, $n_5 = 186$, $n_6 = 46$ og $n_7 = 16$. (i) $n_3 + n_4 = 304$ har lest A, men ikke B; (ii) $n_6 = 46$; (iii) $n_8 = 334$.
(b) Vi finner at $n(A \setminus B) = n_3 + n_4 = 304$, $n(C \setminus (A \cup B)) = n_6 = 46$ og $n(\Omega \setminus (A \cup B \cup C)) = n_8 = 334$. Denne siste likheten er et spesialtilfelle av $n(\Omega \setminus D) = n(\Omega) - n(D)$. (Antall personer i Ω, men ikke i D, er antall personer i Ω minus antallet personer i D.)

Repetisjonsoppgaver for kapittel 2

5. (a) Multiplikasjon av likningen med $5K^{1/2}$ gir $15L^{1/3} = K^{1/2}$. Kvadrering gir at $K = 225L^{2/3}$.
(b) Opphøy først hver side i $1/t$ slik at du får $1 + r/100 = 2^{1/t}$. Dermed er $r = 100(2^{1/t} - 1)$.
(c) $abx_0^{b-1} = p$ slik at $x_0^{b-1} = p/ab$. Opphøy så hver side i $1/(b-1)$.
(d) Opphøy først hver side i $-\rho$ slik at du får $(1-\lambda)a^{-\rho} + \lambda b^{-\rho} = c^{-\rho}$. Herav finner vi $b^{-\rho} = \lambda^{-1}(c^{-\rho} - (1-\lambda)a^{-\rho})$. Opphøy nå hver side i $-1/\rho$.

9. (a) $\Rightarrow$ sann. $\Leftarrow$ åpenbart gal. (b) $\Rightarrow$ gal (fordi $x^2 = 16$ også har løsningen $x = -4$), $\Leftarrow$ sann, for om $x = 4$, da er $x^2 = 16$. (c) $\Rightarrow$ sann, $\Leftarrow$ gal fordi $y > -2$ og $x = 3$ gir $(x-3)^2(y+2) = 0$. (d) $\Rightarrow$ og $\Leftarrow$ begge sanne, siden likningen $x^3 = 8$ bare har løsningen $x = 2$. (Med terminologi fra avsnitt 5.3 er $f(x) = x^3$ er strengt voksende. Se oppgave 5.3.3 og grafen på figur 3.3.7 side 65.)

12. Betrakt figur M2.8.9, og la n_k betegne antall personer i mengden merket S_k, for $k = 1, 2, \dots, 8$. Mengdene A, B og C referer nå til dem som studerer hhv. engelsk, fransk og spansk. Siden 10 studerer alle de tre språkene, er $n_7 = 10$. Det er 15 som studerer fransk og spansk slik at $15 = n_2 + n_7$, og derfor er $n_2 = 5$. Videre er $32 = n_3 + n_7$, slik at $n_3 = 22$. Dessuten har vi at $110 = n_1 + n_7$, slik at $n_1 = 100$. Resten av informasjonen medfører at $52 = n_2 + n_3 + n_6 + n_7$, slik at $n_6 = 52 - 5 - 22 - 10 = 15$. Dessuten er $220 = n_1 + n_2 + n_5 + n_7$, slik at $n_5 = 220 - 100 - 5 - 10 = 105$. Endelig er $780 = n_1 + n_3 + n_4 + n_7$, slik at $n_4 = 780 - 100 - 22 - 10 = 648$. Svarene på de tre problemene er dermed: (a): $n_1 = 100$ (b): $n_3 + n_4 = 670$ (c) $1000 - \sum_{i=1}^{8} n_i = 1000 - 905 = 95$.

3 Funksjoner av én variabel

3.2

1. (a) $f(0) = 0^2 + 1 = 1$, $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$, $f(1/2) = (1/2)^2 + 1 = 1/4 + 1 = 5/4$ og $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$. (b) (i) Siden $(-x)^2 = x^2$ er $f(x) = f(-x)$ for alle x. (ii) $f(x+1) = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 + 1 = x^2 + 2x + 2$ og $f(x) + f(1) = x^2 + 1 + 2 = x^2 + 3$. Vi har likhet hvis og bare hvis $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 3$, dvs. hvis og bare hvis $x = 1/2$. (iii) $f(2x) = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1$ og $2f(x) = 2x^2 + 2$. Nå er $4x^2 + 1 = 2x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 = 1/2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1/2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

9. (a) Nei: $f(2+1) = f(3) = 18$, mens $f(2) + f(1) = 10$. (b) Ja: $f(2+1) = f(2) + f(1) = -9$. (c) Nei: $f(2+1) = f(3) = \sqrt{3} \approx 1.73$, mens $f(2) + f(1) = \sqrt{2} + 1 \approx 2.41$.

14. (a) Vi må kreve at $5 - x \geq 0$, og dermed $x \leq 5$. (b) Nevneren $x^2 - x = x(x-1)$ må være forskjellig fra 0, slik at $x \neq 0$ og $x \neq 1$. (c) For det første må nevneren være forskjellig fra null, slik at vi må kreve at $x \neq 2$ og $x \neq -3$. Dessuten, siden vi bare kan ta kvadratroten av et ikke-negativt tall, må brøken $(x-1)/(x-2)(x+3)$ være ≥ 0. Et fortegnsdiagram avslører at $D_f = (-3, 1] \cup (2, \infty)$. Merk spesielt at funksjonen er definert med verdi 0 i $x = 1$.

16. Siden g opplagt er definert for alle $x \geq -2$ er $D_g = [-2, \infty)$. Merk at $g(-2) = 1$ og $g(x) \leq 1$ for alle $x \in D_f$. Når x vokser fra -2 til ∞, vil $g(x)$ avta fra 1 til $-\infty$, slik at $R_g = (-\infty, 1]$.

3.4

3. Hvis $D = a + bP$, er $200 = a + 10b$ og $150 = a + 15b$. Løsningene av disse likningene er $a = 300$ og $b = -10$, slik at $D = 300 - 10P$.

11. Mengden av punkter som oppfyller ulikheten $3x+4y \leq 12$ er de som ligger på eller under den rette linjen $3x + 4y = 12$. (Se forklaringen i eksempel 3.4.6 på en liknende ulikhet.) De punktene som oppfyller ulikheten $x - y \leq 1$, eller ekvivalent, $y \geq x - 1$, er de som ligger på eller over den rette linjen $x - y = 1$. De punktene som oppfyller ulikheten $3x + y \geq 3$, eller ekvivalent, $y \geq 3 - 3x$, er de som ligger på eller over den rette linjen $3x + y = 3$. Mengden av punkter som oppfyller alle disse tre ulikhetene samtidig, er mengden skyggelagt på figur f3.4.11 i fasiten.

3.6

2. (a) Se fasiten. (b) Formel (3.6.4) med $a = -\frac{1}{2}$ og $b = -1$ gir $x = -1$ som maksimumspunkt. (Alternativt, ved å fullføre kvadratet: $f(x) = -\frac{1}{2}(x^2+2x-3) = -\frac{1}{2}(x^2+2x+1-4) = -\frac{1}{2}(x+1)^2+2$, som viser at $f(x)$ har maksimum 2 i $x = -1$.) Grafen er gitt i fasiten. (c) Bruk (2.3.5), eller multipliser ut den gitte formelen for $f(x)$. Bruk et fortegnsdiagram til å studere fortegnsvariasjonen til $f(x)$.

5. $(1, -3)$ tilhører grafen hvis $-3 = a + b + c$, $(0, -6)$ tilhører grafen hvis $-6 = c$ og $(3, 15)$ tilhører grafen hvis $15 = 9a + 3b + c$. Det følger at $a = 2$, $b = 1$ og $c = -6$.

9. Ved å multiplisere ut uttrykket for $U(x)$ får vi $U(x) = -(1 + r^2)x^2 + 8(r - 1)x$. Ved å anvende (3.6.4) med $a = -(1 + r^2)$ og $b = 8(r - 1)$ finner vi den verdien av x som maksimerer $U(x)$.

10. (a) Se fasiten. (b) Vi finner at $A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, $B = 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$ og $C = b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$. Hvis $B^2-4AC > 0$, da viser formel (2.3.4) at likningen $f(x) = Ax^2+Bx+C = 0$ har to forskjellige røtter, som er umulig siden $f(x) \geq 0$ for alle x. Dermed er $B^2 \leq 4AC$. Innsetting av uttrykkene for A, B og C og forkorting med 4 gir resultatet!

3.7

1. (a) Heltallige røtter må gå opp i 6. Derfor er ± 1, ± 2, ± 3 og ± 6 de eneste mulige heltallige løsningene. Vi finner at $-2, -1, 1, 3$ alle er røtter, og siden det ikke kan være mer enn 4 røtter i en fjerdegradslikning, har vi funnet alle. (b) De samme mulige heltallige løsningene som i (a). Innsetting viser at bare -6 og 1 er heltallige løsninger. (Den tredje roten er $-1/2$.) (c) Verken 1 eller -1 er røtter, slik at det ikke fins noen heltallsløsninger. (d) Multipliser likningen med 4 for å få heltallige koeffisienter. Da er ± 1, ± 2 og ± 4 de eneste mulige heltallsløsningene. Vi finner at 1, 2 og -2 er heltallsløsningene.

3. (a) Svaret er $2x^2 + 2x + 4 + 3/(x - 1)$, fordi

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 \qquad\quad + 2x - 1) : (x - 1) = 2x^2 + 2x + 4 \\
\underline{2x^3 - 2x^2 \qquad\quad} \\
\qquad\quad 2x^2 + 2x - 1 \\
\qquad\quad \underline{2x^2 - 2x \qquad} \\
\qquad\qquad\qquad 4x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{4x - 4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 3 \quad \text{rest}
\end{array}
$$

(b) Svaret er $x^2 + 1$, fordi

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + x^3 + x^2 + x) : (x^2 + x) = x^2 + 1 \\
\underline{x^4 + x^3 \qquad\qquad\;} \\
\qquad\qquad x^2 + x \\
\qquad\qquad \underline{x^2 + x} \\
\qquad\qquad\qquad 0 \quad \text{ingen rest}
\end{array}
$$

(c) Svaret er $3x^5 + 6x^3 - 3x^2 + 12x - 12 + (28x^2 - 36x + 13)/(x^3 - 2x + 1)$, fordi

$$
\begin{array}{l}
(3x^8 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2 \qquad + 1) : (x^3 - 2x + 1) = 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 + 12x - 12 \\
\underline{3x^8 - 6x^6 + 3x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad} \\
\qquad 6x^6 - 3x^5 \qquad\qquad\quad + \; x^2 \qquad + 1 \\
\qquad \underline{6x^6 \qquad - 12x^4 + 6x^3 \qquad\qquad\qquad\quad} \\
\qquad\quad - 3x^5 + 12x^4 - 6x^3 + x^2 \qquad + 1 \\
\qquad\quad \underline{- 3x^5 \qquad + 6x^3 - 3x^2 \qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad 12x^4 - 12x^3 + 4x^2 \qquad + 1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{12x^4 \qquad - 24x^2 + 12x \quad\;} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 12x^3 + 28x^2 - 12x + 1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{- 12x^3 \qquad + 24x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 28x^2 - 36x + 13 \quad \text{rest}
\end{array}
$$

(d) Svaret er $x^3 - 4x^2 + 3x + 1 - 4x/(x^2 + x + 1)$, fordi

$$
\begin{array}{l}
(x^5 - 3x^4 \qquad\qquad\qquad + 1) : (x^2 + x + 1) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1 \\
\underline{x^5 + x^4 + x^3 \qquad\qquad\qquad\;} \\
\quad - 4x^4 - x^3 \qquad\qquad + 1 \\
\quad \underline{- 4x^4 - 4x^3 - 4x^2 \qquad\;} \\
\qquad\qquad 3x^3 + 4x^2 \qquad + 1 \\
\qquad\qquad \underline{3x^3 + 3x^2 + 3x \quad\;} \\
\qquad\qquad\qquad x^2 - 3x + 1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{x^2 + x + 1} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 4x \qquad \text{rest}
\end{array}
$$

8. (a) Siden grafen skjærer x-aksen for $x = -1$ og $x = 3$, prøver vi med den kvadratiske funksjonen $f(x) = a(x+1)(x-3)$. Siden $f(1) = -4a$, og grafen passerer gjennom punktet $(1, -2)$, er $f(1) = -2 = -4a$. Dermed er $a = 1/2$ og $y = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 3)$. (b) Siden likningen $f(x) = 0$ har røttene $x = -3, 1, 2$, prøver vi med en kubisk funksjon, $f(x) = b(x + 3)(x - 1)(x - 2)$. Siden $f(0) = 6b$ og grafen viser at $f(0) = -12$ er $b = -2$, og altså $y = -2(x + 3)(x - 1)(x - 2)$.

(c) Vi prøver med et polynom av formen $f(x) = c(x-2)^2(x+3)$, med $x = 2$ som en dobbeltrot. Da er $f(0) = 12c$. Fra grafen ser vi at $f(0) = 6$, slik at $c = 1/2$. Dermed er $y = \frac{1}{2}(x+3)(x-2)^2$.

9. Polynomdivisjon gir

$$\begin{array}{l} (x^2 \quad - \gamma x \qquad\qquad) : (x+\beta) = x - (\beta+\gamma) \\ \underline{x^2 \quad + \beta x \qquad\qquad} \\ \quad - (\beta+\gamma)x \\ \quad \underline{- (\beta+\gamma)x - \beta(\beta+\gamma)} \\ \qquad\qquad\quad \beta(\beta+\gamma) \quad \text{rest} \end{array}$$

og dermed

$$E = \alpha\Big(x - (\beta+\gamma) + \frac{\beta(\beta+\gamma)}{x+\beta}\Big) = \alpha x - \alpha(\beta+\gamma) + \frac{\alpha\beta(\beta+\gamma)}{x+\beta}$$

3.8

5. (a) $3^{5t}9^t = 3^{5t}(3^2)^t = 3^{5t+2t} = 3^{7t}$ og $27 = 3^3$, slik at $7t = 3$, og dermed $t = 3/7$.
(b) $9^t = (3^2)^t = 3^{2t}$ og $\frac{1}{3}(27)^{1/5} = \frac{1}{3}(3^3)^{1/5} = \frac{1}{3}3^{3/5} = 3^{-2/5}$, og da er $2t = -2/5$, slik at $t = -\frac{1}{5}$.

3.9

13. Anta at $y = Ab^x$, med $b > 0$. I (a) har vi, siden grafen passerer gjennom punktene $(x, y) = (0, 2)$ og $(x, y) = (2, 8)$, at $2 = Ab^0$, og dermed $A = 2$, og $8 = 2b^2$, og dermed $b = 2$. Altså er $y = 2 \cdot 2^x$.
I (b) har vi $\frac{2}{3} = Ab^{-1}$ og $6 = Ab$. Det følger at $A = 2$ og $b = 3$, slik at $y = 2 \cdot 3^x$.
I (c) er $4 = Ab^0$ og $1/4 = Ab^4$. Det følger at $A = 4$ og $b^4 = 1/16$, slik at $b = 1/2$. Derfor er $y = 4(\frac{1}{2})^x$.

3.10

4. (a) $3^x4^{x+2} = 8 \Leftrightarrow 3^x4^x4^2 = 8 \Leftrightarrow 12^x = 8/4^2 = 1/2$. Tar vi (den naturlige) logaritmen på begge sider, får vi $x \ln 12 = \ln 1/2 = -\ln 2$ slik at $x = -\ln 2/\ln 12$.
(b) Siden $\ln x^2 = 2\ln x$, får vi $3\ln x + 4\ln x = 6 \Leftrightarrow 7\ln x = 6 \Leftrightarrow \ln x = 6/7 \Leftrightarrow x = e^{6/7}$.
(c) $4^x - 4^{x-1} = 3^{x+1} - 3^x \Leftrightarrow 4^x(1 - 1/4) = 3^x(3-1) \Leftrightarrow (4/3)^x = 8/3 \Leftrightarrow x\ln(4/3) = \ln(8/3) \Leftrightarrow x = \ln(8/3)/\ln(4/3)$. (Alternativt: $4^{x-1}(4-1) = 3^{x-1}(9-3)$, slik at $(4/3)^{x-1} = 2$, og da er $x = 1 + \ln 2/\ln(4/3)$. Dette er det samme svaret som før fordi $\ln(8/3)/\ln(4/3) = \ln[2(4/3)]/\ln(4/3) = [\ln 2 + \ln(4/3)]/\ln(4/3) = 1 + \ln 2/\ln(4/3)$.

6. (a) $\ln(x/e^2) = \ln x - \ln e^2 = \ln x - 2$ (b) $\ln(xz/y) = \ln(xz) - \ln y = \ln x + \ln z - \ln y$
(c) $\ln(e^3x^2) = \ln e^3 + \ln x^2 = 3 + 2\ln x$ for $x > 0$. (Generelt er $\ln x^2 = 2\ln|x|$.)
(d) Når $x > 0$ er $\frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{2}\ln(1/x) - \ln(x+1) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{2}(-\ln x) - \ln(x+1) = 2\ln x - \ln(x+1) = \ln x^2 - \ln(x+1) = \ln[x^2/(x+1)]$.

7. (a) $\ln(Ae^{rt}) = \ln(Be^{st})$, slik at $\ln A + rt = \ln B + st$, dvs. $(r-s)t = \ln(B/A)$, så $t = \dfrac{1}{r-s}\ln\dfrac{B}{A}$.
(b) $t = \dfrac{1}{0.09 - 0.02}\ln\dfrac{5.6 \cdot 10^{12}}{1.2 \cdot 10^{12}} = \dfrac{1}{0.07}\ln\dfrac{14}{3} \approx 22$. Etter dette vil de to landene ha samme BNP etter (tilnærmet) 22 år, altså i år 2012.

Repetisjonsoppgaver for kapittel 3

4. (a) Vi må ha $x^2 \geq 1$, dvs. $x \geq 1$ eller $x \leq -1$. (Se figur 3.3.6, side 65.)
(b) Kvadratroten er definert hvis $x \geq 4$, men $x = 4$ gjør nevneren 0, slik at vi må kreve $x > 4$.
(c) Vi må ha $(x-3)(5-x) \geq 0$, dvs. $3 \leq x \leq 5$ (ved å bruke et fortegnsdiagram).

7. (a) Ettpunkts-formelen gir $y - 3 = -3(x+2)$, eller $y = -3x - 3$.
(b) To-punktsformelen gir: $y - 5 = \dfrac{7-5}{2-(-3)}(x-(-3)) = \dfrac{2}{5}(x+3)$, eller $y = 2x/5 + 31/5$.
(c) $y - b = \dfrac{3b-b}{2a-a}(x-a)$, eller $y = (2b/a)x - b$.

13. $f(x) = \dfrac{a + b/x}{1 + c/x} \to a$ når $x \to \infty$, slik at $a > 0$. (Den horisontale stiplede linjen ligger over x-aksen.) Grafen har et brudd for $x = -c$ og $-c > 0$, slik at $c < 0$. (Den vertikale stiplede linjen ligger til høyre for y-aksen.) Videre er $f(0) = b/c > 0$, slik at $b < 0$.

Grafen til g er en parabel med åpningen opp, slik at $p > 0$. Videre er $r = g(0) < 0$. Endelig har $g(x)$ et minimum for $x = x^* = -q/2p$. Siden $x^* > 0$ og $p > 0$, slutter vi at $q < 0$.

14. (a) $p(x) = x(x^2 + x - 12) = x(x-3)(x+4)$, fordi $x^2 + x - 12 = 0$ for $x = 3$ og $x = -4$.
(b) ± 1, ± 2, ± 4, ± 8 er de eneste mulige heltallige nullpunktene. Vi finner at $q(2) = q(-4) = 0$, slik at $2(x-2)(x+4) = 2x^2 + 4x - 16$ er en faktor i $q(x)$. Ved polynomdivisjon finner vi at $q(x) : (2x^2 + 4x - 16) = x - 1/2$, slik at $q(x) = 2(x-2)(x+4)(x-1/2)$.

15. Siden $p(2) = 0$ er $x - 2$ en faktor i $p(x)$. De to andre nullpunktene må være nullpunkter for kvotienten $p(x) : (x-2) = \frac{1}{4}(x^2 - 2x - 15)$, altså løsninger av likningen $x^2 - 2x - 15 = 0$. Denne likningen har røttene $x = -3$ og $x = 5$.

17. (a) $e^{x^2-3x+1/2} = e^{1/2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1/2 = 1/2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$, med løsningene $x = 0$ og $x = 3$.
(b) $(e^x - 1)(e^x + 1) = 3 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 3 \Leftrightarrow e^{2x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln\sqrt{4} = \ln 2$
(c) $8^{\ln x^2} = 64 \Leftrightarrow 8^{\ln x^2} = 8^2 \Leftrightarrow \ln x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = e^2 \Leftrightarrow x = \pm e$. (d) $x = 2^{-1/\gamma}$
(e) $5 - x^2 = x^2 + 4x - 11 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ eller $x = 2$. Men for $x = -4$ er begge sidene av den gitte likheten meningsløse, så den eneste løsningen er $x = 2$.
(f) $u = e^t$ gir $u^2 + 3u - 10 = 0$, med løsningen $u = -5$ og $u = 2$. Siden $u = e^t$ ikke kan være negativ, må vi ha $e^t = 2$, og dermed $t = \ln 2$.

4 Mer om funksjoner

4.1

3. Likevektsbetingelsen er $106 - P = 10 + 2P$, og derfor er $P = 32$. Den nye etterspørselen er $Q = 106 - 32 = 74$. Se figur f4.1.3 på side 502 i boka.

5. $f(y^* - d) = f(y^*) - c$ gir $A(y^* - d) + B(y^* - d)^2 = Ay^* + B(y^*)^2 - c$, eller $Ay^* - Ad + B(y^*)^2 - 2Bdy^* + Bd^2 = Ay^* + B(y^*)^2 - c$. Det følger at $y^* = [Bd^2 - Ad + c]/2Bd$.

4.2

6. Hvis $f(x) = 3x + 7$, da er $f(f(x)) = f(3x+7) = 3(3x+7) + 7 = 9x + 28$. $f(f(x^*)) = 100$ krever $9x^* + 28 = 100$, og dermed er $x^* = 8$.

4.3

4. (a) f har en invers siden den er en-entydig. Dette viser tabellen ved at alle tallene i den andre linjen, definisjonsområdet til f^{-1}, er forskjellige. Den inverse tilordner til hvert tall i den andre linjen det tilhørende tallet i den første linjen. (b) Siden $f(0) = 4$ og $f(x)$ vokser med 2 for hver enhets økning av x, er $f(x) = 2x + 4$. Ved å løse $y = 2x + 4$ mhp. x får vi $x = \frac{1}{2}y - 2$, og derfor er $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

4.4

1. (a) $(x^3 - 1)^{1/3} = y \Leftrightarrow x^3 - 1 = y^3 \Leftrightarrow x = (y^3 + 1)^{1/3}$. Hvis vi bruker x som uavhengig variabel, er $f^{-1}(x) = (x^3 + 1)^{1/3}$. $\mathbb{R}$ er definisjonsområdet og verdimengden for både f og f^{-1}.
(b) D_f er mengden av alle $x \neq 2$. For $x \neq 2$ får vi $\dfrac{x+1}{x-2} = y \Leftrightarrow x + 1 = y(x-2) \Leftrightarrow x = \dfrac{-2y-1}{1-y} = \dfrac{2y+1}{y-1}$, slik at $f^{-1}(x) = (2x+1)/(x-1)$. $D_{f^{-1}}$ er alle $x \neq 1$.
(c) Her $y = (1 - x^3)^{1/5} + 2 \Leftrightarrow y - 2 = (1 - x^3)^{1/5} \Leftrightarrow (y-2)^5 = 1 - x^3 \Leftrightarrow x^3 = 1 - (y-2)^5 \Leftrightarrow x = (1 - (y-2)^5)^{1/3}$. Dermed er $f^{-1}(x) = (1 - (x-2)^5)^{1/3}$. $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

2. (a) Definisjonsområdet er $\mathbb{R}$ og verdimengden er $(0, \infty)$, slik at den inverse er definert på $(0, \infty)$. Fra $y = e^{x+4}$ får vi $\ln y = x + 4$, slik at $x = \ln y - 4$, $y > 0$.
(b) Definisjonsområdet er $(0, \infty)$ og verdimengden er $\mathbb{R}$, som blir definisjonsområdet for den inverse. Fra $y = \ln x - 4$ får vi $\ln x = y + 4$ og dermed er $x = e^{y+4}$.
(c) Definisjonsområdet er $\mathbb{R}$. y er strengt voksende, $x \to -\infty$ medfører at $y \to \ln 2$ og $x \to \infty$ medfører at $y \to \infty$. Dermed er verdimengden til funksjonen $(\ln 2, \infty)$. Fra $y = \ln\big(2 + e^{x-3}\big)$ får vi $2 + e^{x-3} = e^y$, slik at $e^{x-3} = e^y - 2$, og derfor er $x = 3 + \ln(e^y - 2)$, $y > \ln 2$.

4.5

1. (a) Det er naturlig først å undersøke om kurven skjærer aksene, ved å sette $x = 0$, og så $y = 0$. Dette gir de 4 punktene $\big(0, \pm\sqrt{3}\big)$ og $\big(\pm\sqrt{6}, 0\big)$. Velg så noen verdier av $-\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$, og beregn de tilhørende verdiene av y. For eksempel finner vi lett punktene $\big(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\big)$. Forklar hvorfor grafen er symmetrisk om x-aksen og y-aksen. (Kurven kalles en ellipse. Se neste avsnitt og figuren i fasiten.)
(b) Flytt grafen til $y = \sqrt{x}$ (figur 3.3.8, side 65) en enhet til høyre. Speil resultatet om x-aksen.
(c) Denne grafen er også symmetrisk om x-aksen og y-aksen. (Hvis (a, b) ligger på grafen, så gjør også $(a, -b)$, $(-a, b)$ og $(-a, -b)$ det. (Grafen er en hyperbel. Se neste avsnitt.)

2. Vi må ha $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Hvis (a, b) ligger på grafen, så gjør også (b, a) det, så grafen er symmetrisk om linjen $y = x$. (25, 0), (0, 25), (25/4 og 25/4) ligger alle på grafen. Se figur f4.5.2 i fasiten.

4. (a) Se figur f4.5.4 side 504. For $a > 1$ er $g(a) = 1 - \sqrt{a-1}$, og $g(a) < 1$ (se figuren), slik at $g(g(a)) = g(1 - \sqrt{a-1}) = (1 - \sqrt{a-1})^2 - 2(1 - \sqrt{a-1}) + 2 = a$. For $a \leq 1$ er $g(a) = a^2 - 2a + 2$, og $g(a) \geq 1$, slik at $g(g(a)) = 1 - \sqrt{a^2 - 2a + 2 - 1} = 1 - \sqrt{(a-1)^2} = 1 + (a - 1) = a$. Merk at $\sqrt{(a-1)^2} = -(a-1)$ når $a \leq 1$.) (b) Siden $g(g(a)) = a$, er g sin egen invers.

4.6

8. $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow x^2 + Ax + y^2 + By + C = 0 \Leftrightarrow x^2 + Ax + \big(\frac{1}{2}A\big)^2 + y^2 + By + \big(\frac{1}{2}B\big)^2 = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 - 4C) \Leftrightarrow \big(x + \frac{1}{2}A\big)^2 + \big(y + \frac{1}{2}B\big)^2 = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 - 4C)$. Dette er likningen for en sirkel med sentrum i $\big(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\big)$ og radius $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$. Hvis $A^2 + B^2 = 4C$, består grafen bare av punktet $\big(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\big)$. For $A^2 + B^2 < 4C$ er løsningsmengden tom.

Repetisjonsoppgaver for kapittel 4

6. (a) f er strengt voksende for $e^x > 2$, dvs. $x > \ln 2$. Verdimengden er $\mathbb{R}$ (siden $f(x) \to -\infty$ når $x \to \ln 2^+$, og $f(x) \to \infty$ når $x \to \infty$). Fra $y = 3 + \ln(e^x - 2)$ får vi $\ln(e^x - 2) = y - 3$, slik at $e^x - 2 = e^{y-3}$, eller $e^x = 2 + e^{y-3}$. Dermed er $x = \ln(2 + e^{y-3})$, slik at $f^{-1}(x) = \ln(2 + e^{x-3})$, $x \in \mathbb{R}$. (b) Merk at $e^{-\lambda x} \to \infty$ når $x \to -\infty$ og $e^{-\lambda x} \to 0$ når $x \to \infty$. Derfor vil $f(x) \to 0$ når $x \to -\infty$ og $f(x) \to 1$ når $x \to \infty$. Dermed er $V_f = D_{f^{-1}} = (0, 1)$. Fra $y = \dfrac{a}{e^{-\lambda x} + a}$ får vi $e^{-\lambda x} + a = a/y$, slik at $e^{-\lambda x} = a(1/y - 1)$, eller $-\lambda x = \ln a + \ln(1/y - 1)$. Derfor er $x = -(1/\lambda)\ln a - (1/\lambda)\ln(1/y - 1)$, og den inverse er $f^{-1}(x) = -(1/\lambda)\ln a - (1/\lambda)\ln(1/x - 1)$ for $x \in (0, 1)$.

9. (a) Uttrykkene representerer totalpris (pris pluss transportkostnader) for varer levert til et sted med koordinater (x, y) fra hhv. A og B. (b) Kurven som separerer de to markedene må være bestemt ved at totalprisen er den samme: $p + 10\sqrt{x^2 + y^2} = p + 5\sqrt{(x - 60)^2 + y^2}$, som reduserer seg til $2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 60)^2 + y^2}$. Kvadrering og ordning gir $x^2 + 40x + y^2 = 1200$, eller $x^2 + 40x + 20^2 + y^2 = 1200 + 400$, slik at $(x + 20)^2 + y^2 = 1600$.

5 Derivasjon

5.2

3. I (a)–(c) bruker vi oppskriften i (5.2.3) for å finne stigningstallet til tangenten.
(a) (A): $f(a + h) = f(0 + h) = 3h + 2$ (B): $f(a + h) - f(a) = f(h) - f(0) = 3h + 2 - 2 = 3h$ (C)–(D): $[f(h) - f(0)]/h = 3$ (E): $[f(h) - f(0)]/h = 3 \to 3$ når $h \to 0$, slik at $f'(0) = 3$. Stigningstallet til tangenten i $(0, 2)$ er 3.
(b) (A): $f(a+h) = f(1+h) = (1+h)^2 - 1 = 1 + 2h + h^2 - 1 = 2h + h^2$ (B): $f(1+h) - f(1) = 2h + h^2$ (C)–(D): $[f(1 + h) - f(1)]/h = 2 + h$ (E): $[f(1 + h) - f(1)]/h = 2 + h \xrightarrow[h\to 0]{} 2$, slik at $f'(1) = 2$.
(c) (A): $f(3+h) = 2 + 3/(3+h)$ (B): $f(3+h) - f(3) = 2 + 3/(3+h) - 3 = -h/(3+h)$ (C)–(D): $[f(3 + h) - f(3)]/h = -1/(3 + h)$ (E): $[f(3 + h) - f(3)]/h = -1/(3 + h) \to -1/3$ når $h \to 0$, slik at $f'(3) = -1/3$. (d) $[f(h) - f(0)]/h = (h^3 - 2h)/h = h^2 - 2 \xrightarrow[h\to 0]{} -2$, slik at $f'(0) = -2$.
(e) $\dfrac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \dfrac{-1 + h + 1/(-1 + h) + 2}{h} = \dfrac{h}{-1 + h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, slik at $f'(0) = 0$.
(f) $\dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \dfrac{(1 + h)^4 - 1}{h} = \dfrac{h^4 + 4h^3 + 6h^2 + 4h + 1 - 1}{h} = h^3 + 4h^2 + 6h + 4 \to 4$ når $h \to 0$, slik at $f'(1) = 4$.

8. (a) $\big(\sqrt{x + h} - \sqrt{x}\big)\big(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\big) = x + h + \sqrt{x + h}\,\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{x + h} - x = x + h - x = h$
(b) og (c): $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \dfrac{(\sqrt{x + h} - \sqrt{x})(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} = \dfrac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}} \xrightarrow[h\to 0]{} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
(d) $x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}$

10. Vis først ved utmultiplisering at $[(x + h)^{2/3} + (x + h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}][(x + h)^{1/3} - x^{1/3}] = h$. Det følger at $\dfrac{(x + h)^{1/3} - x^{1/3}}{h} = \dfrac{1}{(x + h)^{2/3} + (x + h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \xrightarrow[h\to 0]{} \dfrac{1}{3x^{2/3}} = \dfrac{1}{3}x^{-2/3}$.

5.5

4. (a) $\dfrac{1/3 - 2/3h}{h - 2} = \dfrac{3h\big(1/3 - 2/3h\big)}{3h(h - 2)} = \dfrac{h - 2}{3h(h - 2)} = \dfrac{1}{3h} \to \dfrac{1}{6}$ når $h \to 2$
(b) $(x^2 - 1)/x^2 = 1 - 1/x^2 \to -\infty$ når $x \to 0$.

(c) $\dfrac{32t-96}{t^2-2t-3} = \dfrac{32(t-3)}{(t-3)(t+1)} = \dfrac{32}{t+1} \underset{t\to 3}{\longrightarrow} 8$, slik at $\sqrt[3]{\dfrac{32t-96}{t^2-2t-3}} \underset{t\to 3}{\longrightarrow} \sqrt[3]{8} = 2$.

(d) $\dfrac{\sqrt{h+3}-\sqrt{3}}{h} = \dfrac{(\sqrt{h+3}-\sqrt{3})(\sqrt{h+3}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{h+3}+\sqrt{3})} = \dfrac{1}{\sqrt{h+3}+\sqrt{3}} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

(e) $\dfrac{t^2-4}{t^2+10t+16} = \dfrac{(t+2)(t-2)}{(t+2)(t+8)} = \dfrac{t-2}{t+8} \to -\dfrac{2}{3}$ når $t \to -2$.

(f) Vi har at $4-x = (2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})$, slik at $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{2+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4}$.

5. (a) $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1} = x+3 \to 4$ når $x \to 1$.

(b) $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = x+3 \to 5$ når $x \to 2$, der vi brukte resultatet i (a). (Alternativt: $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = 5$.)

(c) $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2+2(2+h)-8}{h} = \dfrac{h^2+6h}{h} = h+6 \to 6$ når $h \to 0$.

(d) $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x^2+2x-a^2-2a}{x-a} = \dfrac{x^2-a^2+2x-2a}{x-a} = \dfrac{(x-a)(x+a+2)}{x-a} = x+a+2 \to$ $2a+2$ når $x \to a$.

(e) Samme svar som i (d) hvis vi setter $x-a=h$.

(f) $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = \dfrac{(a+h)^2+2a+2h-(a-h)^2-2a+2h}{h} = 4a+4 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 4a+4$

(Fra (5.1.6) er $f'(x) = 2x+2$. Vi ser at grenseverdiene i (a), (c), (d) og (e) er hhv. $f'(1)=4$, $f'(2)=6$, $f'(a)=2a+2$ og $f'(a)=2a+2$.)

7. (a) $x^3-8=0$ har løsning $x=2$, og polynomdivisjon gir $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$, slik at $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x^2+2x+4} = \dfrac{1}{6}$.

(b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+h}-3}{h} = \lim\limits_{u\to 3} \dfrac{u-3}{u^3-27} = \lim\limits_{u\to 3} \dfrac{u-3}{(u-3)(u^2+3u+9)} = \lim\limits_{u\to 3} \dfrac{1}{u^2+3u+9} = \dfrac{1}{27}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1) = n$

(I (c) finner vi at $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1) = x^n-1$ ved å multiplisere ut venstresiden, eller ved polynomdivisjon: $(x^n-1):(x-1)$.)

5.6

7. (a) Med $f(x)=x^2$ er $f'(5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(5+h)^2-5^2}{h}$. På den annen side er $f'(x)=2x$, slik at $f'(5)=10$, og grensen er derfor 10. (b) Med $f(x)=x^5$ er $f'(x)=5x^4$, og grenseverdien er lik $f'(1)=5$.
(c) Med $f(x)=5x^2+10$ er $f'(x)=10x$, og dette er grenseverdien.

5.7

3. (a) $y = \dfrac{1}{x^6} = x^{-6} \;\Rightarrow\; y' = -6x^{-7}$, der vi brukte potensregelen (5.6.4).

(b) $y = x^{-1}(x^2+1)\sqrt{x} = x^{-1}x^2x^{1/2} + x^{-1}x^{1/2} = x^{3/2}+x^{-1/2} \;\Rightarrow\; y' = \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-3/2}$

(c) $y = x^{-3/2} \;\Rightarrow\; y' = -\frac{3}{2}x^{-5/2}$ (d) $y = \dfrac{x+1}{x-1} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

(e) $y = \dfrac{x}{x^5} + \dfrac{1}{x^5} = x^{-4}+x^{-5} \;\Rightarrow\; y' = -4x^{-5}-5x^{-6}$

(f) $y = \dfrac{3x-5}{2x+8} \;\Rightarrow\; \dfrac{3(2x+8)-2(3x-5)}{(2x+8)^2} = \dfrac{34}{(2x+8)^2}$ (g) $y = 3x^{-11} \;\Rightarrow\; y' = -33x^{-12}$

(h) $y = \dfrac{3x-1}{x^2+x+1} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{3(x^2+x+1)-(3x-1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-3x^2+2x+4}{(x^2+x+1)^2}$

6. (a) $f'(x) = 6x - 12 = 6(x-2) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$, slik at f er voksende i $[2, \infty)$.
(b) $f'(x) = x^3 - 3x = x(x^2-3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$, slik at f er voksende i $\big[-\sqrt{3}, 0\big]$ og i $\big[\sqrt{3}, \infty\big)$ (bruk et fortegnsdiagram).
(c) $f'(x) = \dfrac{2(2-x^2)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{2(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{(x^2+2)^2}$, slik at f er voksende i $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
(d) $f'(x) = \dfrac{-x(x-x_1)(x-x_2)}{(x+1)^2}$, der $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{5}$. f er voksende i $(-\infty, x_1]$ og i $[0, x_2]$.

7. (a) $y' = -1 - 2x = -3$ når $x = 1$, slik at stigningstallet for tangenten er -3. Siden $y = 1$ når $x = 1$, gir ett-punktsformelen $y - 1 = -3(x-1)$, eller $y = -3x + 4$.
(b) $y' = 4x/(x^2+1)^2 = 1$ og $y = 0$ når $x = 1$, slik at $y = x - 1$. (c) $y = x^2 - x^{-2}$, slik at $y' = 2x + 2x^{-3} = 17/4$ og $y = 15/4$ når $x = 2$, slik at $y = (17/4)x - 19/4$.
(d) $y' = \dfrac{4x^3(x^3+3x^2+x+3)-(x^4+1)(3x^2+6x+1)}{[(x^2+1)(x+3)]^2} = -\dfrac{1}{19}$ og $y = 1/3$ når $x = 0$, slik at $y = -(x-3)/9$.

8. (a) Vi bruker brøkregelen: $y = \dfrac{at+b}{ct+d} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{a(ct+d)-(at+b)c}{(ct+d)^2} = \dfrac{ad-bc}{(ct+d)^2}$
(b) $y = t^n\left(a\sqrt{t}+b\right) = at^{n+1/2} + bt^n \;\Rightarrow\; y' = a(n+1/2)t^{n-1/2} + nbt^{n-1}$
(c) $y = \dfrac{1}{at^2+bt+c} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{0\cdot(at^2+bt+c) - 1\cdot(2at+b)}{(at^2+bt+c)^2} = \dfrac{-2at-b}{(at^2+bt+c)^2}$

12. Denne er ganske tricky fordi nevneren er 0 for $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ og for $x_2 = 2 + \sqrt{3}$, slik at grafen har brudd der. Vi finner at $f(x) \underset{x\to x_1^-}{\longrightarrow} -\infty$, $f(x) \underset{x\to x_1^+}{\longrightarrow} \infty$, $f(x) \underset{x\to x_2^-}{\longrightarrow} \infty$ og $f(x) \underset{x\to x_2^+}{\longrightarrow} -\infty$. Et fortegnsdiagram viser at $f(x) > 0$ bare i $(-\infty, 0)$ og i (x_1, x_2). Se så fasiten.

5.8

3. (a) Vi lar $y = (x^2+x+1)^{-5} = u^{-5}$, der $u = x^2+x+1$. Kjerneregelen gir $y' = (-5)u^{-6}u' = -5(2x+1)(x^2+x+1)^{-6}$. (b) Se fasiten. (c) Med $u = x + \sqrt{x + \sqrt{x}}$ er $y = \sqrt{u} = u^{1/2}$, slik at $y' = \frac{1}{2}u^{-1/2}u'$. Nå er $u = x + v^{1/2}$, med $v = x + x^{1/2}$, og dermed er $u' = 1 + \frac{1}{2}v^{-1/2}v'$, der $v' = 1 + \frac{1}{2}x^{-1/2}$. Alt i alt får vi $y' = \frac{1}{2}u^{-1/2}u' = \frac{1}{2}\big(x + (x+x^{1/2})^{1/2}\big)^{-1/2}(1 + \frac{1}{2}(x+x^{1/2})^{-1/2}(1+\frac{1}{2}x^{-1/2}))$.

6. $x = b - \sqrt{ap-c} = b - \sqrt{u}$, med $u = ap - c$. Da er $\dfrac{dx}{dp} = -\dfrac{1}{2\sqrt{u}}u' = -\dfrac{a}{2\sqrt{ap-c}}$.

14. (a), (e) og (g) er lette. (b), (c) og (f) er enkel bruk av kjerneregelen. (d): Etter produktregelen er den deriverte av $x^2 f(x)$ lik $2xf(x) + x^2 f'(x)$. Etter kjerneregelen er den deriverte av $[f(x)]^3$ lik $3[f(x)]^2 f'(x)$. Fasitsvaret følger.
(h) $y = \dfrac{[f(x)]^2}{x^3} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{x^3 2f(x)f'(x) - [f(x)]^2 3x^2}{(x^3)^2} = \dfrac{f(x)[2xf'(x) - 3f(x)]}{x^4}$

5.9

4. $g'(t) = \dfrac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2} = \dfrac{t^2-2t}{(t-1)^2}$, $g''(t) = \dfrac{2}{(t-1)^3}$, slik at $g''(2) = 2$.

5. Med forenklet skrivemåte: $y' = f'g + fg'$, $y'' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$, $y''' = f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$

5.10

2. (a) $dx/dt = (b + 2ct)e^t + (a + bt + ct^2)e^t = (a + b + (b + 2c)t + ct^2)e^t$
(b) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3qt^2te^t - (p + qt^3)(e^t + te^t)}{t^2e^{2t}} = \dfrac{-qt^4 + 2qt^3 - pt - p}{t^2e^t}$ (c) Se fasiten.

5.11

3. Her trenger vi kjerneregelen. Vi har spesielt at $\dfrac{d}{dx}\ln f(x) = \dfrac{1}{f(x)}f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ når f er en deriverbar funksjon (med $f(x) > 0$). Se fasiten for (e) og (f).
(a) $y = \ln(\ln x) = \ln u \implies y' = \dfrac{1}{u}u' = \dfrac{1}{\ln x}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\ln x}$
(b) $y = \ln\sqrt{1 - x^2} = \ln u \implies y' = \dfrac{1}{u}u' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\dfrac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{-x}{1 - x^2}$.
(Alternativt: $\sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{1/2} \implies y = \frac{1}{2}\ln(1 - x^2)$, osv.)
(c) $y = e^x \ln x \implies y' = e^x \ln x + e^x 1/x = e^x(\ln x + 1/x$
(d) $y = e^{x^3}\ln x^2 \implies y' = 3x^2e^{x^3}\ln x^2 + e^{x^3}\dfrac{1}{x^2}2x = e^{x^3}\Big(3x^2\ln x^2 + \dfrac{2}{x}\Big)$

4. (a) $\ln u$ er definert bare for $u > 0$, slik at vi må kreve at $x + 1 > 0$, dvs. $x > -1$.
(b) Vi må ha $1 - x \neq 0$ for at brøken skal være definert, og $\dfrac{3x - 1}{1 - x} > 0$ for at logaritmen skal være definert. Et fortegnsdiagram viser at $\dfrac{3x - 1}{1 - x}$ er definert og positiv hvis og bare hvis $1/3 < x < 1$.
(c) $\ln|x|$ er definert $\Leftrightarrow |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. (d) $x^2 > 1$, dvs. $x > 1$ eller $x < -1$.
(e) $\ln(\ln x)$ er definert når $\ln x$ er definert og positiv, dvs. for $x > 1$.
(f) Brøken $\dfrac{1}{\ln(\ln x) - 1}$ er definert når $\ln(\ln x)$ er definert og forskjellig fra 1. Fra (e) ser vi at $\ln(\ln x)$ er definert når $x > 1$. Videre er $\ln(\ln x) = 1 \Leftrightarrow \ln x = e \Leftrightarrow x = e^e$. Konklusjon: $\dfrac{1}{\ln(\ln x) - 1}$ er definert $\Leftrightarrow$ $x > 1$ og $x \neq e^e$.

5. (a) $y' = 1/x$. (i) $y' = 1$. Ett-punktsformelen gir at tangentlikningen i $(1, 0)$ er $y = x - 1$.
(ii) I $(\frac{1}{2}, \ln\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, -\ln 2)$ er tangentlikningen $y - (-\ln 2)) = 2(x - \frac{1}{2})$, dvs. $y = 2x - 1 - \ln 2$.
(iii) I $(e, \ln e) = (e, 1)$ er tangentlikningen $y - 1 = (1/e)(x - e)$, dvs. $y = x/e$.
(b) $y' = e^x + xe^x$. (i), (ii) og (iii). Se fasiten.

7. (a) La $f(x) = e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2)$. Da er $f(0) = 0$ and $f'(x) = e^x - (1 + x) > 0$ for alle $x > 0$, som er vist først i oppgaven. Dermed er $f(x) > 0$ for alle $x > 0$, og ulikheten følger.
(b) La $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{1}{2}x$. Da er $f(0) = 0$ og $f'(x) = 1/(x + 1) - \frac{1}{2} = (1 - x)/2(x + 1)$, som er positiv i $(0, 1)$, slik at $f(x) > 0$ i $(0, 1)$, og den venstre ulikheten er vist. For å vise den andre ulikheten, sett $g(x) = x - \ln(1 + x)$. Da $g(0) = 0$ og $g'(x) = 1 - 1/(x + 1) = x/(x + 1) > 0$ i $(0, 1)$, slik at konklusjonen følger.
(c) La $f(x) = 2(\sqrt{x} - 1) - \ln x$. Da er $f(1) = 0$ og $f'(x) = (1/\sqrt{x}) - 1/x = (x - \sqrt{x})/x\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 1)/x$, som er positiv for $x > 1$. Konklusjonen følger.

9. (a) La $y = (2x)^x$. Da er $\ln y = x\ln(2x)$, slik at $\dfrac{y'}{y} = 1\cdot\ln(2x) + x\cdot\dfrac{1}{2x}\cdot 2 = \ln(2x)+1$. Dermed er $y' = (2x)^x(\ln x + \ln 2 + 1)$. (Alternativt: Hvis vi setter $y = 2^x x^x$, bruker produktregelen, (5.10.3) og (5.11.3), får vi $y' = 2^x(\ln 2)x^x + 2^x x^x(\ln x + 1) = 2^x x^x(\ln x + \ln 2 + 1)$.)
(b) Med $y = x^{\sqrt{x}}$ er $\ln y = \sqrt{x}\ln x$, slik at $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$ og dermed $y' = \dfrac{x^{\sqrt{x}}(\ln x + 2)}{2\sqrt{x}}$.
(c) Med $y = (x^{1/2})^x = x^{\frac{1}{2}x}$ er $\ln y = \frac{1}{2}x\ln x$, slik at $y'/y = \frac{1}{2}(\ln x + 1)$, som gir $y' = \frac{1}{2}(\sqrt{x}\,)^x(\ln x + 1)$.
(d) $y = x^{(x^x)}$ gir $\ln y = x^x\ln x$ og da er $y'/y = x^x(\ln x + 1)\ln x + x^x(1/x) = x^x[(\ln x)^2 + \ln x + 1/x]$, slik at $y' = x^{(x^x)+x}[(\ln x)^2 + \ln x + 1/x]$

11. Ved å ta logaritmen av hver side får vi: $\ln F(\alpha) = \ln a + (v/\alpha)[\alpha\ln N + \alpha\ln K - \ln(N^\alpha + bK^\alpha)] = B - (v/\alpha)\ln(N^\alpha + bK^\alpha)$, der B ikke avhenger av α. Derivasjon mhp. α gir

$$\frac{F'(\alpha)}{F(\alpha)} = \frac{v}{\alpha^2}\ln(N^\alpha + bK^\alpha) - \frac{v}{\alpha}\frac{N^\alpha\ln N + bK^\alpha\ln K}{N^\alpha + bK^\alpha}$$

Fasitsvaret følger lett.

Repetisjonsoppgaver for kapittel 5

5. (a) $y = -3$ og $y' = -6x = -6$ for $x = 1$, slik at $y - (-3) = (-6)(x-1)$, eller $y = -6x + 3$.
(b) $y = -14$ og $y' = 1/2\sqrt{x} - 2x = -31/4$ i $x = 4$, slik at $y = -(31/4)x + 17$.
(c) $y = 0$ og $y' = (-2x^3 - 8x^2 + 6x)/(x+3)^2 = -1/4$ for $x = 1$, slik at $y = (-1/4)(x-1)$.

12. (a) $y' = \dfrac{2}{x}\ln x \ge 0$ for $x \ge 1$. (b) $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ge 0 \iff e^x \ge e^{-x} \iff e^{2x} \ge 1 \iff x \ge 0$
(c) $y' = 1 - \dfrac{3x}{x^2+2} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2+2} \ge 0 \iff x \le 1$ eller $x \ge 2$.

6 Kontinuitet. Grenser

6.1

2. (6.1.4) viser at funksjonene er kontinuerlige der de er definert. Funksjonene i (a) og (d) er definert overalt og derfor kontinuerlige overalt. I (b) må vi unnta $x = 1$, i (c) er funksjonen definert for $x < 2$, i (e) må vi unnta $x = \pm\sqrt{3} - 1$, fordi nevneren er 0 for disse verdiene av x. I (f) må vi kreve at $x \ne 1$ og at $(x+1)/(x-1) \ge 0$, for bare da kan vi ta kvadratroten av det. Et fortegnsdiagram viser fasitsvaret. I (g) krever $\sqrt{x}$ at $x \ge 0$ og $1/x$ at $x \ne 0$. (Nevneren er aldri 0.) Endelig er funksjonen i (h) kontinuerlig for alle $x \ne 0$.

7. La $f(x) = g(x) = 1$ for $x < a$, men $f(x) = -1$ og $g(x) = 3$ for $x \ge a$. Da er f og g diskontinuerlige i $x = a$, men $f(x) + g(x) = 2$ for alle x, og derfor kontinuerlig for alle x. (Tegn figur!) La $h(x) = -1$ for $x < a$, $h(x) = 1$ for $x \ge a$. Da er også h diskontinuerlig for $x = a$, mens $f(x)h(x) = -1$ for alle x, og dermed kontinuerlig for alle x.

6.2

1. (b) $|x| = -x$ for $x < 0$. Derfor er $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{x + |x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x - x}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$.
(c) $|x| = x$ for $x > 0$. Derfor er $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x + |x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x + x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2$.

(d) Når $x \to 0^+$ vil $\sqrt{x} \to 0$, slik at $-1/\sqrt{x} \to -\infty$. (e) Når $x \to 3^+$ vil $x - 3 \to 0^+$, og dermed $x/(x-3) \to \infty$. (f) Når $x \to 3^-$ vil $x - 3 \to 0^-$, slik at $x/(x-3) \to -\infty$.

6.3

4. Vi minner om at vilkårlig nær et reelt tall fins det rasjonale så vel som irrasjonale tall. Funksjonen f er kontinuerlig i $a = 0$, fordi $|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| \le |x|$ for enhver x. Hvis $a \neq 0$ er rasjonal, da er $|f(x) - f(a)| = |f(x)|$, som er lik $|x|$ når x er irrasjonal. Men hvis $a \neq 0$ er irrasjonal, da er $|f(x) - f(a)| = |f(a)|$ når x er rasjonal. Det følger at f er diskontinuerlig for alle $x \neq 0$.

La a være et vilkårlig reelt tall. Vi skal vise at g er diskontinuerlig i a. La $\varepsilon = \frac{1}{2}$. For ethvert positivt tall δ kan vi finne både et rasjonalt tall x_1 og et irrasjonalt tall x_2 i intervallet $(a - \delta, a + \delta)$. Da er $g(x_1) = 1$ og $g(x_2) = 0$. Hvis a er rasjonal, så er $|g(x_2) - g(a)| = |0 - 1| = 1$, og hvis a er irrasjonal, er $|g(x_1) - g(a)| = |1 - 0| = 1$. I begge tilfellene fins det altså tall x så nær a vi vil, som er slik at $|g(x) - g(a)| = 1 > \varepsilon$. Derfor er g diskontinuerlig i a.

6.4

3. (a) $\displaystyle \lim_{x\to 5} \frac{x - 4 - e^{x-5}}{(x-5)^2} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{x\to 5} \frac{1 - e^{x-5}}{2(x-5)} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{x\to 5} \frac{-e^{x-5}}{2} = -\frac{1}{2}$

(b) $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{e^{t+1} - e^{1-t}}{t^2} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{t+1} + e^{1-t}}{2t}$, som ikke eksisterer siden telleren går mot $2e$ og nevneren går mot 0.

(c) $\displaystyle \lim_{x\to e} \frac{(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 3\ln x - 1}{x^3 - 3x^2 e + 3xe^2 - e^3} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{x\to e} \frac{3(\ln x)^2(1/x) - (6\ln x)(1/x) + 3/x}{3x^2 - 6xe + 3e^2} =$
$\displaystyle \lim_{x\to e} \frac{3(\ln x)^2 - 6\ln x + 3}{3x^3 - 6x^2 e + 3xe^2} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{x\to e} \frac{6(\ln x)(1/x) - 6/x}{9x^2 - 12xe + 3e^2} = \lim_{x\to e} \frac{6\ln x - 6}{9x^3 - 12x^2 e + 3xe^2} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} =$
$\displaystyle \lim_{x\to e} \frac{6/x}{27x^2 - 24xe + 3e^2} = \frac{1}{e^3}$. For å få det tredje (og det sjette) likhetstegnet multipliserte vi teller og nevner med x. Dette gir betydelig mindre arbeid enn om vi ikke gjorde det.

5. (a) $\displaystyle \lim_{x\to n} \left(\frac{x^x - x^n}{x - n}\right) = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{x\to n} \left(\frac{x^x(\ln x + 1) - nx^{n-1}}{1}\right) = n^n \ln n$, ved å bruke (5.11.3).

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + x\ln x}{x}$, som ikke eksisterer siden telleren går mot 1 når $x \to 0^+$:
$\displaystyle \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} = \text{“}\frac{-\infty}{\infty}\text{”} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

(c) La $y = x^{1/x}$. Da er $\ln y = (\ln x)/x$ som går mot 0 når $x \to \infty$ ifølge eksempel 4. Siden $\ln y$ går mot 0 når $x \to \infty$, vil y gå mot 1 når $x \to \infty$.

(d) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{1/x} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} =$
$\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$, der vi brukte at $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{1 + 1/x}{1 - 1/x}\right) \to 0$ når $x \to \infty$.

8. (a) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1/x^2)e^{-1/x}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1/x^2)e^{-1/x}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{2x^3}$, så det blir verre og verre.

(b) Hvis $u = 1/x$, vil $x \to 0^+$ medføre at $u \to \infty$, slik at $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^u} = 0$, ifølge (3).

6.5

6. En heltallig rot i likningen $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 8x + 3 = 0$ må være en faktor i konstantleddet 3. (Se setningen over eksempel 3.7.3.) De eneste mulige er derfor ± 1 og ± 3. Vi finner at -3 er den eneste heltallige løsningen.

For hhv. $x_0 = -1.9$, $y_0 = 0.4$ og $z_0 = 1.5$ gir Newtons metode brukt en gang:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -1.9 - \frac{f(-1.9)}{f'(-1.9)} = -1.9 - \frac{-0.1749}{8.454} \approx -1.9 + 0.021 = -1.879 \\
y_1 &= 0.4 - \frac{f(0.4)}{f'(0.4)} = 0.4 - \frac{-0.4624}{-8.704} \approx 0.4 - 0.053 = 0.347 \\
z_1 &= 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = 1.5 - \frac{-0.5625}{16.75} \approx 1.5 + 0.034 = 1.534
\end{aligned}$$

Med 6 desimaler kan en vise at de virkelige røttene er -1.879385, 0.347296 og 1.532089.

6.6

2. (a) Når $n \to \infty$ vil $2/n \to 0$ slik at $5 - 2/n \to 5$. (b) Når $n \to \infty$ vil $\dfrac{n^2-1}{n} = n - 1/n \to \infty$.

(c) Når $n \to \infty$ vil $\dfrac{3n}{\sqrt{2n^2-1}} = \dfrac{3n}{n\sqrt{2-1/n^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2-1/n^2}} \to \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

4. (a) Se fasiten. (b) Forholdet f_{n+1}/f_n blir: 2, 1.5, 1.667, 1.600, 1.625, 1.615, 1.619, 1.618, ..., som "ser ut til" å nærme seg en grense litt over 1.6. Merk at fra $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$ følger det ved divisjon med f_{n+1} at $f_n/f_{n+1} + 1 = f_{n+2}/f_{n+1}$, eller

$$\frac{1}{f_{n+1}/f_n} + 1 = f_{n+2}/f_{n+1} \tag{$*$}$$

Hvis vi *antar* at $\varphi(n) = f_{n+1}/f_n$ nærmer seg en grense τ når $n \to \infty$, får vi fra $(*)$ at $1/\tau + 1 = \tau$, eller $\tau^2 - \tau - 1 = 0$. (Hvis $\varphi(n) \to \tau$ når $n \to \infty$, vil også $\varphi(n+1) \to \tau$ når $n \to \infty$.) Annengradslikningen $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ har den positive løsningen $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

(c) La $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ og $\sigma = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Vi vet fra punkt (b) at $\tau^2 = 1 + \tau$, og utregning viser at vi også har $\sigma^2 = 1 + \sigma$. Vi ønsker å bruke induksjon til å vise at utsagnet $A(n) : f_n = (\tau^n - \sigma^n)/\sqrt{5}$ er sant for $n = 1, 2, 3, \dots$. Nå viser det seg at vi ikke kan bruke induksjonsprinsippet slik det er formulert i rammen (A.4.1) direkte. For å vise at $A(k+1)$ er sant er det nemlig ikke nok å vite at $A(k)$ er sant, vi trenger også $A(k-1)$. For å komme rundt dette hinderet formulerer vi det nye utsagnet $B(n) : (A(i)$ er sant for alle $i = 1, 2, \dots, n)$, og så viser vi at $B(n)$ er sant for alle $n = 1, 2, 3, \dots$:

Direkte utregning viser lett at $A(1)$ og $A(2)$ begge er sanne, og derfor er $B(1)$ og $B(2)$ sanne utsagn. Anta så at $B(k)$ er sant for et naturlig tall $k \geq 2$. Vi må vise at da er også $B(k+1)$ sant. Siden $B(k)$ er sant, er spesielt $A(k-1)$ og $A(k)$ sanne, dvs.

$$f_{k-1} = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tau^{k-1} - \sigma^{k-1}) \quad \text{og} \quad f_k = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tau^k - \sigma^k)$$

For å vise at $B(k+1)$ er sant, gjenstår det å vise at $A(k+1)$ er sant, dvs. at $f_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^{k+1} - \sigma^{k+1})$. Fra definisjonen av Fibonacci-tallene og fra likningene $1 + \tau = \tau^2$ og $1 + \sigma = \sigma^2$ får vi

$$f_{k+1} = f_{k-1} + f_k = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\big(\tau^{k-1}(1+\tau) - \sigma^{k-1}(1+\sigma)\big) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\tau^{k+1} - \sigma^{k+1})$$

som nettopp er $A(k+1)$. Altså er også $B(k+1)$ sant, og det følger ved induksjon at $B(n)$ er sant for alle naturlige tall n.

Repetisjonsoppgaver for kapittel 6

4. (a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(2-x)e^x-x-2}{x^3} = \dfrac{\text{“0”}}{0} = \lim_{x\to 0}\dfrac{-e^x+(2-x)e^x-1}{3x^2} = \dfrac{\text{“0”}}{0} = \lim_{x\to 0}\dfrac{-e^x-e^x+(2-x)e^x}{6x} =$ $\lim_{x\to 0}\dfrac{-xe^x}{6x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{-e^x}{6} = -\dfrac{1}{6}$. (Ved å forkorte med x, trengte vi bare å bruke l'Hôpital to ganger.)

(b) $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right) = \lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-4x^2-3x+18} = \dfrac{\text{“0”}}{0} = \lim_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{3x^2-8x-3} = \dfrac{\text{“0”}}{0} =$ $\lim_{x\to 3}\dfrac{2}{6x-8} = \dfrac{1}{5}$ (c) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x-4}{2x^2-32} = \dfrac{\text{“0”}}{0} = \lim_{x\to 4}\dfrac{1}{4x} = \dfrac{1}{16}$. (Kan du finne et alternativ?)

6. (a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{\text{“0”}}{0} = \lim_{x\to 1}\dfrac{(1/x)-1}{2(x-1)} = \dfrac{\text{“0”}}{0} = \lim_{x\to 1}\dfrac{(-1/x^2)}{2} = -\dfrac{1}{2}$

(b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}\ln\left(\dfrac{7x+1}{4x+4}\right) = \lim_{x\to 1}\dfrac{\ln(7x+1)-\ln(4x+4)}{x-1} = \dfrac{\text{“0”}}{0} = \lim_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{7}{7x+1}-\dfrac{4}{4x+4}}{1} = \dfrac{3}{8}$

(c) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x} = \dfrac{\text{“0”}}{0} = \lim_{x\to 1}\dfrac{x^x(\ln x+1)-1}{-1+1/x} = \dfrac{\text{“0”}}{0} = \lim_{x\to 1}\dfrac{x^x(\ln x+1)^2+x^x(1/x)}{-1/x^2} = -2$ (ved å bruke (5.11.3) for å derivere x^x).

7. Når $x\to 0$ går telleren mot $\sqrt{b}-\sqrt{d}$ og nevneren mot 0, slik at grensen ikke eksisterer når $b\neq d$. Hvis $b=d$ får vi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}}{x} = \frac{\text{“0”}}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{1}{2}a(ax+b)^{-1/2}-\frac{1}{2}c(cx+d)^{-1/2}\right]}{1} = \frac{a-c}{2\sqrt{b}}$$

11. I fasiten fant vi at $x_4\approx 0.9280339$. Ved å bruke Newtons metode en gang til får vi $x_5 = x_4 - f(x_4)/f'(x_4)\approx 0.9280339 - f(0.9280339)/f'(0.9280339)\approx 0.9280339$.

13. (a) Hvis $|x|\le 1$ er $|(x+1)^2-1| = |x^2+2x+1-1| = |x^2+2x|\le |x|^2+2|x|\le |x|+2|x| = 3|x|$. Gitt $\varepsilon>0$. Velg $\delta=\min(1,\varepsilon/3)$. For alle x med $0<|x|<\delta$ er da $|(x+1)^2-1|\le 3|x|<3\delta=\varepsilon$, og ifølge (6.3.3) er $\lim_{x\to 0}(x+1)^2=1$. Fordi $f(0)=1$, er f kontinuerlig i $x=0$.

(b) Hvis $|x|\le 1$ er $|(x+1)^3-1| = |x^3+3x^2+3x+1-1|\le |x|^3+3|x|^2+3|x|\le |x|+3|x|+3|x| = 7|x|$. Gitt $\varepsilon>0$. Velg $\delta=\min(1,\varepsilon/7)$. Ifølge (6.3.3) er da $\lim_{x\to 0}(x+1)^3=1$. Fordi $f(0)=1$, er f kontinuerlig i $x=0$.

7 Den deriverte i aksjon

7.1

2. (a) Se fasiten. Kontroll: Av den gitte likningen får vi $y=x^{-2}$, og dermed $y'=-2x^{-3}$, $y''=6x^{-4}$.

(b) Implisitt derivasjon mhp. x gir $(*)$ $1-y'+3y+3xy'=0$. Løst mhp. y': $y'=(1+3y)/(1-3x) = -5/(1-3x)^2$, der vi benyttet at $y=(2-x)/(3x-1)$. Derivasjon av $(*)$ mhp. x gir $-y''+3y'+3y'+3xy''=0$. Sett inn $y'=(1+3y)/(1-3x)$ og løs mhp. y''. Det gir $y''=6y'/(1-3x)=-30/(1-3x)^3$. To gangers derivasjon av $y=(2-x)/(3x-1)$ gir samme resultat.

(c) Derivasjon mhp. x gir $(*)$ $5y^4y'=6x^5$, slik at $y'=6x^5/5y^4=(6/5)x^{1/5}$. Derivasjon av $(*)$ mhp. x gir $20y^3(y')^2+5y^4y''=30x^4$. Sett inn $y'=6x^5/5y^4$ og løs mhp. y''. Det gir $y''=6x^4y^{-4}-(144/25)x^{10}y^{-9}=(6/25)x^{-4/5}$. To gangers derivasjon av $y=x^{6/5}$ gir samme resultat.

4. (a) Implisitt derivasjon gir (∗) $4x + 6y + 6xy' + 2yy' = 0$, slik at $y' = -\dfrac{2x+3y}{3x+y} = -\dfrac{8}{5}$ i $(1, 2)$.
(b) Derivasjon av (∗) mhp. x gir $4 + 6y' + 6y' + 6xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$. Setter vi inn $x = 1$, $y = 2$ og $y' = -8/5$ i den siste likningen, får vi $y'' = 126/125$.

8. (a) Implisitt derivasjon gir $y + xy' = g'(x) + 3y^2y'$. Løs mhp. y'. (b) $g'(x+y)(1+y') = 2x + 2yy'$. Løs mhp. y'. (c) $2(xy+1)(y+xy') = f'(x^2y)(2xy + x^2y')$. Løs mhp. y'. (Hvordan deriverte vi $f(x^2y)$ mhp. x? Sett $z = f(u)$ med $u = x^2y$. Da er $z' = f'(u)u'$ der u er et produkt av to funksjoner som begge avhenger av x, slik at $u' = 2xy + x^2y'$.)

10. (a) Implisitt derivasjon gir $2(x^2+y^2)(2x+2yy') = a^2(2x-2yy')$. Løs mhp. y'. (b) Merk at $y' = 0$ når $x^2 + y^2 = a^2/2$, dvs. når $y^2 = \frac{1}{2}a^2 - x^2$. Innsatt i den gitte likningen gir det $x = \pm\frac{1}{4}a\sqrt{6}$. Dette gir fire punkter på grafen der tangenten er horisontal. Se figuren på side 206 i boka.

7.2

1. Implisitt derivasjon mhp. p, med Q som en funksjon av p, gir $\dfrac{dQ}{dp} \cdot p^{1/2} + Q\frac{1}{2} \cdot p^{-1/2} = 0$. Derfor er $\dfrac{dQ}{dp} = -\frac{1}{2}Qp^{-1} = -\dfrac{19}{p^{3/2}}$, der vi benyttet at $Q = 38p^{-1/2}$.

5. Derivasjon av $f'(P+t)(dP/dt+1) = g'(P)\,dP/dt$ mhp. t gir

$$f''(P+t)\big(dP/dt+1\big)^2 + f'(P+t)d^2P/dt^2 = g''(P)\,\big(dP/dt\big)^2 + g'(P)d^2P/dt^2$$

Med forenklet skrivemåte: $f''(P'+1)^2 + f'P'' = g''(P')^2 + g'P''$. Bruker vi nå at $P' = f'/(g'-f')$ og løser mhp. P'', får vi $d^2P/dt^2 = P'' = [f''(g')^2 - g''(f')^2]/(g'-f')^3$.

7.3

2. (a) $f'(x) = x^2\sqrt{4-x^2} + \dfrac{1}{3}x^3\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4x^2(3-x^2)}{3\sqrt{4-x^2}}$. Se fasiten for resten.

5. (a) $dy/dx = -e^{-x-5}$, så $dx/dy = -1/e^{-x-5} = -1/y$.
(b) $dy/dx = -e^{-x}/(e^{-x}+3)$, slik at $dx/dy = -(e^{-x}+3)/e^{-x} = -1 - 3e^x$
(c) Implisitt derivasjon mhp. x gir $y^3 + x3y^2(dy/dx) - 3x^2y - x^3(dy/dx) = 2$. Løs mhp. dy/dx, og inverter.

7.4

3. (a) $f(0) = 1$ og $f'(x) = -(1+x)^{-2}$, slik at $f'(0) = -1$. Da er $f(x) \approx f(0) + f'(0)x = 1 - x$.
(b) $f(0) = 1$, $f'(x) = 5(1+x)^4$ og $f'(0) = 5$. Da er $f(x) \approx f(0) + f'(0)x = 1 + 5x$.
(c) $f(0) = 1$ og $f'(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-3/4}$ gir $f'(0) = -\frac{1}{4}$ og $f(x) \approx f(0) + f'(0)x = 1 - \frac{1}{4}x$.

7. (a) $\sqrt[3]{1.1} = (1+1/10)^{1/3} \approx 1 + (1/3)(1/10) \approx 1.033$ (b) $\sqrt[5]{33} = 2(1+1/32)^{1/5} \approx 2(1+1/160) = 2.0125$ (c) $\sqrt[3]{9} = 2(1+1/8)^{1/3} \approx 2(1+1/24) \approx 2.083$ (d) $(0.98)^{25} = (1-0.02)^{25} = (1-1/50)^{25} \approx 1 - 1/2 = 1/2$

9. $3e^{xy^2} + 3xe^{xy^2}(y^2 + x2yy') - 2y' = 6x + 2yy'$. For $x = 1$, $y = 0$ reduserer dette seg til $3 - 2y' = 6$, slik at $y' = -3/2$. (b) $y(x) \approx y(1) + y'(1)(x-1) = -\frac{3}{2}(x-1)$

7.5

2. $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$, $f^{(\mathrm{iv})}(x) = -6(1+x)^{-4}$ og $f^{(\mathrm{v})}(x) = 24(1+x)^{-5}$. Da er $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$, $f^{(\mathrm{iv})}(0) = -6$ og $f^{(\mathrm{v})}(0) = 24$, slik at $f(x) \approx f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f^{(\mathrm{iv})}(0)x^4 + \frac{1}{5!}f^{(\mathrm{v})}(0)x^5 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$.

9. Med $\alpha = a/(1+b)$ er $g(\mu) = A(1+\mu)^\alpha$, $g'(\mu) = \alpha A(1+\mu)^{\alpha-1}$ og $g''(\mu) = \alpha(\alpha-1)A(1+\mu)^{\alpha-2}$. Dermed er $g(0) = A-1$, $g'(0) = \alpha A$ og $g''(0) = \alpha(\alpha-1)A$, slik at $g(\mu) \approx g(0)+g'(0)\mu+\frac{1}{2}g''(\mu)\mu^2 = A - 1 + \alpha A\mu + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)A\mu^2$, som en lett ser er det samme svaret som i fasiten.

7.6

5. (a) Med $g(x) = (1+x)^{1/3}$ er $g'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$ og $g''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}$, slik at $g(0) = 1$, $g'(0) = \frac{1}{3}$ og $g''(0) = -\frac{2}{9}$. Taylor-polynomet av orden 2 er dermed $p(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$.
(b) Vi finner at $g'''(c) = \frac{10}{27}(1+c)^{-8/3}$, og Taylors formel (7.6.2) med $n = 2$ er dermed

$$g(x) = 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + R_3(x), \quad \text{der} \quad R_3(x) = \tfrac{1}{6!}\tfrac{10}{27}(1+c)^{-8/3}x^3 = \tfrac{5}{81}(1+c)^{-8/3}x^3$$

Siden $c \in (0, x)$ og $x \geq 0$, er $(1+c)^{-8/3} \leq 1$, og ulikheten følger.
(c) $\sqrt[3]{1003} = \sqrt[3]{1000(1+3/1000)} = 10(1+3\cdot 10^{-3})^{1/3} \approx 10(1+\frac{1}{3}3\cdot 10^{-3} - \frac{1}{9}9\cdot 10^{-6}) = 10.0099900$. Feilen som begås er $10 \cdot |R_3(3\cdot 10^{-3})| \leq 10 \cdot \frac{5}{81}(3\cdot 10^{-3})^2 = \frac{5}{3}10^{-8} < 2\cdot 10^{-8}$, og svaret er korrekt med 7 gjeldende desimaler.

Repetisjonsoppgaver for kapittel 7

1. (b) Derivasjon mhp. x gir $(*)$ $y^3 + 3xy^2y' = 0$, slik at $y' = -y/3x$. Derivasjon av $y' = -\dfrac{y}{3x}$ mhp. x gir $y'' = -\dfrac{y'3x - 3y}{9x^2} = -\dfrac{(-y/3x)3x - 3y}{9x^2} = \dfrac{4y}{9x^2}$. Siden $y = 5x^{-1/3}$, får vi $y' = -(5/3)x^{-4/3}$ og $y'' = (20/9)x^{-7/3}$. Svarene vi får ved å derivere $y = 5x^{-1/3}$ er de samme.
(c) $2y'e^{2y} = 3x^2$ slik at $y' = \frac{3}{2}x^2e^{-2y} = 3/2x$. Videre er $y'' = 3xe^{-2y} + \frac{3}{2}x^2e^{-2y}(-2y') = 3xe^{-2y} - \frac{9}{2}x^4e^{-4y} = -\frac{3}{2}x^{-2}$, når vi bruker at $e^{-2y} = 1/x^3$ og $e^{-4y} = 1/x^6$. Fra den gitte likningen får vi $2y = \ln x^3 = 3\ln x$, slik at $y = \frac{3}{2}\ln x$, og da er $y' = \frac{3}{2}x^{-1}$, $y'' = -\frac{3}{2}x^{-2}$.

4. $5y^4y' - y^2 - 2xyy' = 0$, slik at $y' = \dfrac{y^2}{5y^4 - 2xy} = \dfrac{y}{5y^3 - 2x}$. Se så fasiten.

10. Implisitt derivasjon gir $y'/y + y' = -2/x - 0.4(\ln x)/x$. Løst mhp. y' gir det fasitsvaret. $y' = 0$ når $1 + \frac{1}{5}\ln x = 0$, dvs. $\ln x = -5$, og da er $x = e^{-5}$.

11. (a) Vi må ha at $\dfrac{1+x}{1-x}$ er definert og positiv, dvs. $-1 < x < 1$. $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \infty$ og $f(x) \xrightarrow[x\to(-1)^-]{} -\infty$. Siden $f'(x) = 1/(1-x^2) > 0$ når $-1 < x < 1$, er f er strengt voksende og verdimengden til f er $\mathbb{R}$.
(b) Fra $y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ får vi $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = 2y$, slik at $\dfrac{1+x}{1-x} = e^{2y}$. Løs likningen mhp. x og se så fasiten.

12. (a) $f(0) = \ln 4$ og $f'(x) = 2/(2x+4)$, slik at $f'(0) = 1/2$. Da er $f(x) \approx f(0) + f'(0)x = \ln 4 + x/2$.
(b) $g(0) = 1$ og $g'(x) = -(1/2)(1+x)^{-3/2}$, slik at $g'(0) = -1/2$. Da er $g(x) \approx g(0)+g'(0)x = 1-x/2$.
(c) $h(0) = 0$ og $h'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$, slik at $h'(0) = 1$. Da er $h(x) \approx h(0) + h'(0)x = x$.

17. Med $x = 1/2$ og $n = 5$, gir formel (7.6.5) at $e^{1/2} = 1 + \frac{1/2}{1!} + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^4}{4!} + \frac{(1/2)^5}{5!} + \frac{(1/2)^6}{6!}e^c$, der c er et tall mellom 0 og 1/2. Nå er $R_6(1/2) = \frac{(1/2)^6}{6!}e^c < \frac{(1/2)^6}{6!}2 = \frac{1}{23040} \approx 0.0000434$, der vi brukte at siden $c < 1/2$ er $e^c < e^{1/2} < 2$. Det følger at $e^{1/2} \approx 1 + \frac{1/2}{1!} + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^4}{4!} + \frac{(1/2)^5}{5!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} \approx 1.6486979$. med en feil som er mindre enn 0.000044, og $e^{1/2} \approx 1.649$, som er korrekt med 3 desimaler.

18. Implisitt derivasjon gir $y' + (1/y)y' = 1$, eller $(*)$ $yy' + y' = y$. Når $y = 1$ er $y' = 1/2$. Derivasjon av $(*)$ mhp. x gir $(y')^2 + yy'' + y'' = y'$. Med $y = 1$ og $y' = 1/2$, finner vi at $y'' = 1/8$, slik at $y(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}x^2$.

8 Renter og nåverdier

8.1

4. (a) Se fasiten. (b) Hvis BNP et gitt år er A og den prosentvise veksten per år er konstant lik p, vil BNP etter 100 år være $A(1+p/100)^{100}$. Kravet blir da at $A(1+p/100)^{100} = 100A$, eller $(1+p/100)^{100} = 100$. Vi må finne p. Se fasiten.

5. Bruk formel (8.1.2). (i) Her er $n = 2$ og $r = 17/100 = 0.17$, slik at den effektive årsrenten er $R = (1 + 0.17/2)^2 - 1 = (1 + 0.085)^2 - 1 = 0.177225$, dvs. 17.72 %.
(ii) Med $n = 4$ og $r = 17/100 = 0.17$ er $R = (1.0425)^4 - 1 \approx 0.1811\%$, dvs. 18.11%.
(iii) $R = (1 + 0.17/12)^{12} - 1 \approx 0.1839$, dvs. 18.39%.

8.2

6. Med $g(x) = (1 + r/x)^x$ for alle $x > 0$ er $\ln g(x) = x\ln(1 + r/x)$. Derivasjon gir $g'(x)/g(x) = \ln(1 + r/x) + x(-r/x^2)/(1 + r/x) = \ln(1 + r/x) - (r/x)/(1 + r/x)$, som påstått i oppgaven. Vi ser videre at $h'(u) = 1/(1 + u) - 1/(u + 1)^2 = u/(1 + u)^2$, som er positiv for $u > 0$. Dette viser at $h(u)$ er strengt voksende. Da ser vi at også $g(x)$ er strengt voksende for alle $x > 0$. Påstanden i oppgaven følger.

8.4

2. Vi bruker formel (8.4.5): (a) $\dfrac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \dfrac{1}{4}$ (b) $\dfrac{0.1}{1 - 0.1} = \dfrac{0.1}{0.9} = \dfrac{1}{9}$ (c) $\dfrac{517}{1 - 1/1.1} = \dfrac{517 \cdot 1.1}{0.1} = 5687$
(d) $\dfrac{a}{1 - 1/(1 + a)} = 1 + a$ (e) $\dfrac{5}{1 - 3/7} = \dfrac{35}{4}$

6. La x betegne antall år etter 1971 som de tilgjengelige ressursene vil vare. Da er $794 + 794 \cdot 1.05 + \cdots + 794 \cdot (1.05)^x = 249 \cdot 10^3$. Ved å bruke (8.4.3) får vi $794[1 - (1.05)^{x+1}]/(1 - 1.05) = 249 \cdot 10^3$ eller $(1.05)^{x+1} = 249 \cdot 10^3 \cdot 0.05/794 \approx 16.68$. Ved å bruke en lommeregner finner vi $x \approx (\ln 16.68/\ln 1.05) - 1 \approx 56.68$, slik at reservene vil vare til inn i år 2028.

9. (a) Geometrisk rekke med kvotient 100/101 som konvergerer mot 100. (b) Divergerer ifølge (8.4.11). (c) Konvergerer ifølge (8.4.11). (d) Divergerer fordi det n-te leddet $s_n = (1 + n)/(4n - 3) \to 1/4$ når $n \to \infty$. (Se (8.4.9.) (e) Det er en parentes for mye i oppgaven. Fjerner vi den andre får vi $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n$ som konvergerer med sum $-\frac{1}{3}$. (Fjerner vi den første får vi en rekke som konvergerer mot -1.)
(f) Geometrisk rekke med kvotient $1/\sqrt{3}$ som konvergerer mot $\sqrt{3}/(\sqrt{3} - 1)$.

8.6

4. (a) $5000(1.04)^4 = 5849.29$ (b) Formel (8.5.3) gir $(5000/0.04)[(1.04)^4 - 1] = 21\,232.32$.

(c) Den siste betalingen blir 1. januar 2006. Da har de 10 000 forrentet seg i 10 år. Dermed må K tilfredsstille likningen $10\,000 \cdot (1.04)^{10} + K[(1.04)^8 - 1]/0.04 = 70\,000$. Vi finner at $K \approx 5990.49$.

8. Formel (8.5.2) med $a = 1000$ og $n = 5$ gir at nåverdien til rente r er $P_5 = (1000/r)\big[1 - 1/(1+r)^5\big]$. Vi krever at denne nåverdien skal være lik 4340. For $r = 0.05$ er nåverdien lik \$4329.48; for $r = 0.045$ er den \$4389.98. Siden P_5 avtar når r øker, følger det at p er litt mindre enn 5%. (At nåverdien avtar når renten r øker er økonomisk sett innlysende. Det følger også direkte av formel (8.5.2) ved at hver ledd i summen $\dfrac{a}{1+r} + \cdots + \dfrac{a}{(1+r)^n}$ avtar når r øker.)

8.7

6. Vi bruker (8.7.1) og får at internrenten r må tilfredsstille

$$-100\,000 + \frac{10\,000}{1+r} + \frac{10\,000}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{10\,000}{(1+r)^{20}} = 0$$

Dividerer vi nå alle leddene med 10 000 og setter $s = 1/(1+r)$, må vi vise at likningen

$$f(s) = s^{20} + s^{19} + \cdots + s^2 + s - 10 = 0$$

har en entydig positiv løsning. Siden $f(0) = -10$ og $f(1) = 10$, må det etter skjæringssetningen finnes et tall $s^* > 0$ slik at $f(s^*) = 0$. Men s^* er entydig fordi vi åpenbart har $f'(s) > 0$. Bruker vi summeformelen for en geometrisk rekke, finner vi at $f(s) = -10 + (s - s^{21})/(1-s)$ og $f(s^*) = 0 \Rightarrow (s^*)^{21} - 11s^* + 10 = 0$. Ifølge oppgave 6.R.11 er $s^* = 0.928$ en tilnærmet rot, som svarer til en internrente $r^* = 1/s^* - 1 \approx 0.0775$, dvs. på omkring 7.8 %.

Repetisjonsoppgaver for kapittel 8

3. Hvis du låner beløpet a til årlig rente 11% , da har du etter 1 år en gjeld på $a(1+11/100) = a(1.11)$; hvis du låner til årlig rente 10% med rentepåtegning hver måned, vil din gjeld etter 1 år være $a(1+10/12\cdot 100)^{12} \approx 1.1047a$, slik at det siste er mest fordelaktig.

5. Vi bruker formel (8.4.5): (a) $\dfrac{44}{1-0.56} = 100$ (b) $\dfrac{300}{1-0.97} = \dfrac{300}{0.03} = 10\,000$

(c) Det første leddet er $(1/20)^{-2} = 400$ og kvotienten er $1/20$, slik at summen blir $\dfrac{400}{1-1/20} = 8000/19$.

(d) $\dfrac{3}{1-2/5} = 5$ (e) Det første leddet er 20 og kvotienten er $1/1.2$, slik at summen blir $\dfrac{20}{1-1/1.2} = 120$.

(f) Divergerer, da kvotienten $k = 1.01 \geq 1$.

7. (a) og (b) se fasiten. (c) Vi løser likning (8.5.3) mhp. a og får $a = S_n r/[(1+r)^n - 1]$. Sett så $S_n = 60\,000$ og $r = 0.06/12 = 0.005$. Se fasiten.

9. (a) n^* er bestemt ved at $A(1-p/100)^{n^*} = K$. Ved å ta ln av hver side får vi $\ln A + n^* \ln(1-p/100) = \ln K$. Det følger at $n^* = \dfrac{\ln(K/A)}{\ln(1-p/100)}$. (b) Total profitt π i tidsrommet $[0, n^*]$ blir

$$\pi = A + A(1-p/100) + \cdots + A(1-p/100)^{n^*} - n^*K = A\frac{1-(1-p/100)^{n^*+1}}{1-(1-p/100)} - n^*K$$
$$= \frac{100A}{p}[1-(1-p/100)^{n^*+1}] - n^*K = \frac{100}{p}(A-K) - K(n^*-1)$$

der vi brukte summeformelen for en endelig geometrisk rekke og at $(1-p/100)^{n^*} = K/A$. (c) $n^* = \ln(5/7)/\ln(0.98) \approx 16.65$ og total profitt blir $50 \cdot 2\,000\,000 - 16.65 \cdot 2\,000\,000 \approx 21\,750\,000$.

9 Maksimums- og minimumsproblemer

9.2

2. (a) $f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1-x)(1+x)$. Et fortegnsdiagram viser at $f(x)$ vokser i $[-1, 1]$, men avtar i $(-\infty, -1]$ og i $[1, \infty)$. Siden $f(x) = x(3-x^2)$ går mot ∞ når $x \to -\infty$ og går mot $-\infty$ når $x \to \infty$, har funksjonen ikke noen ekstrempunkter. Tegn grafen! (Funksjonen har det vi kaller lokalt minimum for $x = -1$ og lokalt maksimum for $x = 1$.)
(b) $g'(x) = \dfrac{8(4-3x^2)}{(3x^2+4)^2} = \dfrac{8(2-\sqrt{3}x)(2+\sqrt{3}x)}{(3x^2+4)^2}$. Et fortegnsdiagram viser at $g(x)$ avtar i intervallet $(-\infty, -2\sqrt{3}/3]$, vokser i $[-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3]$ og avtar i $(2\sqrt{3}/3, \infty)$. Vi ser at $g(x) = 8/(3x+4/x) \to 0$ når $x \to \pm\infty$. Dermed er $-2\sqrt{3}/3$ et minimumspunkt og $2\sqrt{3}/3$ et maksimumspunkt. Tegn grafen.

7. $g'(x) = 3x^2 \ln x + x^3/x = 3x^2(\ln x + \frac{1}{3})$. $g'(x) = 0$ når $\ln x = -\frac{1}{3}$, dvs. $x = e^{-1/3}$. Vi ser at $g'(x) \le 0$ i $(0, e^{-1/3}]$ og $g'(x) \ge 0$ i $[e^{-1/3}, \infty)$, slik at $x = e^{-1/3}$ minimerer $g(x)$. Siden $g(x) \to \infty$ når $x \to \infty$ fins det ikke noe maksimum.

10. (b) La x og y betegne hhv. bredden og høyden av skriftbildet. Da er bredden og høyden av boksiden hhv. $x + 2b$ og $y + 2a$, slik at arealet av boksiden er $(x+2b)(y+2a) = xy + 2ax + 2by + 4ab$. Siden $xy = A$, og dermed $y = A/x$, er problemet redusert til det å minimere funksjonen $f(x) = A + 2ax + 2bA/x + 4ab$ for $x > 0$. Vi får $f'(x) = 2a - 2bA/x^2 = 0$ for $x = \sqrt{bA/a}$. Dette gir minimum fordi $f''(x) = 4bA/x^3 > 0$ for alle $x > 0$. Den boksiden som har minst areal har derved bredde $2b + \sqrt{bA/a}$ og høyde $2a + \sqrt{aA/b}$.

9.3

2. (a) $\pi(Q) = Q(a-Q) - kQ = -Q^2 + (a-k)Q$, slik at $\pi'(Q) = -2Q + (a-k) = 0$ for $Q = Q^* = \frac{1}{2}(a-k)$. Den maksimerer π fordi $\pi''(Q) < 0$. Monopolprofitten er $\pi(Q^*) = -(\frac{1}{2}(a-k))^2 + (a-k)\frac{1}{2}(a-k) = \frac{1}{4}(a-k)^2$. (b) $d\pi(Q^*)/dk = -\frac{1}{2}(a-k) = -Q^*$, som i eksempel 9.3.3. (c) Den nye profittfunksjonen er $\hat{\pi}(Q) = \pi(Q) + sQ = -Q^2 + (a-k)Q + sQ$. Her er $\hat{\pi}'(Q) = -2Q + a - k + s = 0$ når $\hat{Q} = \frac{1}{2}(a-k+s)$. Vi ser at $\hat{Q} = \frac{1}{2}(a-k+s) = a-k$ dersom $s = a-k$, som dermed er den subsidiesatsen som kreves for at monopolisten skal produsere $a-k$ enheter.

9.4

2. I alle tilfellene eksisterer maksimum og minimum ifølge ekstremverdisetningen. Følg oppskriften i (9.4.1) og finn fasitsvarene ved å benytte følgende:

(a) $f(x)$ er strengt avtakende, slik at maksimum er i $x = 0$, minimum i $x = 3$.
(b) $f(-1) = f(2) = 10$ og $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ i $x = \pm 1$. $f(1) = 6$.
(c) $f(x) = x + 1/x$. $f(1/2) = f(2) = 5/2$ og $f'(x) = 1 - 1/x^2 = 0$ i $x = \pm 1$. $f(1) = 2$.
(d) $f(-1) = 4$, $f(\sqrt{5}) = 0$, og $f'(x) = 5x^2(x^2 - 3) = 0$ i $x = 0$ og $x = \sqrt{3}$. $f(0) = 0$, $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$. (e) $f(0) = 0$, $f(3000) = 4.5 \cdot 10^9$, $f'(x) = 3(x^2 - 3000x + 2 \cdot 10^6 = 3(x - 500)(x - 2000)$. $f(1000) = 2.5 \cdot 10^9$, $f(2000) = 2 \cdot 10^9$.

3. (a) Når det er $60 + x$ reisende får charterselskapet $800 - 10x$ fra hver reisende, slik at det har samlet inntekt $\$(60+x)(800-10x)$. (b) Med $P(x) = 4800 + 20x - x^2$, $x \in [0, 20]$, er $P'(x) = 20 - 2x = 0$ for $x = 10$. Siden $P''(x) = -2$ gir dette maksimum.

9.5

1. (a) $(f(2) - f(1))/(2 - 1) = (4 - 1)/1 = 3$ og $f'(x) = 2x$, slik at $2x^* = 3$, og derfor $x^* = 3/2$.
(b) $(f(1) - f(0))/1 = -1$ og $f'(x) = -x/\sqrt{1 - x^2}$, slik at $x^*/\sqrt{1 - (x^*)^2} = 1$, og derfor $\sqrt{1 - (x^*)^2} = x^*$, slik at $1 - (x^*)^2 = (x^*)^2$, eller $(x^*)^2 = \frac{1}{2}$. Den eneste positive løsningen er $x^* = \sqrt{2}/2$.
(c) $(f(6) - f(2))/4 = -1/6$ og $f'(x) = -2/x^2$, slik at $-2/(x^*)^2 = -1/6$, og derfor $x^* = \sqrt{12}$.
(d) $(f(4) - f(0))/4 = 1/4$ og $f'(x) = x/\sqrt{9 + x^2}$, slik at $x/\sqrt{9 + (x^*)^2} = 1/4$, og derfor $x^* = \sqrt{3}$.

9.6

4. (a) Se fasiten. (b) (i) $\pi(Q) = 1840Q - (2Q^2 + 40Q + 5000) = 1800Q - 2Q^2 - 5000$. Siden $\pi'(Q) = 1800 - 4Q = 0$ for $Q = 450$ og $\pi''(Q) = -4 < 0$, vil $Q = 450$ maksimere profitten.
(ii) $\pi(Q) = 2200Q - 2Q^2 - 5000$. Siden $\pi'(Q) = 2200 - 4Q = 0$ for $Q = 550$ og $\pi''(Q) = -4 < 0$, vil $Q = 550$ maksimere profitten.
(iii) $\pi(Q) = -2Q^2 - 100Q - 5000 \leq -5000$ for alle $Q \geq 0$, slik at $Q = 0$ maksimerer profitten.

9.7

2. (a) Strengt avtakende, ingen lokale ekstrempunkter. (b) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ for $x = \pm 1$. Med $f''(x) = 6x$ er $f''(-1) = -6$ og $f''(1) = 6$, slik at $x = -1$ er et lokalt maksimumspunkt, og $x = 1$ er et lokalt minimumspunkt. (c) $f'(x) = 1 - 1/x^2 = 0$ for $x = \pm 1$. Med $f''(x) = 2/x^3$, $f''(-1) = -2$ og $f''(1) = 2$, får vi at $x = -1$ er et lokalt maksimumspunkt, og $x = 1$ er et lokalt minimumspunkt. (d) $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3) = 0$ for $x = \pm\sqrt{3}$. Videre er $f''(x) = 20x^3 - 30x$. Siden $f''(\sqrt{3}) = 30\sqrt{3} > 0$ er $x = \sqrt{3}$ et lokalt minimumspunkt, mens $f''(-\sqrt{3}) = -30\sqrt{3} < 0$ er $x = \sqrt{3}$ et lokalt maksimumspunkt. (e) $f'(x) = x - 3 = 0$ for $x = 3$. Siden $f''(x) = 1 > 0$, er dette et lokalt minimumspunkt. (f) $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2) = 0$ for $x = 0$ og $x = -2$. Videre er $f''(x) = 6x + 6$. Siden $f''(0) = 6 > 0$ er $x = 0$ et lokalt minimumspunkt, mens $f''(-2) = -6 < 0$ er $x = \sqrt{3}$ et lokalt maksimumspunkt.

5. (a) $f(x)$ er definert hvis $x \neq 0$ og $x \geq -6$. $f(x) = 0$ i $x = -6$ og i $x = -2$. $f(x)$ har samme fortegn som $(x + 2)/x$, slik at $f(x) > 0$ i $(-6, -2)$ og i $(0, \infty)$. (b) Vi finner

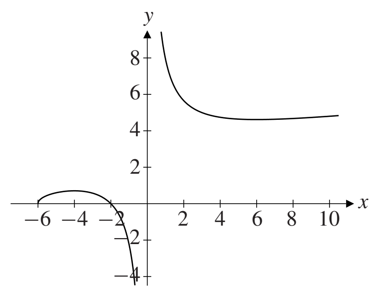
$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}\sqrt{x+6} + \frac{x+2}{x}\frac{1}{2\sqrt{x+6}} = \frac{-4x - 24 + x^2 + 2x}{2x^2\sqrt{x+6}} = \frac{x^2 - 2x - 24}{2x^2\sqrt{x+6}} = \frac{(x+4)(x-6)}{2x^2\sqrt{x+6}}$$

Et fortegnsdiagram viser at $f'(x) > 0$ i $(-6, -4)$ og i $(6, \infty)$ mens $f'(x) < 0$ i $(-4, 0)$ og i $(0, 6)$. Det følger at f er strengt voksende i $[-6, -4]$ og i $[6, \infty)$, strengt avtakende i $[-4, 0)$ og i $(0, 6]$. Det

følger fra førstederiverttesten at f har to lokale minimumspunkter, $x_1 = -6$ og $x_2 = 6$, og ett lokalt maksimumspunkt, $x_3 = -4$, med $f(-6) = 0$, $f(6) = \frac{4}{3}\sqrt{8} = 8\sqrt{2}/3$ og $f(-4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
(c) Siden $\lim_{x\to 0}\sqrt{x+6} = 6 > 0$, mens $\lim_{x\to 0^-}(1+2/x) = -\infty$ og $\lim_{x\to 0^+}(1+2/x) = \infty$, ser vi at $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$og $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$. Videre er

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x-24}{2x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+6}}\right) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Se figur M9.7.5.



Figur M9.7.5

10. $f(x) = x^3 + ax + b \to \infty$ når $x \to \infty$ og $f(x) \to -\infty$ når $x \to -\infty$. Altså har $f(x) = 0$ alltid minst en rot. Videre er $f'(x) = 3x^2 + a$. For $a \geq 0$, er derfor $f'(x) > 0$ for alle $x \neq 0$, slik at f er strengt voksende, og likningen har da bare én rot. Merk at for $a \geq 0$ er $4a^3 + 27b^2 \geq 0$. Anta så at $a < 0$. Da er $f'(x) = 0$ for $x = \pm\sqrt{-a/3} = \pm\sqrt{p}$ med $p = -a/3 > 0$. Da har f et lokalt maksimum i $(-\sqrt{p}, b + 2p\sqrt{p})$ og et lokalt minimum i $(\sqrt{p}, b - 2p\sqrt{p})$. Hvis en av de lokale ekstremverdiene er 0, har likningen en dobbeltrot, og dette er tilfellet hvis og bare hvis $4p^3 = b^2$, dvs. hvis og bare hvis $4a^3 + 27b^2 = 0$. Likningen har tre reelle røtter hvis og bare hvis den lokale maksimumsverdien er positive og den lokale minimumsverdien er negativ. Dette inntreffer hvis og bare hvis $b > -2p\sqrt{p}$ og $b < 2p\sqrt{p} \iff |b| < 2p\sqrt{p} \iff b^2 < 4p^3 \iff 4a^3 + 27b^2 < 0$.

9.8

3. En får enkelt fasitsvarene ved å bruke disse deriverte: (a) $y' = -e^{-x}(1+x)$, $y'' = xe^{-x}$
(b) $y' = \dfrac{x-1}{x^2}$, $y'' = \dfrac{2-x}{x^3}$ (c) $y' = x^2e^{-x}(3-x)$, $y'' = xe^{-x}(x^2-6x+6)$
(d) $y' = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$, $y'' = \dfrac{6\ln x - 5}{x^4}$ (e) $y' = 2e^x(e^x-1)$, $y'' = e^x(2e^x-1)$
(f) $y' = 2e^{-x}(2-x^2)$, $y'' = e^{-x}(x^2-2x-2)$

Repetisjonsoppgaver for kapittel 9

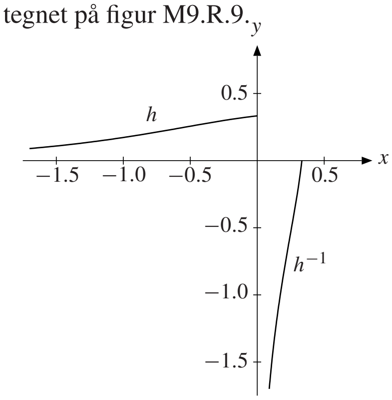
3. $\pi = -0.0016Q^2 + 44Q - 0.0004Q^2 - 8Q - 64\,000 = -0.002Q^2 + 36Q - 64\,000$, og $Q = 9000$ maksimerer denne kvadratiske funksjonen.
(b) $\mathrm{El}_Q C(Q) = \dfrac{Q}{C(Q)}C'(Q) = \dfrac{0.0008Q^2 + 8Q}{0.0004Q^2 + 8Q + 64\,000} \approx 0.12$ når $Q = 1000$.

8. (b) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 + x - \frac{1}{2}x^2 = \dfrac{x^2(1-x)}{2(x+1)}$. Et fortegnsdiagram viser at $f'(x) \geq 0$ i $(-1, 1]$ og $f'(x) \leq 0$ i $[1, \infty)$. Altså er $x = 1$ et maksimumspunkt. $f''(x) = \dfrac{-x(x^2+x-1)}{(x+1)^2} = 0$ for $x = 0$ og $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. (Merk at $x = \frac{1}{2}(-\sqrt{5}-1)$ er utenfor definisjonsområdet.) Siden $f''(x)$ endrer fortegn rundt disse punktene, de er begge vendepunkter.

9. (a) $h'(x) = \dfrac{e^x(2+e^{2x}) - e^x 2e^{2x}}{(2+e^{2x})^2} = \dfrac{e^x(2-e^{2x})}{(2+e^{2x})^2}$. Se fasiten.
(b) h er strengt voksende i $(-\infty, 0]$, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$ og $h(0) = 1/3$. Derfor er h definert på $(-\infty, 0]$ og har en invers definert på $(0, 1/3]$ med verdier i $(-\infty, 0]$. For å finne den inverse, merk at $\dfrac{e^x}{2+e^{2x}} = y \Leftrightarrow y(e^x)^2 - e^x + 2y = 0$. Denne annengradslikningen i e^x har røttene $e^x = [1 \pm \sqrt{1-8y^2}]/2y$. Siden $y = 1/3$ for $x = 0$, ser vi at vi må ha $e^x = [1 - \sqrt{1-8y^2}]/2y$, og derfor $x = \ln(1 - \sqrt{1-8x^2}) - \ln(2x)$. Ved å bruke x som fri variabel får vi

$$h^{-1}(x) = \ln(1 - \sqrt{1-8x^2}) - \ln(2x)$$

Funksjonen og dens inverse er tegnet på figur M9.R.9.



Figur M9.R.9

11. Merk først at $f(x) \to 0$ når $x \to \pm\infty$ (divider teller og nevner med x^3). Derivasjon gir

$$f'(x) = \frac{18x^2(x^4+x^2+2) - 6x^3(4x^3+2x)}{(x^4+x^2+2)^2} = \frac{-6x^2(x^4+x^2-6)}{(x^4+x^2+2)^2} = \frac{-6x^2(x^2-3)(x^2+2)}{(x^4+x^2+2)^2}$$

slik at f er stasjonær når $x = 0$ og når $x = \pm\sqrt{3}$. Et fortegnsdiagram viser at $x = \sqrt{3}$ er et lokalt (og globalt) maksimumspunkt, $x = -\sqrt{3}$ er et lokalt (og globalt) minimumspunkt, og $x = 0$ er ingen av delene. (Det er et vendepunkt.) Grafen til f er vist på figur f9.R.11 i fasiten.

10 Integrasjon

10.1

4. (a) $\int (t^3 + 2t - 3)\,dt = \int t^3\,dt + \int 2t\,dt - \int 3\,dt = \frac{1}{4}t^4 + t^2 - 3t + C$
(b) $\int (x-1)^2\,dx = \int (x^2 - 2x + 1)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$. Alternativt: Siden $\dfrac{d}{dx}(x-1)^3 = 3(x-1)^2$,

har vi $\int (x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}(x-1)^3 + C_1$. Dette er det samme som det første svaret, med $C_1 = C + 1/3$.

(c) $\int (x-1)(x+2)\,dx = \int (x^2+x-2)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

(d) Enten multipliserer vi først ut: $(x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$, og får $\int (x+2)^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + C$, eller: $\int (x+2)^3 = \frac{1}{4}(x+2)^4 + C_1$. (e) $\int (e^{3x} - e^{2x} + e^x)\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + C$

(f) $\int \frac{x^3-3x+4}{x}\,dx = \int \Big(x^2 - 3 + \frac{4}{x}\Big)dx = \frac{1}{3}x^3 - 3x + 4\ln|x| + C$.

(Legg merke til dette siste integralet, som mange har problemer med. Vi benytter bare at $(a-b+c)/d = a/d - b/d + c/d$. Integralet $\int \frac{x}{x^3-3x+4}\,dx$ er mye vanskeligere.

5. (a) Vi forenkler integranden: $\frac{(y-2)^2}{\sqrt{y}} = \frac{y^2-4y+4}{\sqrt{y}} = y^{3/2} - 4y^{1/2} + 4y^{-1/2}$. Dermed får vi $\int \frac{(y-2)^2}{\sqrt{y}}dy = \int (y^{3/2} - 4y^{1/2} + 4y^{-1/2})\,dy = \frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{8}{3}y^{3/2} + 8y^{1/2} + C$.

(b) Polynomdivisjon: $\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$, slik at $\int \frac{x^3}{x+1}\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x+1| + C$.

(c) $\frac{d}{dx}(1+x^2)^{16} = 16(1+x^2)^{15}\cdot 2x = 32x(1+x^2)^{15}$ slik at $\int x(1+x^2)^{15}\,dx = \frac{1}{32}(1+x^2)^{16} + C$.

13. Integrasjon gir: $f'(x) = \int (x^{-2} + x^3 + 2)\,dx = -x^{-1} + \frac{1}{4}x^4 + 2x + C$. Med $f'(1) = 1/4$ får vi $1/4 = -1 + \frac{1}{4} + 2 + C$, slik at $C = -1$. Ny integrasjon gir $f(x) = \int (-x^{-1} + \frac{1}{4}x^4 + 2x - 1)\,dx = -\ln x + \frac{1}{20}x^5 + x^2 - x + D$. Med $f(1) = 0$ har vi $0 = -\ln 1 + \frac{1}{20} + 1 - 1 + D$, slik at $D = -1/20$.

10.2

6. (a) Et fortegnsdiagram viser at $f(x) > 0$ når $0 < x < 1$ og når $x > 2$. (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, slik at $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$ når $x_0 = 1 - \sqrt{3}/3$ og $x_1 = 1 + \sqrt{3}/3$. Vi ser at $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_0$ eller $x > x_1$, og videre at $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x_0 < x < x_1$. Dermed er f (strengt) voksende i $(-\infty, x_0]$ og i $[x_1, \infty)$, og (strengt) avtakende i $[x_0, x_1]$. Det følger at x_0 er et lokalt maksimumspunkt og x_1 er et lokalt minimumspunkt. (c) Se fasiten.

7. (a) $f'(x) = -1 + \frac{3000\,000}{x^2} = 0$ for $x_1 = \sqrt{3000\,000} = 1000\sqrt{3}$, som vi lett ser er et maksimumspunkt.

(b) $I = \frac{1}{2000}\Big|_{1000}^{3000}\big(4000x - \frac{1}{2}x^2 - 3\,000\,000\ln x\big) = 2000 - 1500\ln 3 \approx 352$

10.3

2. (a) $\int_0^1 (x^{p+q} + x^{p+r})\,dx = \Big|_0^1 \frac{x^{p+q+1}}{p+q+1} + \frac{x^{p+r+1}}{p+r+1} = \frac{1}{p+q+1} + \frac{1}{p+r+1}$

(b) $f'(1) = 6$ gir $a + b = 6$. Siden $f''(x) = 2ax + b$, gir $f''(1) = 18$ at $2a + b = 18$. Det følger at $a = 12$ og $b = 6$, slik at $f'(x) = 12x^2 - 6x$. Men da er $f(x) = \int (12x^2 - 6x)\,dx = 4x^3 - 3x^2 + C$, og siden vi skal ha $\int_0^2 (4x^3 - 3x^2 + C) = 18$, må $\Big|_0^2 (x^4 - x^3 + Cx) = 18$, dvs. $C = 5$.

4. (a) $\int_0^1 (x^2+2)^2\,dx = \int_0^1 (x^4 + 4x^2 + 4)\,dx = \Big|_0^1 (\frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + 4x) = \frac{83}{15}$

(b) $\int_0^1 \big(x + x^{1/2} + x^{1/4}\big)\,dx = \Big|_0^1 \big(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{4}{5}x^{5/4}\big) = \frac{59}{30}$

(c) $\int_0^1 \frac{x^2+x+\sqrt{x+1}}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x(x+1)+(x+1)^{1/2}}{x+1}\,dx = \int_0^1 (x+(x+1)^{-1/2})\,dx =$
$\Big|_0^1 (\frac{1}{2}x^2 + 2(x+1)^{1/2})\,dx = 2\sqrt{2} - \frac{3}{2}$

(d) $A\frac{x+b}{x+c} + \frac{d}{x} = A\frac{x+c+b-c}{x+c} + \frac{d}{x} = A + \frac{A(b-c)}{x+c} + \frac{d}{x}$. Integrer og se fasiten.

8. $\int_0^T e^{-\varrho t}\,dt = \Big|_0^T (-1/\varrho)e^{-\varrho t} = (-1/\varrho)(e^{-\varrho T}-1) = (1-e^{-\varrho T})/\varrho$, og vi får formelen i fasiten, $W(T) = K(1-e^{-\varrho T})/\varrho T$. Når $T \to \infty$ vil $e^{-\varrho T} \to 0$, slik at også $W(T) \to 0$. Ved å bruke l'Hôpital's regel, finner vi at $W(T) \to K$ når $T \to 0^+$. For $T > 0$ er $W'(T) = Ke^{-\varrho T}(1+\varrho T - e^{\varrho T})/\varrho T^2 < 0$, siden $e^{\varrho T} > 1 + \varrho T$ (se oppgave 5.11.7). Vi slutter at $W(T)$ er strengt avtakende og at $W(T) \in (0, K)$.

9. (a) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+4}\,(\sqrt{x+4}-2)} > 0$ for $x > 0$ og f har verdimengde $(-\infty,\infty)$, slik at f har en invers definert på $(-\infty,\infty)$. Vi finner at den inverse er $g(x) = e^{x/2} + 4e^{x/4}$. ($y = 4\ln(\sqrt{x+4}-2) \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x+4}-2) = y/4 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = e^{y/4}+2 \Leftrightarrow x+4 = (e^{y/4}+2)^2 \Leftrightarrow x = e^{y/2}+4e^{y/4}$.)
(b) Se fasiten. (c) Arealet A er skyggelagt på figur f10.3.9 i fasiten. Som inverse funksjoner er grafene til f og g symmetriske omkring linjen $y = x$, slik at areal A = areal B. Men areal B er areal av et rektangel med grunnlinje a og høyde 10, minus arealet under grafen til g over intervallet $[0, a]$. Derfor er $B = 10a - \int_0^a (e^{x/2} + 4e^{x/4})\,dx = 10a + 18 - 2e^{a/2} - 16e^{a/4}$. Siden $a = f(10) = 4\ln(\sqrt{14}-2)$, blir $A = B = 10a + 14 - 8\sqrt{14} \approx 6.26$.

10.4

2. (a) Er antall individer n, la N betegne antallet med inntekt i intervallet $[b, 2b]$ og M deres totale inntekt. Da er $N = n\int_b^{2b} Br^{-2}\,dr = n\Big|_b^{2b} -Br^{-1} = \dfrac{nB}{2b}$ og $M = n\int_b^{2b} Br^{-2}r\,dr = n\int_b^{2b} Br^{-1}\,dr = n\Big|_b^{2b} B\ln r = nB\ln 2$. Dermed er middelinntekten $m = M/N = 2b\ln 2$.
(b) Total etterspørsel er $x(p) = \int_b^{2b} nD(p,r)f(r)\,dr = \int_b^{2b} nAp^\gamma r^\delta Br^{-2}\,dr = nABp^\gamma \int_b^{2b} r^{\delta-2}\,dr$
$= nABp^\gamma \Big|_b^{2b} \dfrac{r^{\delta-1}}{\delta-1} = nABp^\gamma b^{\delta-1}\dfrac{2^{\delta-1}-1}{\delta-1}$.

6. (a) Se fasiten. (b) Likevekt når $6000/(Q^*+50) = Q^*+10$. Positiv løsning: $Q^* = 50$ med $P^* = 60$.
$\text{CS} = \int_0^{50}\Big[\dfrac{6000}{Q+50} - 60\Big]\,dQ = \Big|_0^{50}[6000\ln(Q+50) - 60Q] = 6000\ln 2 - 3000$,
$\text{PS} = \int_0^{50}(50-Q)\,dQ = 1250$

7. (b) $\int_0^t \big(g(\tau)-f(\tau)\big)\,d\tau = \int_0^t (2\tau^3 - 30\tau^2 + 100\tau)\,d\tau = \Big|_0^t (\frac{1}{2}\tau^4 - 10\tau^3 + 50\tau^2) =$
$\Big|_0^t \frac{1}{2}\tau^2(\tau^2 - 20\tau + 100) = \Big|_0^t \frac{1}{2}\tau^2(\tau-10)^2 = \frac{1}{2}t^2(t-10)^2 \geq 0$ for alle t.
(c) $\int_0^{10} p(t)f(t) = \int_0^{10}\big(-t^3 + 9t^2 + 11t - 11 + 11/(t+1)\big)\,dt = 940 + 11\ln 11 \approx 966.38$,
$\int_0^{10} p(t)g(t)dt = \int_0^{10}\big(t^3 - 19t^2 + 79t + 121 - 121/(t+1)\big)\,dt = 3980/3 - 121\ln 11 \approx 1036.52$.

Profil g bør velges.

8. (a) $S = \int_0^T e^{-rx}(e^{gT-gx} - 1)\,dx = e^{gT}\int_0^T e^{-(r+g)x}\,dx - \int_0^T e^{-rx}\,dx = \dfrac{e^{gT} - e^{-rT}}{r+g} + \dfrac{e^{-rT}-1}{r}$, og derfor er $r(r+g)S = re^{gT} + ge^{-rT} - (r+g)$.

(b) Implisit derivasjon mhp. g gir $rS = re^{gT}\Big(T + g\dfrac{\partial T}{\partial g}\Big) + e^{-rT} + ge^{-rT}\Big(-r\dfrac{\partial T}{\partial g}\Big) - 1$, slik at $\dfrac{\partial T}{\partial g} = \dfrac{rS + 1 - rTe^{gT} - e^{-rT}}{rg(e^{gT} - e^{-rT})}$.

10.6

2. (a) Formel (2) med $f(x) = \ln(x+2)$ og $g'(x) = x$, med valget $g(x) = \frac{1}{2}x^2$, gir $\int_{-1}^{1} x\ln(x+2)\,dx = \Big|_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^2\ln(x+2) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2}{x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big(x - 2 + \dfrac{4}{x+2}\Big)\,dx = 2 - \frac{3}{2}\ln 3$. (Her brukte vi polynomdivisjon på brøken $x^2/(x+2)$.)

(b) Siden $\dfrac{d}{dx}2^x = 2^x\ln 2$, er $2^x/\ln 2$ et ubestemt integral av 2^x. Dermed får vi
$\int_0^2 x2^x\,dx = \Big|_0^2 x\dfrac{2^x}{\ln 2} - \int_0^2 \dfrac{2^x}{\ln 2}\,dx = \dfrac{8}{\ln 2} - \Big|_0^2 \dfrac{2^x}{(\ln 2)^2} = \dfrac{8}{\ln 2} - \Big(\dfrac{4}{(\ln 2)^2} - \dfrac{1}{(\ln 2)^2}\Big) = \dfrac{8}{\ln 2} - \dfrac{3}{(\ln 2)^2}$

(c) Vi bruker først delvis integrasjon på det ubestemte integralet, med $f(x) = x^2$ og $g(x) = e^x$:
$(*)\ \int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx$. På det siste integralet bruker vi igjen delvis integrasjon med $f(x) = 2x$ og $g(x) = e^x$, som gir $\int 2xe^x\,dx = 2xe^x - \int 2e^x\,dx = 2xe^x - (2e^x + C)$. Innsatt i $(*)$ gir det $\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$, og dermed $\int_0^1 x^2e^x\,dx = \Big|_0^1(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x) = (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2) = e - 2$. Alternativt kunne vi brukt formel (10.6.2):
$\int_0^1 x^2e^x\,dx = \Big|_0^1 x^2e^x - 2\int_0^1 xe^x\,dx = e - 2\Big[\Big|_0^1 xe^x - \int_0^1 e^x\,dx\Big] = e - 2[e - \Big|_0^1 e^x] = e - 2$

5. (a) Formel (10.6.2) gir, $\int_0^T te^{-rt}\,dt = \Big|_0^T t\dfrac{-1}{r}e^{-rt} - \int_0^T \dfrac{-1}{r}e^{-rt}\,dt = \dfrac{-T}{r}e^{-rT} + \dfrac{1}{r}\int_0^T e^{-rt}\,dt$ $= \dfrac{-T}{r}e^{-rT} + \dfrac{1}{r}\Big|_0^T \dfrac{-1}{r}e^{-rt} = \dfrac{1}{r^2}(1 - (1 + rT)e^{-rT})$. Multipliser så dette uttrykket med a.

(b) $\int_0^T (a + bt)e^{-rt}\,dt = a\int_0^T e^{-rt}\,dt + b\int_0^T te^{-rt}\,dt$, osv. ved å bruke (a).

(c) $\int_0^T (a - bt + ct^2)e^{-rt}\,dt = a\int_0^T e^{-rt}\,dt - b\int_0^T te^{-rt}\,dt + c\int_0^T t^2e^{-rt}\,dt$. Bruk (a) og (b) og $\int_0^T t^2e^{-rt}\,dt = \Big|_0^T t^2(-1/r)e^{-rt} - \int_0^T 2t(-1/r)e^{-rt}\,dt = -(1/r)T^2e^{-rT} + (2/r)\int_0^T te^{-rt}\,dt$.

10.7

2. (a) Substituer $u = 2x^2+3$. Da er $du = 4x\,dx$, og integralet blir $\frac{1}{4}\int u^5\,du$‘$= \frac{1}{24}u^6 + C = \frac{1}{24}(2x^2+3)^6 + C$.

(b) Med $u = x^3 + 2$ får vi $du = 3x^2\,dx$ og $\int x^2e^{x^3+2}\,dx = \int \frac{1}{3}e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3+2} + C$.

(c) Første forsøk: $u = x + 2$, som gir $du = dx$ og $\int \frac{\ln(x+2)}{2x+4}\,dx = \int \frac{\ln u}{2u}\,du$.
Dette ser ikke enklere ut enn det opprinnelige integralet. En bedre ide er å substituere $u = \ln(x+2)$. Da får vi $du = \frac{dx}{x+2}$ og $\int \frac{\ln(x+2)}{2x+4}\,dx = \int \frac{1}{2}u\,du = \frac{1}{4}u^2 + C = \frac{1}{4}(\ln(x+2))^2 + C$.
(d) Første forsøk: $u = 1 + x$. Da er $du = dx$, og $\int x\sqrt{1+x}\,dx = \int (u-1)\sqrt{u}\,du = \int (u^{3/2} - u^{1/2})\,du$ $= \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C$. Andre forsøk: $u = \sqrt{1+x}$. Da er $u^2 = 1 + x$ og $2u\,du = dx$. Integralet blir da $\int x\sqrt{1+x}\,dx = \int (u^2-1)u2u\,du = \int (2u^4 - 2u^3)\,du$ osv. Undersøk om du får samme svar. Også delvis integrasjon fører fram i dette tilfellet: Sett $f(x) = x$ og $g'(x) = \sqrt{1+x}$, med $g(x) = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$. (Svarene ser forskjellige ut, men er det ikke.)
(e) Med $u = 1 + x^2$, $x^2 = u - 1$ og $du = 2x\,dx$, får vi $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx = \int \frac{x^2 \cdot x}{(1+x^2)^3}\,dx =$ $\frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u^3}\,du = \frac{1}{2}\int (u^{-2} - u^{-3})\,du = -\frac{1}{2}u^{-1} + \frac{1}{4}u^{-2} + C = \frac{-1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4(1+x^2)^2} + C$.
(f) Med $u = \sqrt{4 - x^3}$, $u^2 = 4 - x^3$, og $2u\,du = -3x^2\,dx$, får vi $\int x^5\sqrt{4-x^3}\,dx = \int x^3\sqrt{4-x^3}\,x^2\,dx$ $= \int (4-u^2)\,u\,(-\frac{2}{3})u\,du = \int (-\frac{8}{3}u^2 + \frac{2}{3}u^4)\,du = -\frac{8}{9}u^3 + \frac{2}{15}u^5 + C = -\frac{8}{9}(4-x^3)^{3/2} + \frac{2}{15}(4-x^3)^{5/2} + C$.

10.8

1. (a) Med $u = \sqrt{t}$ får vi $u^2 = t$, og dermed $2u\,du = dt$. Nå gir $t = 2$ at $u = 1$ og $t = 4$ gir $u = 2$. Dermed er $\int_1^4 e^{-\sqrt{t}}\,dt = \int_1^2 2ue^{-u}\,du = \Big|_1^2 -2ue^{-u} - 2\int_1^2 (-e^{-u})\,du = -4e^{-2} + 2e^{-1} + 2\Big|_1^2 (-e^{-t}) =$ $-4e^{-2} + 2e^{-1} - 2e^{-2} + 2e^{-1} = 4e^{-1} - 6e^{-2}$.
(b) Med $u = (2+x)^{1/3}$ er $u^3 = 2 + x$ og $3u^2\,du = dx$, slik at integralet blir $\int_1^2 (u^3 - 2)u3u^2\,du =$ $\int_1^2 (3u^6 - 6u^3)\,du = \Big|_1^2 (\frac{3}{7}u^7 - \frac{3}{2}u^4) = \frac{447}{14}$.
(c) Substituer $u = \sqrt[3]{x}$, $u^3 = x$, $dx = 3u^2\,du$, og bruk delvis integrasjon to ganger (se oppgave 10.6.2(c)): $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx = 3\int u^2e^u\,du = 3(u^2e^u - 2ue^u + 2e^u) + C = 3e^{x^{1/3}}(x^{2/3} - 2x^{1/3} + 2) + C$.
(d) $I = \int_0^1 (x^4 - x^9)(x^5 - 1)^{12}\,dx = \int_0^1 -x^4(x^5-1)^{13}\,dx$. Innfør $u = x^5 - 1$. Da $du = 5x^4dx$, og når $x = 0$ er $u = -1$, når $x = 1$ er $u = 0$, og derfor er $I = -\int_{-1}^0 \frac{1}{5}u^{13}\,du = -\Big|_{-1}^0 \frac{1}{70}u^{14} = \frac{1}{70}$.

3. (a) Vi substituerer $u = \sqrt{x}$, $u^2 = x$ og $2u\,du = dx$ og får $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \ln u^2\,du = 4\int \ln u\,du =$ $4(u\ln u - u) + C = 4\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$. (Her brukte vi eksempel 10.1.2. Delvis integrasjon med $f(x) = \ln x$ og $g'(x) = 1/\sqrt{x}$ gir faktisk litt enklere regning.)
(b) Med $u = 1 + \sqrt{x}$, $u - 1 = \sqrt{x}$, dvs. $(u-1)^2 = x$, får vi $2(u-1)\,du = dx$. Når $x = 0$ er $u = 1$, når $x = 4$ er $u = 3$. Dermed får vi
$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \int_1^3 \frac{2(u-1)}{\sqrt{u}}\,du = 2\int_1^3 (u^{1/2} - u^{-1/2})\,du = 2\Big|_1^3 (\frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2})\,du = \frac{8}{3}$
(Substitusjonen $u = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ kan også brukes.)

4. (a) Ved delbrøkoppspalting får vi (sjekk at det er rett) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{2}{x+2}$.

Her er en enkel metode for å finne denne oppspaltingen: Sett

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \tag{$*$}$$

der A og B er konstanter. For å finne A multipliserer vi $(*)$ med faktoren $x+1$. Da får vi:

$$\frac{x}{x+2} = A + \frac{B(x+1)}{x+2} \tag{$*$}$$

Ved å la $x \to -1$ får vi $A = -1$. På tilsvarende måte finner vi B ved å multiplisere $(*)$ med $x+2$ og la $x \to -2$. Det gir $B = 2$.

Vi finner da at $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)} = \int \frac{-1\,dx}{x+1} + \int \frac{2\,dx}{x+2} = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$.

(b) Ved delbrøksoppspalting får vi (sjekk at det er rett), $\dfrac{1-2x}{(x+3)(x-5)} = -\dfrac{7}{8}\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{9}{8}\dfrac{1}{x-5}$. Dermed er $\displaystyle\int \frac{(1-2x)\,dx}{(x+3)(x-5)} = -\tfrac{7}{8}\ln|x+3| - \tfrac{9}{8}\ln|x-5| + C$.

(c) Siden graden av polynomet i telleren er lik graden av polynomet i nevneren må vi først foreta polynomdivisjon. I dette tilfelle kan vi unngå det. Med et lite triks finner vi at

$$\frac{x^2}{(x+4)(x-2)} = \frac{x^2}{x^2+2x-8} = \frac{x^2+2x-8+8-2x}{x^2+2x-8} = 1 + \frac{8-2x}{(x-2)(x+4)}$$

Videre er

$$\frac{8-2x}{(x-2)(x+4)} = -\tfrac{8}{3}\frac{1}{x+4} + \tfrac{2}{3}\frac{1}{x-2}$$

Dermed får vi at

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x-2)(x+4)} = \int \Big(1 - \tfrac{8}{3}\frac{1}{x+4} + \tfrac{2}{3}\frac{1}{x-2}\Big)\,dx = x - \tfrac{8}{3}\ln|x+4| + \tfrac{2}{3}\ln|x-2| + C$$

5. Med $x = CDe^{\beta\tau}$ som ny variabel, er $dx = CD\beta e^{\beta\tau}\,d\tau = \beta x\,d\tau$, og vi får

$$\begin{aligned}
I &= \int_{CD}^{CDe^{\beta t}} \frac{A(1-x/C)}{1+x}\frac{dx}{\beta x} = \frac{A}{\beta C}\int_{CD}^{CDe^{\beta t}} \frac{C-x}{x(1+x)}\,dx = \frac{A}{\beta C}\int_{CD}^{CDe^{\beta t}} \left(\frac{C}{x} - \frac{1+C}{1+x}\right)dx \\
&= \frac{A}{\beta C}\Big|_{CD}^{CDe^{\beta t}} [C\ln x - (1+C)\ln(1+x)] \\
&= \frac{A}{\beta C}[C\ln(CDe^{\beta t}) - (1+C)\ln(1+CDe^{\beta t}) - C\ln(CD) + (1+C)\ln(1+CD)] \\
&= \frac{A}{\beta C}[C\ln(CD) + C\beta t - (1+C)\ln(1+CDe^{\beta t}) - C\ln(CD) + (1+C)\ln(1+CD)] \\
&= \frac{A(1+C)}{\beta C}\ln\left(\frac{1+CD}{1+CDe^{\beta t}}\right) + At
\end{aligned}$$

10.9

2. (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\Big|_a^b x = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2(b-a)}\Big|_a^b x^2 = \frac{1}{2(b-a)}(b^2-a^2) = \frac{1}{2}(a+b)$

(c) $\displaystyle\frac{1}{3(b-a)}\Big|_a^b x^3 = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$

3. (a) Se fasiten. Ved forenklet skrivemåte og bruk av resultatet i eksempel 1(a), får vi:

(b) $\int_0^\infty (x-1/\lambda)^2\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = -\Big|_0^\infty (x-1/\lambda)^2 e^{-\lambda x} + \int_0^\infty 2\,(x-1/\lambda)\,e^{-\lambda x}\,dx$
$= 1/\lambda^2 + 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx - (2/\lambda)\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = 1/\lambda^2 + 2/\lambda^2 - 2/\lambda^2 = 1/\lambda^2$

(c) $\int_0^\infty (x-1/\lambda)^3\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = -\Big|_0^\infty (x-1/\lambda)^3 e^{-\lambda x} + \int_0^\infty 3\,(x-1/\lambda)^2\,e^{-\lambda x}\,dx$
$= -1/\lambda^3 + (3/\lambda)\int_0^\infty (x-1/\lambda)^2\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = -1/\lambda^3 + (3/\lambda)(1/\lambda^2) = 2/\lambda^3$

7. Vi ser at integranden $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ bare er definert i det åpne intervallet $(-2, 3)$ og går mot ∞ i begge ender av dette intervallet. For å vise at integralet konvergerer, bruker vi oppskriften i formel (10.9.6) på side 313: Vi deler intervallet på et vilkårlig sted, for eksempel i $x = 0$, og viser at integralene over $(-2, 0]$ og $[0, 3)$ begge konvergerer. Hvis begge grensene eksisterer, er det gitte integralet summen av følgende to grenser: $I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-2+\varepsilon}^{3}\big(1/\sqrt{x+2}\big)\,dx$ og $I_2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-2}^{3-\varepsilon}\big(1/\sqrt{3-x}\big)\,dx$. Her $I_1 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\Big|_{-2+\varepsilon}^{3}\big(2\sqrt{x+2}\big) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\big(2\sqrt{5}-2\sqrt{\varepsilon}\big) = 2\sqrt{5}$, og $I_2 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\Big|_{-2}^{3-\varepsilon}\big(-2\sqrt{3-x}\big) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\big(-2\sqrt{\varepsilon}+2\sqrt{5}\big) = 2\sqrt{5}$. Svaret er dermed $I_1 + I_2 = 4\sqrt{5}$.

11. (a) Den foreslåtte substitusjonen gir $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = 1$, ifølge (10.9.7).

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sqrt{2}\sigma u)e^{-u^2}\,du = \mu$, ved å bruke (a) og eksempel 3.

(c) $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(2\sigma^2u^2 + 2\sqrt{2}\sigma\mu u + \mu^2)e^{-u^2}\,du$

$\displaystyle = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2e^{-u^2}\,du + \frac{2\sqrt{2}\sigma\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-u^2}\,du + \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sigma^2 + 0 + \mu^2$

(Delvis integrasjon gir $\displaystyle\int u^2e^{-u^2}\,du = -\tfrac{1}{2}ue^{-u^2} + \int \tfrac{1}{2}e^{-u^2}\,du$, slik at $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u^2e^{-u^2}\,du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.)

13. Tegn grafen til $f(x) = 1/(x\ln x)$ over intervallet $[2, \infty)$. Fra grafen din bør du kunne lese ut ulikheten

$$\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots + \frac{1}{n\ln n} > \int_2^{n+1}\frac{dx}{x\ln x}$$

Ved å substituere $u = \ln x$, $du = (1/x)dx$ i integralet, ser vi at

$$\int_2^{n+1}\frac{dx}{x\ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\frac{du}{u} = \Big|_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\ln u = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$$

som går mot ∞ når $n\to\infty$. Dermed divergerer rekken $\dfrac{1}{2\ln 2} + \dfrac{1}{3\ln 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\ln n} + \cdots$, men $n(1/n\ln n) = 1/\ln n \to 0$ når $n\to\infty$.

10.10

9. (a) Vi ser at dette er differensiallikningen for logistisk vekst. Likning (10.10.6) med $x = N$, $r = 0.39$, $K = 1000$ og $x_0 = N(0) = 1$ gir fasitsvaret. $N(20)$ er bare tilnærmet lik 710. (b) Se fasiten.

Repetisjonsoppgaver for kapittel 10

5. (a) Med $u = 9 + \sqrt{x}$ er $x = (u-9)^2$ og $dx = 2(u-9)\,du$. Når $x = 0$ er $u = 9$, og $x = 25$ gir $u = 14$. Derfor er $\displaystyle\int_0^{25} \frac{1}{9+\sqrt{x}}\,dx = \int_9^{14} \frac{2(u-9)}{u}\,du = \int_9^{14}\Big(2 - \frac{18}{u}\Big)\,du = 10 - 18\ln\frac{14}{9}$.
(b) Med $u = \sqrt{t+2}$ er $t = u^2 - 2$ og $dt = 2u\,du$. Når $t = 2$ er $u = 2$, og $t = 7$ gir $u = 3$. Dermed er $\displaystyle\int_2^7 t\sqrt{t+2}\,dt = \int_2^3 (u^2-2)u\cdot 2u\,du = 2\int_2^3 (u^4 - 2u^2)\,du = 2\Big|_2^3 \Big(\tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{2}{3}u^3\Big) = 886/15$
(c) Med $u = \sqrt[3]{19x^3+8}$ er $u^3 = 19x^3 + 8$ og $3u^2du = 57x^2dx$. Når $x = 0$ er $u = 2$, og $x = 1$ gir $u = 3$. Da får vi $\displaystyle\int_0^1 57x^2\sqrt[3]{19x^3+8}\,dx = \int_2^3 3u^3\,du = \Big|_2^3 \tfrac{3}{4}u^4 = 195/4$.

10. Likevekt når $50/(Q^*+5) = 10 + Q^*$, dvs. $(Q^*)^2 + 50Q^* - 275 = 0$. Den eneste positive løsningen er $Q^* = 5$, og da er $P^* = 5$. CS $\displaystyle = \int_0^5 \left[\frac{50}{Q+5} - 5\right] dQ = \Big|_0^5 [50\ln(Q+5) - 5Q] = 50\ln 2 - 25$,
PS $\displaystyle = \int_0^5 (5 - 4.5 - 0.1Q)\,dQ = 1.25$.

11. (a) $\displaystyle f'(t) = 4\frac{2\ln t\cdot(1/t)\cdot t - (\ln t)^2\cdot 1}{t^2} = 4\frac{(2-\ln t)\ln t}{t^2}$, og
$\displaystyle f''(t) = 4\frac{(2\cdot(1/t) - 2\ln t\cdot(1/t))\,t^2 - (2\ln t - (\ln t)^2)\,2t}{t^4} = 8\frac{(\ln t)^2 - 3\ln t + 1}{t^3}$
(b) Stasjonære punkter: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln t(2 - \ln t) = 0 \Leftrightarrow \ln t = 2$ eller $\ln t = 0 \Leftrightarrow t = e^2$ eller $t = 1$ Siden $f''(1) = 8 > 0$ og $f''(e^2) = -8e^{-6}$ er $t = 1$ et lokalt minimumspunkt og $t = e^2 \approx 7.4$ er et lokalt maksimumspunkt. Vi finner at $f(1) = 0$ og $f(e^2) = 16e^{-2} \approx 2.2$.
(c) Funksjonen er positiv over intervallet $[1, e^2]$ slik at arealet er $\displaystyle A = 4\int_1^{e^2}\frac{(\ln t)^2}{t}\,dt$. Innfør $u = \ln t$. Da er $du = (1/t)\,dt$. Når $t = 1$ er $u = 0$, når $t = e^2$ er $u = 2$. Vi får derfor $A = 4\int_0^2 u^2\,du = 4\,\Big|_0^2 \tfrac{1}{3}u^3 = \tfrac{32}{3}$.

12. Løsningene av (a) og (d) får vi av $\dot{x} = ax \iff x = Ae^{at}$. Løsningene av (b), (e), (g) og (h) får vi lett av (10.10.8) (men vi må først dividere likningene i (e) og (g) med hhv. 3 og 2). Likningene (c) og (f) er logistiske, og vi bruker (10.10.9),

18. (a) $F(x) = a(e^{-\lambda x} + a)^{-1}$, slik at $\displaystyle F'(x) = -a(e^{-\lambda x} + a)^{-2}(-\lambda e^{-\lambda x}) = \frac{\lambda a e^{-\lambda x}}{(e^{-\lambda x} + a)^2} = f(x)$, som viser at F er et ubestemt integral av f. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ siden $e^{-\lambda x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, og $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
(b) $F''(x) = f'(x) = a\lambda^2 e^{-\lambda x}(e^{-\lambda x} - a)(e^{-\lambda x} + a)^{-3}$. Merk at $F''(x) = 0$ for $e^{-\lambda x} = a$, dvs. for $x_0 = -(\ln a)/\lambda$. Siden $F''(x)$ endrer fortegn rundt x_0, er dette et vendepunkt. $F(x_0) = F(-(\ln a)/\lambda) = a/(a+a) = 1/2$. Se grafen på figur f10.R.18 i fasiten.
(c) $F(x)$ er strengt voksende og har verdimengde $(0, 1)$. Derfor har den en invers funksjon definert på $(0, 1)$. For å finne den inverse løser vi likningen $y = a/(e^{-\lambda x} + a)$ mhp. x: Vi får $e^{-\lambda x} + a = a/y$, eller $e^{-\lambda x} = a/y - a$ og dermed $-\lambda x = \ln(a/y - a)$, slik at $x = -(1/\lambda)(\ln(a/y - a))$. Den inverse er dermed $F^{-1}(x) = -(1/\lambda)(\ln(a/x - a))$, $x \in (0, 1)$. Endelig er $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)dx +$

$\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}[F(0) - F(a)] + \lim_{b\to\infty}[F(b) - F(0)] = 1$, der vi brukte resultatene i (a). (Fasiten refererer til et punkt (d) som ikke fins. Den viser dessuten at $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.)

11 Funksjoner av flere variabler

11.1

6. (a) Nevneren må ikke være 0, slik at funksjon er definert for de (x, y) der $y \neq x - 2$.
(b) Må kreve $2 - (x^2 + y^2) \geq 0$, dvs. $x^2 + y^2 \leq 2$.
(c) Sett $a = x^2 + y^2$. Vi må ha $(4 - a)(a - 1) \geq 0$, dvs. $1 \leq a \leq 4$. (Bruk et fortegnsdiagram.)

11.2

3. (a) og (b) er enkle. (c) $f(x, y) = (x^2 - 2y^2)^5 = u^5$, der $u = x^2 - 2y^2$. Da er $f_1'(x, y) = 5u^4u_1' = 5(x^2 - 2y^2)^4 2x = 10x(x^2 - 2y^2)^4$. I samme måten får vi at $f_2'(x, y) = 5u^4u_2' = 5(x^2 - 2y^2)^4(-4y) = -20y(x^2 - 2y^2)^4$. Endelig er $f_{12}''(x, y)$ den deriverte av $f_1'(x, y)$ mhp. y, idet vi holder x konstant, slik at $f_{12}''(x, y) = (\partial/\partial y)(10x(x^2 - 2y^2)^4) = 10x4(x^2 - 2y^2)^3(-4y) = -160xy(x^2 - 2y^2)^3$.

5. (a)–(c) er lette. (d) $z = x^y = (e^{\ln x})^y = e^{y \ln x} = e^u$ med $u = y \ln x$. Da er $z_x' = e^u u_x' = x^y(y/x) = yx^{y-1}$. På samme måte er $z_y' = e^u u_y' = x^y \ln x$. Dessuten er $z_{xx}'' = (\partial/\partial x)(yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2}$. (Ved partiell derivasjon av x^{y-1} mhp. x holdes y konstant, slik at regelen $dx^a/dx = ax^{a-1}$ anvendes.) $z_{yy}'' = (\partial/\partial y)(x^y \ln x) = x^y(\ln x)^2$. Endelig er $z_{xy}'' = (\partial/\partial y)(yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$. (Merk at hvis $w = x^{y-1} = x^v$, med $v = y - 1$, da er $w_y' = x^v \ln x \cdot 1 = x^{y-1}\ln x$.)

11.3

9. (a) Det kan være en help å tenke på figur A som kart over et fjell. Står en i P og ser i retningen av den positive x-aksen, vil terrenget være stigende slik at $f_x'(P) > 0$. Terrenget er avtakende i retning av den positive y-aksen, slik at $f_y'(P) < 0$. (b) (i) Linjen $x = 1$ har ingen punkter felles med noen av av nivåkurvene. (ii) Linjen $y = 2$ skjærer nivåkurven $z = 2$ i $x = 2$ og $x = 6$ (tilnærmet).
(c) Hvis du starter i punktet $(6, 0)$ og beveger deg opp langs linjen $2x+3y = 12$, møter du først nivåkurven $z = f(x, y) = 1$. Beveger du deg videre vil du møte nivåkurver med høyere z-verdier. Den nivåkurven du møter som har den høyeste z-verdien, er den der $z = 3$, der den rette linjen akkurat berører nivåkurven.

11.6

2. (a)–(d) er enkle. (e) $f(x, y, z) = (x^2 + y^3 + z^4)^6 = u^6$, med $u = x^2 + y^3 + z^4$. Da er $f_1' = 6u^5u_1' = 6(x^2 + y^3 + z^4)^5 2x = 12x(x^2 + y^3 + z^4)^5$, $f_2' = 6u^5u_2' = 6(x^2 + y^3 + z^4)^5 3y^2 = 18y^2(x^2 + y^3 + z^4)^5$, $f_3' = 6u^5u_3' = 6(x^2 + y^3 + z^4)^5 4z^3 = 24z^3(x^2 + y^3 + z^4)^5$ (f) $f(x, y, z) = e^{xyz} = e^u$, med $u = xyz$, gir $f_1' = e^u u_1' = e^{xyz}yz$. På samme måte er $f_2' = e^u u_2' = e^{xyz}xz$ og $f_3' = e^u u_3' = e^{xyz}xy$.

5. Når r og w er konstanter, er også $(1/r + 1/w)$ konstant, slik at $\partial\pi/\partial p = \frac{1}{2}p(1/r + 1/w)$.

10. Fra $f = x^{y^z}$ får vi $(*)$ $\ln f = y^z \ln x$. Derivasjon av $(*)$ mhp. x gir $f_x'/f = y^z/x$, slik at $f_x' = fy^z/x = x^{y^z}y^z/x = y^z x^{y^z - 1}$. Derivasjon av $(*)$ mhp. y gir $f_y'/f = zy^{z-1}\ln x$, slik at $f_y' = zy^{z-1}(\ln x)x^{y^z}$. Derivasjon av $(*)$ mhp. z gir $f_z'/f = y^z(\ln y)(\ln x)$, slik at $f_z' = y^z(\ln x)(\ln y)x^{y^z}$.

11.7

2. (a) $Y'_K = aAK^{a-1}$ og $Y'_K = aBL^{a-1}$, slik at $KY'_K + LY'_L = aAK^a + aBL^a = a(AK^a + BL^a) = aY$
(b) $KY'_K + LY'_L = KaAK^{a-1}L^b + LAK^a bL^{b-1} = aAK^a L^b + bAK^a L^a = (a+b)AK^a L^b = (a+b)Y$
(c) $Y'_K = \dfrac{2aKL^5 - bK^4L^2}{(aL^3 + bK^3)^2}$ og $Y'_L = \dfrac{2bK^5L - aK^2L^4}{(aL^3 + bK^3)^2}$, slik at

$$KY'_K + LY'_L = \frac{2aK^2L^5 - bK^5L^2 + 2bK^5L^2 - aK^2L^5}{(aL^3 + bK^3)^2} = \frac{K^2L^2(aL^3 + bK^3)}{(aL^3 + bK^3)^2} = \frac{K^2L^2}{aL^3 + bK^3} = Y$$

(Ifølge avsnitt 12.6 er disse funksjonene er homogene av grad hhv. a, $a + b$ og 1, slik at resultatene er umiddelbare konsekvenser av Eulers setning (12.6.2).)

7. $Y'_K = (-m/\rho)a(-\rho)K^{-\rho-1}Ae^{\lambda t}\big[aK^{-\rho} + bL^{-\rho}\big]^{-(m/\rho)-1} = maK^{-\rho-1}Ae^{\lambda t}\big[aK^{-\rho} + bL^{-\rho}\big]^{-(m/\rho)-1}$
$Y'_L = (-m/\rho)b(-\rho)L^{-\rho-1}Ae^{\lambda t}\big[aK^{-\rho} + bL^{-\rho}\big]^{-(m/\rho)-1} = mbL^{-\rho-1}Ae^{\lambda t}\big[aK^{-\rho} + bL^{-\rho}\big]^{-(m/\rho)-1}$
Dermed er $KY'_K + LY'_L = m(aK^{-\rho} + bL^{-\rho})Ae^{\lambda t}\big[aK^{-\rho} + bL^{-\rho}\big]^{-(m/\rho)-1} = mY$. (Denne funksjonen er homogen av grad m, slik at resultatet er en direkte konsekvens av Eulers setning (12.6.2).)

11.8

5. $\dfrac{\partial}{\partial m}\Big(p\dfrac{D}{m}\Big) = p\dfrac{mD'_m - D}{m^2} = \dfrac{pD}{m^2}\Big[\dfrac{mD'_m}{D} - 1\Big] = \dfrac{pD}{m^2}[\mathrm{El}_m\, D - 1] > 0 \iff \mathrm{El}_m\, D > 1$
slik at pD/m vokser med m hvis $\mathrm{El}_m\, D > 1$. (Ved å bruke regnereglene for elastisiteter fra avsnitt 5.12 kan vi regne slik: $\mathrm{El}_m(pD/m) = \mathrm{El}_m\, p + \mathrm{El}_m\, D - \mathrm{El}_m\, m = \mathrm{El}_m\, D - 1$.)

Repetisjonsoppgaver for kapittel 11

11. (b) Vi må finne alle par (x, y) som oppfyller begge likningene (i) $4x^3 - 8xy = 0$ og (ii) $4y - 4x^2 + 4 = 0$. Fra (i) får vi $4x(x^2 - 2y) = 0$, og dermed er $x = 0$ eller $x^2 = 2y$. For $x = 0$ gir (ii) $y = -1$, slik at $(x, y) = (0, -1)$ er en løsning. Hvis $x^2 = 2y$, reduserer (ii) seg til $4y - 8y + 4 = 0$, dvs, $y = 1$. Men da er $x^2 = 2$, slik at $x = \pm\sqrt{2}$. Dermed får vi også løsningene $(x, y) = (\pm\sqrt{2}, 1)$.

12 Hjelpemidler for komparativ statikk

12.1

5. Vi ser på (c) og (d). (c): Hvis $z = F(x, y) = xy$ med $x = f(t)$ og $y = g(t)$, da er $F'_1(x, y) = y$, $F'_2(x, y) = x$, $dx/dt = f'(t)$ og $dy/dt = g'(t)$, slik at formel (12.1.1) gir
$dz/dt = F'_1(x, y)(dx/dt) + F'_2(x, y)(dy/dt) = yf'(t) + xg'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$, som er den velkjente formelen for den deriverte av et produkt.
(d): Hvis $z = F(x, y) = x/y$ med $x = f(t)$ og $y = g(t)$, da er $F'_1(x, y) = 1/y$, $F'_2(x, y) = -x/y^2$, $dx/dt = f'(t)$ og $dy/dt = g'(t)$, slik at formel (12.1.1) gir $dz/dt = F'_1(x, y)(dx/dt) + F'_2(x, y)(dy/dt) = (1/y)f'(t) - (x/y^2)g'(t) = (yf'(t) - xg'(t))/y^2 = (f'(t)g(t) - f(t)g'(t))/(g(t))^2$, som er formelen for den deriverte av en kvotient.

7. La $U(x) = u(x, h(x)) = \ln[x^\alpha + (ax^4 + b)^{\alpha/3}] - \frac{\alpha}{3}\ln(ax^4 + b)$.
Da er $U'(x) = \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}(3b - ax^4)}{3[x^\alpha + (ax^4 + b)^{\alpha/3}](ax^4 + b)}$, slik at $U'(x^*) = 0$ i $x^* = \sqrt[4]{3b/a}$, mens $U'(x) > 0$ for $x < x^*$ og $U'(x) < 0$ for $x > x^*$. Altså vil $x = x^*$ maksimere $U(x)$.

8. Derivasjon av (12.1.1) mhp. t gir, $d^2z/dt^2 = (d/dt)[F_1'(x, y)\,dx/dt] + (d/dt)[F_2'(x, y)\,dy/dt]$. Her er $(d/dt)[F_1'(x, y)\,dx/dt] = [F_{11}''(x, y)\,dx/dt + F_{12}''(x, y)\,dy/dt]dx/dt + F_1'(x, y)\,d^2x/dt^2$, og $(d/dt)[F_2'(x, y)\,dy/dt] = [F_{21}''(x, y)\,dx/dt + F_{22}''(x, y)\,dy/dt]\,dy/dt + F_2'(x, y)\,d^2y/dt^2$. Idet vi antar at $F_{12}'' = F_{21}''$, følger konklusjonen.

12.2

2. (a) La $z = F(x, y) = xy^2$ med $x = t + s^2$ og $y = t^2s$. Da er $F_1'(x, y) = y^2$, $F_2'(x, y) = 2xy$, $\partial x/\partial t = 1$ og $\partial y/\partial t = 2ts$. Men da gir (12.2.1) at $\partial z/\partial t = F_1'(x, y)(\partial x/\partial t) + F_2'(x, y)(\partial y/\partial t) = y^2 + 2xy2ts = (t^2s)^2 + 2(t + s^2)t^2s2ts = t^3s^2(5t + 4s^2)$. $\partial z/\partial s$ finnes på samme måte.
(b) $\dfrac{\partial z}{\partial t} = F_1'(x, y)\dfrac{\partial x}{\partial t} + F_2'(x, y)\dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{2y}{(x + y)^2}e^{t+s} + \dfrac{-2sx}{(x + y)^2}e^{ts}$, osv.

8. La $u = \ln v$ der $v = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Da er $\partial u/\partial x = (1/v)(\partial v/\partial x) = (3x^2 - 3yz)/v$. På samme måte får vi at $\partial u/\partial y = (3y^2 - 3xz)/v$ og $\partial u/\partial z = (3z^2 - 3xy)/v$. Dermed er

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{v}(3x^3 - 3xyz) + \frac{1}{v}(3y^3 - 3xyz) + \frac{1}{v}(3z^3 - 3xyz) = \frac{1}{v}3v = 3$$

som viser (i). Elementær algebra er nå alt som trengs for å vise (ii).

12.3

2. (a) Se fasiten. (b) Sett $F(x, y) = x - y + 3xy$. Da $F_1' = 1 + 3y$, $F_2' = -1 + 3x$, $F_{11}'' = 0$, $F_{12}'' = 3$ og $F_{22}'' = 0$. Dermed er $y' = -F_1'/F_2' = -(1 + 3y)/(-1 + 3x)$. Ved å bruke likning (12.3.3) får vi

$$y'' = -\frac{1}{(F_2')^3}\left[F_{11}''(F_2')^2 - 2F_{12}''F_1'F_2' + F_{22}''(F_1')^2\right] = \frac{6(1 + 3y)(-1 + 3x)}{(-1 + 3x)^3}) = \frac{6(1 + 3y)}{(-1 + 3x)^2}.$$

(c) Sett $F(x, y) = y^5 - x^6$. Da er $F_1' = -6x^5$, $F_2' = 5y^4$, $F_{11}'' = -30x^4$, $F_{12}'' = 0$ og $F_{22}'' = 20y^3$, slik at $y' = -F_1'/F_2' = -(-6x^5/5y^4) = 6x^5/5y^4$. Ved å bruke likning (12.3.3) får vi,

$$y'' = -\frac{1}{(5y^4)^3}\left[(-30x^4)(5y^4)^2 + 20y^3(-6x^5)^2\right] = \frac{6x^4}{y^4} - \frac{144x^{10}}{25y^9}.$$

(Det er en nyttig algebraisk øvelse å vise at uttrykkene vi fant for y'' in (b) and (c) reduserer seg til dem vi fant i svarene til oppgave 7.1.2.)

3. (a) Med $F(x, y) = 2x^2 + xy + y^2$ er $y' = -F_1'/F_2' = -(4x + y)/(x + 2y) = -4$ i $(2, 0)$. (Dessuten er $y'' = -(28x^2 + 14y^2 + 14xy)/(x + 2y)^3 = -14$ i $(2, 0)$, men denne var det ikke spurt etter i oppgaven.) Tangenten har likning $y - 0 = (-4)(x - 2)$, eller $y = -4x + 8$. (b) $y' = 0$ krever $y = -4x$. Innsetting i den gitte likningen gir $14x^2 = 8$, dvs. $x = \pm 2\sqrt{7}/7$, som gir de to punktene angitt i fasiten.

12.4

3. (a) Likning $(*)$ er her $P/2\sqrt{L^*} = w$. Løs den mhp. L^* og se fasiten. (b) Førsteordensbetingelsen er

$$\pi_L'(L^*) = Pf'(L^*) - C_L'(L^*, w) = 0 \qquad (*)$$

Vi deriverer nå $(*)$ partielt mhp. P, idet vi tar hensyn til at L^* avhenger av P. Vi finner den partielle deriverte av $Pf'(L^*)$ mhp. P ved å bruke produktregelen: $1 \cdot f'(L^*) + Pf''(L^*)(\partial L^*/\partial P)$. Den partielle deriverte av $C_L'(L^*, w)$ mhp. P er $C_{LL}''(L^*, w)(\partial L^*/\partial P)$. Alt i alt får vi $f'(L^*) + Pf''(L^*)(\partial L^*/\partial P) -$

$C''_{LL}(L^*, w)(\partial L^*/\partial P) = 0$, som løses mhp. $\partial L^*/\partial P$.

Derivasjon av $(*)$ mhp. w gir, $Pf''(L^*)(\partial L^*/\partial w) - C''_{LL}(L^*, w)(\partial L^*/\partial w) - C''_{Lw}(L^*, w) = 0$, som løses mhp. $\partial L^*/\partial w$.

6. (a) $F'_1(x, y) = e^{y-3} + y^2$ og $F'_2(x, y) = xe^{y-3} + 2xy - 2$, slik at stigningstallet for tangenten til nivåkurven $F(x, y) = 4$ i punktet $(1, 3)$ er $y' = -F'_1(1, 3)/F'_2(1, 3) = -10/5 = -2$.
(b) Ta den naturlige logaritmen av begge sider: $(1 + c \ln y) \ln y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$. Derivasjon mhp. K gir $\dfrac{c}{y}\dfrac{\partial y}{\partial K} \ln y + (1 + c \ln y)\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial y}{\partial K} = \dfrac{\alpha}{K}$. Løst mhp. $\partial y/\partial K$ gir det svaret i fasiten. $\partial y/\partial L$ finnes på samme måte.

7. (a) $U'_x(x, y)/U'_y(x, y) = f'(x)/g'(y)$, og dermed er $\ln[U'_x(x, y)/U'_y(x, y)] = \ln f'(x) - \ln f'(y)$. Men da er $\partial(\ln(U'_x(x, y)/U'_y(x, y))/\partial y = -f''(y)/f'(y)$. Dette uttrykket inneholder ikke x, så $(**)$ følger.
(b) Med $U(x, y) = Ax^a y^b$, er $U'_x(x, y) = aAx^{a-1}y^b$, $U'_y(x, y) = bAx^a y^{b-1}$, slik at $U'_x(x, y)/U'_y(x, y) = ay/bx$, og dermed $\ln[U'_x(x, y)/U'_y(x, y)] = \ln ay - \ln bx$, og vi ser at $(**)$ er oppfylt. Se så fasiten.

12.5

3. Vi skriver den første likningen som $z = e^{ax}e^{by}$. Ved å elastisitere hver likning mhp. x får vi

$$\begin{aligned} \mathrm{El}_x\, z &= \mathrm{El}_x\, e^{ax} + \mathrm{El}_x\, e^{by} \\ \mathrm{El}_x\, x^a + \mathrm{El}_x\, y^b + \mathrm{El}_x\, z^c &= 0 \end{aligned} \tag{$*$}$$

der vi brukte regel (b) side 171 flere ganger. Vi ser lett at $\mathrm{El}_x\, e^{ax} = ax$, og etter kjerneregelen er, med $u = by$, $\mathrm{El}_x\, e^{by} = \mathrm{El}_u\, e^u\, \mathrm{El}_x\, u = u\, \mathrm{El}_x(by) = by\, \mathrm{El}_x\, y$. (Her er $\mathrm{El}_x(by) = \mathrm{El}_x\, y$, siden multiplikative konstanter forsvinner ved elastisitering, ifølge (5.12.3).) Kjerneregelen gir også $\mathrm{El}_x\, y^b = El_y y^b\, \mathrm{El}_x\, y = b\, \mathrm{El}_x\, y$ og $\mathrm{El}_x\, z^c = c\, \mathrm{El}_x\, z$. Dermed gir $(*)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{El}_x\, z &= ax + by\, \mathrm{El}_x\, y \\ a + b\, \mathrm{El}_x\, y + c\, \mathrm{El}_x\, z &= 0 \end{aligned} \quad \text{eller ordnet} \quad \begin{aligned} by\, \mathrm{El}_x\, y - \mathrm{El}_x\, z &= -ax \\ b\, \mathrm{El}_x\, y + c\, \mathrm{El}_x\, z &= -a \end{aligned} \tag{$*$}$$

Løser vi dette likningssystemet mhp. $\mathrm{El}_x\, y$ og $\mathrm{El}_x\, z$ får vi fasitsvarene.

4. Ved å elastisitere hver likning mhp. x får vi

$$\begin{aligned} x \ln z\, \mathrm{El}_x(x \ln z) - y\, \mathrm{El}_x\, y &= 0 \\ e^x\, \mathrm{El}_x\, e^x + z^a y^b\, \mathrm{El}_x(z^a y^b) &= 0 \end{aligned} \tag{$*$}$$

der vi brukte reglene (e) og (d) på side 171. (Høyresidene i det gitte likningssystemet er konstante, så elastisitetene av dem er lik 0. Siden en brøk bare er 0 når telleren er 0, dropper vi nevnerne i venstresidene i $(*)$.) Nå er $\mathrm{El}_x(x \ln z) = \mathrm{El}_x\, x + \mathrm{El}_x \ln z = 1 + \mathrm{El}_z(\ln z)\, \mathrm{El}_x\, z = 1 + (1/\ln z)\, \mathrm{El}_x\, z$. Videre er $\mathrm{El}_x\, e^x = x$ og $\mathrm{El}_x(z^a y^b) = \mathrm{El}_x\, z^a + \mathrm{El}_x\, y^b = \mathrm{El}_z\, z^a\, \mathrm{El}_x\, z + \mathrm{El}_y\, y^b\, \mathrm{El}_x\, y = a\, \mathrm{El}_x\, z + b\, \mathrm{El}_x\, y$. Dermed gir $(*)$

$$\begin{aligned} x \ln z[1 + (1/\ln z)\, \mathrm{El}_x\, z] - y\, \mathrm{El}_x\, y &= 0 \\ xe^x + z^a y^b(a\, \mathrm{El}_x\, z + b\, \mathrm{El}_x\, y) &= 0 \end{aligned} \tag{$**$}$$

Siden vi bare er bedt om å finne $\mathrm{El}_x\, y$ og $\mathrm{El}_x\, z$ i punktet $(x, y, z) = (1, 1, 2)$, setter vi nå inn disse verdiene i $(**)$, og får, etter ordning av likningene,

$$\begin{aligned} \mathrm{El}_x\, y - \mathrm{El}_x\, z &= \ln 2 \\ b2^a\, \mathrm{El}_x\, y + a2^a\, \mathrm{El}_x\, z &= -e \end{aligned}$$

Herav finner vi lett fasitsvarene. (Det er et viktig poeng, ikke minst i en eksamenssituasjon, at du ikke finner *generelle uttrykk* for $\mathrm{El}_x\, y$ og $\mathrm{El}_x\, z$ ut fra $(**)$, men i stedet finner disse elastisitetene bare i det gitte punktet!)

8. Skriver vi produktfunksjonen på formen $Y = P\dfrac{KL}{Q^{3/2}}$, der $P = A_0 e^{0.021t}$ og $Q = aL^{2/3} + bK^{2/3}$, får vi $Y'_K = P\dfrac{LQ^{3/2} - KL\frac{3}{2}Q^{\frac{1}{2}}b\frac{2}{3}K^{-1/3}}{Q^3} = P\dfrac{LQ - bK^{2/3}L}{Q^{5/2}} = P\dfrac{aL^{5/3}}{Q^{5/2}}$, der vi for å få den andre likheten multipliserte teller og nevner med $Q^{-1/2}$. På samme måte finner vi at $Y'_L = P\dfrac{bK^{5/3}}{Q^{5/2}}$. Dermed er den marginale substitusjonsbrøken $R_{KL} = Y'_L/Y'_K = (b/a)(K/L)^{5/3}$, slik at $K/L = (a/b)^{3/5}(R_{KL})^{3/5}$, og dermed er $\sigma_{KL} = \mathrm{El}_{R_{KL}}(K/L) = 3/5$.

9. Ved å ta ln av hver side får vi $\ln F(K,N) = \ln\gamma_1 + \dfrac{v}{\alpha}[\alpha\ln N + \alpha\ln K - \ln(N^\alpha + \gamma_2 K^\alpha)]$. Derivasjon mhp. K og N gir hhv. $\dfrac{F'_K}{F} = \dfrac{v}{K} - \dfrac{v\gamma_2 K^{\alpha-1}}{N^\alpha + \gamma_2 K^\alpha}$ og $\dfrac{F'_N}{F} = \dfrac{v}{N} - \dfrac{vN^{\alpha-1}}{N^\alpha + \gamma_2 K^\alpha}$. Dermed er

$$R_{KN} = \frac{F'_N}{F'_K} = \frac{\dfrac{v}{N} - \dfrac{vN^{\alpha-1}}{N^\alpha + \gamma_2 K^\alpha}}{\dfrac{v}{K} - \dfrac{v\gamma_2 K^{\alpha-1}}{N^\alpha + \gamma_2 K^\alpha}} = \frac{v\gamma_2 K^{\alpha+1}}{vN^{\alpha+1}} = \gamma_2\left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha+1}$$

der vi multipliserte teller og nevner i den "store" brøken med $KN(N^\alpha + \gamma_2 K^\alpha)$. Dermed er

$$\frac{K}{N} = (\gamma_2)^{-1/(1+\alpha)}(R_{KN})^{1/(1+\alpha)}, \quad \text{slik at} \quad \sigma_{KN} = \mathrm{El}_{R_{KN}}\frac{K}{N} = \frac{1}{1+\alpha}$$

10. Det skulle i oppgaven vært referert til eksempel 4! Med $F(K,L) = AK^a L^b$ er $F'_1 = aF/K$, $F'_2 = bF/L$, $F''_{11} = a(a-1)F/K^2$, $F''_{12} = abF/KL$ og $F''_{22} = b(b-1)F/L^2$. Dermed er $-F'_1F'_2(KF'_1 + LF'_2) = -(aF/K)(bF/L)(a+b)F = -ab(a+b)F^3/KL$, og $KL\big[(F'_2)^2F''_{11} - 2F'_1F'_2F''_{12} + (F'_1)^2F''_{22}\big] = -ab(a+b)F^3/KL$. Det følger at $\sigma_{KL} = 1$.

12.6

8. La C og D betegne hhv. teller og nevner i uttrykket for σ_{yx} i oppgave 12.5.10. Siden F er homogen av grad 1 gir Eulers setning at $C = -F'_1F'_2F$, og (12.6.6) gir at $xF''_{11} = -yF''_{12}$ og $yF''_{22} = -xF''_{21} = -xF''_{12}$. Dermed er $D = xy\big[(F'_2)^2F''_{11} - 2F'_1F'_2F''_{12} + (F'_1)^2F''_{22}\big] = (F'_2)^2y(xF''_{11}) - 2xyF'_1F'_2F''_{12} + (F'_1)^2x(yF''_{22}) = (F'_2)^2y(-y)F''_{12} - 2xyF'_1F'_2F''_{12} + (F'_1)^2x(-xF''_{12}) = -F''_{12}(xF'_1 + yF'_2)^2 = -F''_{12}F^2$, der vi igjen brukte Eulers setning. Dermed er $\sigma_{xy} = C/D = (-F'_1F'_2F)/(-F''_{12}F^2) = F'_1F'_2/FF''_{12}$.

9. Anta F homogen av grad $k \neq 0$. Funksjonen F^{-1} er homogen av grad $1/k$ hvis og bare hvis $F^{-1}(tx) = t^{1/k}F^{-1}(x)$ for $t > 0$. Men denne likningen er ekvivalent med at $F(F^{-1}(tx)) = F(t^{1/k}F^{-1}(x))$. Her er venstresiden lik tx, og bruker vi at F er homogen av grad k, ser vi at høyresiden også er lik $(t^{1/k})^k F(F^{-1}(x)) = tx$. Funksjonen $F(x) = \sqrt{x}$ definert for $x \geq 0$ med verdimengde $[0,\infty)$ har en invers $F^{-1} = x^2$, definert for $x \geq 0$. F er homogen av grad $1/2$, mens F^{-1} er homogen av grad 2.

12.7

1. (a) og (f) er enkle. I (b) kan du bruke Eulers setning som vi gjør det i (e).

(c) $h(tx,ty,tz) = \dfrac{\sqrt{tx} + \sqrt{ty} + \sqrt{tz}}{tx + ty + tz} = \dfrac{\sqrt{t}\,(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})}{t(x+y+z)} = t^{-1/2}h(x,y,z)$ for alle $t > 0$, slik at

h er homogen av grad $-1/2$. (d) $G(tx, ty) = \sqrt{txty}\,\ln\dfrac{(tx)^2+(ty)^2}{txty} = t\sqrt{xy}\,\ln\dfrac{t^2(x^2+y^2)}{t^2xy} = tG(x, y)$ for alle $t > 0$, slik at G er homogen av grad 1. (e) $xH'_x + yH'_y = x(1/x) + y(1/y) = 2$. Siden 2 er ikke lik $k(\ln x + \ln y)$ for noen konstant k, viser Eulers setning at H ikke er homogen av noen grad.

6. La $\Delta = \ln C(t\mathbf{w}, y) - \ln C(\mathbf{w}, y)$. Det er nok å vise at $\Delta = \ln t$, for da er $C(t\mathbf{w}, y)/C(\mathbf{w}, y) = e^{\Delta} = t$. Vi finner at

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_i[\ln(tw_i) - \ln w_i] + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}[\ln(tw_i)\ln(tw_j) - \ln w_i \ln w_j] + \ln y \sum_{i=1}^{n} b_i[\ln(tw_i) - \ln w_i]$$

Siden $\ln(tw_i) - \ln w_i = \ln t + \ln w_i - \ln w_i = \ln t$ og $\ln(tw_i)\ln(tw_j) - \ln w_i \ln w_j = (\ln t)^2 + \ln t \ln w_i + \ln t \ln w_j$, reduserer dette seg til

$$\Delta = \ln t\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{2}(\ln t)^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} + \frac{1}{2}(\ln t)\sum_{j=1}^{n}\Big(\ln w_i \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Big) + \frac{1}{2}(\ln t)\sum_{i=1}^{n}\Big(\ln w_j \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big) + \ln y \ln t \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Dermed får vi $\Delta = \ln t + 0 + 0 + 0 + 0 = \ln t$, pga. restriksjonene på parameterne a_i, a_{ij} og b_i.

12.8

1. I både (a) og (b) bruker vi approksimasjonen $f(x, y) \approx f(0, 0) + f'_1(0, 0)x + f'_2(0, 0)y$.
(a) For $f(x, y) = \sqrt{1 + x + y}$, er $f(0, 0) = 1$ og $f'_1(x, y) = f'_2(x, y) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x+y}}$, slik at $f'_1(0, 0) = f'_2(0, 0) = 1/2$, og den lineære approksimasjonen til $f(x, y)$ omkring $(0, 0)$ er $f(x, y) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$.
(b) For $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$ er $f'_1(x, y) = e^x \ln(1 + y)$ og $f'_2(x, y) = \dfrac{e^x}{1+y}$. Her er $f(0, 0) = 0$, $f'_1(0, 0) = e^0 \ln 1 = 0$ og $f'_2(0, 0) = 1$. Dette gir $f(x, y) = e^x \ln(1 + y) \approx 0 + 0 \cdot x + 1 \cdot y = y$.

6. Skriv funksjonen på formen $g^*(\mu, \varepsilon) = (1 + \mu)^a(1 + \varepsilon)^{\alpha a} - 1$, der $a = 1/(1 + \beta)$. Da er

$$\partial g^*(\mu, \varepsilon)/\partial\mu = a(1 + \mu)^{a-1}(1 + \varepsilon)^{\alpha a}, \qquad \partial g^*(\mu, \varepsilon)/\partial\varepsilon = (1 + \mu)^a \alpha a(1 + \varepsilon)^{\alpha a-1}$$

Dermed er $g^*(0, 0) = 0$, $\partial g^*(0, 0)/\partial\mu = a$ og $\partial g^*(0, 0)/\partial\varepsilon = \alpha a$, og $g^*(\mu, \varepsilon) \approx a\mu + \alpha a\varepsilon$, som i fasiten.

7. Vi bruker formel (12.8.4). (a) Her er $\partial z/\partial x = 2x$ og $\partial z/\partial y = 2y$. I $(1, 2, 5)$ er $\partial z/\partial y = 2$ og $\partial z/\partial x = 4$, slik at tangentplanet har likningen $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2) \Leftrightarrow z = 2x + 4y - 5$.
(b) Fra $z = (y - x^2)(y - 2x^2) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$ får vi $\partial z/\partial x = -6xy + 8x^3$ og $\partial z/\partial y = 2y - 3x^2$. I $(1, 3, 2)$ er $\partial z/\partial x = -10$ og $\partial z/\partial y = 3$. Tangentplanet har derfor likningen
$z - 2 = -10(x - 1) + 3(y - 3) \Leftrightarrow z = -10x + 3y + 3$.

12.9

4. $T(x, y, z) = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} = u^{1/2}$, der $u = x^2 + y^2 + z^2$. Da er
$dT = \frac{1}{2}u^{-1/2}\,du = u^{-1/2}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$. For $x = 2$, $y = 3$ og $z = 6$ er $u = 49$, $T = 7$ og $dT = \frac{1}{7}(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = \frac{1}{7}(2\,dx + 3\,dy + 6\,dz)$. Dermed er $T(2 + 0.01, 3 - 0.01, 6 + 0.02) \approx T(2, 3, 6) + \frac{1}{7}[2 \cdot 0.01 + 3(-0.01) + 6 \cdot 0.02] = 7 + \frac{1}{7} \cdot 0.11 \approx 7.015714$. (En kalkulator gir en bedre approksimasjon: $\sqrt{49.2206} \approx 7.015739$.)

12.10

1. Vi bruker formel (12.10.1). (a) Med $f(x,y) = e^{x+y}(xy-1)$, er $f_1'(x,y) = e^{x+y}(xy-1) + e^{x+y}y = e^{x+y}(xy+y-1)$, $f_2'(x,y) = e^{x+y}(xy+x-1)$, $f_{11}'(x,y) = e^{x+y}(xy+2y-1)$, $f_{12}'(x,y) = e^{x+y}(xy+x)$ og $f_{22}'(x,y) = e^{x+y}(xy+2x-1)$. Det følger at $f(0,0) = f_1'(0,0) = f_2'(0,0) = f_{11}'(0,0) = f_{22}'(0,0) = -1$ og $f_{12}'(0,0) = 0$. Dermed er $f(x,y) \approx -1 - x - y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$
(b) Med $f(x,y) = e^{xe^y}$ er $f_1'(x,y) = e^{xe^y}e^y$, $f_2'(x,y) = e^{xe^y}xe^y$, $f_{11}'(x,y) = e^{xe^y}e^ye^y$, $f_{12}'(x,y) = e^{xe^y}xe^ye^y + e^{xe^y}e^y$ og $f_{22}'(x,y) = e^{xe^y}xe^yxe^y + e^{xe^y}xe^y$. Det følger at $f(0,0) = f_1'(0,0) = f_{11}'(0,0) = f_{12}'(0,0) = 1$, mens $f_2'(0,0) = f_{22}'(0,0) = 0$. Dermed er $f(x,y) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + xy$.
(c) Med $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$, er $f_1'(x,y) = 2x/(1 + x^2 + y^2)$, $f_2'(x,y) = 2y/(1 + x^2 + y^2)$, $f_{11}'(x,y) = (2 - 2x^2 + 2y^2)/(1 + x^2 + y^2)^2$, $f_{12}'(x,y) = -4xy/(1 + x^2 + y^2)^2$ og $f_{22}'(x,y) = (2 + 2x^2 - 2y^2)/(1 + x^2 + y^2)^2$. Det følger at $f(0,0) = f_1'(0,0) = f_{11}'(0,0) = f_{12}'(0,0) = 0$, mens $f_{11}'(0,0) = f_{22}'(0,0) = 2$. Dermed er $f(x,y) \approx x^2 + y^2$.

4. Partiell derivasjon av likningen $\ln z = x^3y - xz + y$ mhp. hhv. x og y gir, idet z er en funksjon av x og y,

$$z_x'/z = 3x^2y - z - xz_x' \quad \Longrightarrow \quad (1 + xz)z_x' = 3x^2yz - z^2 \tag{1}$$

$$z_y'/z = x^3 - xz_y' + 1 \quad \Longrightarrow \quad (1 + xz)z_y' = x^3z + z \tag{2}$$

Ved å derivere mhp. x og y i (1) får vi

$$(z + xz_x')z_x' + (1 + xz)z_{xx}'' = 6xyz + 3x^2yz_x' - 2zz_x' \tag{3}$$

$$xz_y'z_x' + (1 + xz)z_{xy}'' = 3x^2z + 3x^2yz_y' - 2zz_y' \tag{4}$$

og derivasjon av (2) mhp. y gir

$$xz_y'z_y' + (1 + xz)z_{yy}'' = x^3z_y' + z_y' \tag{5}$$

Vi substituerer nå $x = y = 0$ og $z = 1$ ($x = y = 0$ innsatt i den gitte likningen gir $z = 1$) i likningene vi har funnet. Likningene (1) og (2) gir $z_x' = -1$ og $z_y' = 1$, og da gir (3)–(5) at $z_{xx}'' = 3$, $z_{xy}'' = -2$ og $z_{yy}'' = 1$. Den kvadratiske approksimasjonen til z rundt $(0,0)$ er derfor

$$z \approx 1 - x + y + \tfrac{3}{2}x^2 - 2xy + \tfrac{1}{2}y^2$$

12.12

3. Vi blir bare bedt om å finne de partielle deriverte av y_1 og y_2 mhp. x_1. Partiell derivasjon mhp. x_1 gir:

(i) $3 - \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} - 9y_2^2\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0$ (ii) $3x_1^2 + 6y_1^2\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0$

Herav finner vi lett de partielle deriverte. Se fasiten.
(Dersom vi ønsker å finne alle de partielle deriverte, er det bedre å differensiere systemet:

(i) $3\,dx_1 + 2x_2\,dx_2 - dy_1 - 9y_2^2\,dy_2 = 0$, (ii) $3x_1^2\,dx_1 - 2\,dx_2 + 6y_1^2\,dy_1 - dy_2 = 0$

Vi løser nå dette systemet mhp. dy_1 og dy_2 uttrykt ved dx_1 og dx_2. Fra resultatet leser vi av $\partial y_1/\partial x_1$ og $\partial y_2/\partial x_1$ som forklart i merknad 12.9.1.)

4. Derivasjon mhp. på M gir (i) $I'(r)r'_M = S'(Y)Y'_M$, (ii) $aY'_M + L'(r)r'_M = 1$. (Husk at Y og r er funksjoner av a og M.) Skrevet på standardform, får vi

$$\begin{aligned} S'(Y)Y'_M - I'(r)r'_M &= 0 \\ aY'_M + L'(r)r'_M &= 1 \end{aligned}$$

Cramers regel (eller vanlig eliminasjon) gir

$$Y'_M = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -I'(r) \\ 1 & L'(r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S'(Y) & -I'(r) \\ a & L'(r) \end{vmatrix}} = \frac{I'(r)}{S'(Y)L'(r) + aI'(r)} \qquad \text{og} \qquad r'_M = \frac{S'(Y)}{S'(Y)L'(r) + aI'(r)}$$

5. Derivasjon mhp. x gir $y + u'_x v + uv'_x = 0$, $u + xu'_x + yv'_x = 0$. Ved å løse dette systemet mhp. u'_x og v'_x, får vi

$$u'_x = \frac{u^2 - y^2}{yv - xu} = \frac{u^2 - y^2}{2yv}, \quad v'_x = \frac{xy - uv}{yv - xu} = \frac{2xy - 1}{2yv}$$

der vi substituerte $xu = -yv$ og $uv = 1 - xy$. Derivasjon av u'_x mhp. x gir endelig

$$u''_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} u'_x = \frac{2uu'_x 2yv - (u^2 - y^2)2yv'_x}{4y^2v^2} = \frac{(u^2 - y^2)(4uv - 1)}{4y^2v^3}$$

9. (b) Utregnet i punktet P blir systemet i (a) til $3\,du + 4\,dv = 6\,dy$ og $dv = 2\,dx - dy$. Løst vi mhp. du og dv gir dette svaret i (b) i fasiten. (c) Se fasiten.

12. Derivasjon av likningssystemet mhp. p_1 gir

$$\begin{aligned} U''_{11}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + U''_{12}\frac{\partial x_2}{\partial p_1} &= \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} p_1 + \lambda \\ U''_{21}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + U''_{22}\frac{\partial x_2}{\partial p_1} &= \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} p_2 \\ x_1 + p_1\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial p_1} &= 0 \end{aligned}$$

Dette er et lineært likningssystem med $\partial x_1/\partial p_1$, $\partial x_2/\partial p_1$ og $\partial \lambda/\partial p_1$ som ukjente. Vi skriver det på formen

$$\begin{aligned} U''_{11}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + U''_{12}\frac{\partial x_2}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} &= \lambda \\ U''_{21}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + U''_{22}\frac{\partial x_2}{\partial p_1} - p_2\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} &= 0 \\ p_1\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial p_1} \qquad\qquad &= -x_1 \end{aligned} \tag{$*$}$$

Vi kan løse systemet ved å bruke Cramers regel, eller på denne måten: Multipliser den første likningen med p_2 og den andre med $-p_1$ og legg sammen. Det gir

$$(p_2U''_{11} - p_1U''_{21})\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + (p_2U''_{12} - p_1U''_{22})\frac{\partial x_2}{\partial p_1} = p_2\lambda$$

Sammen med den siste likningen i $(*)$ gir dette to likninger til bestemmelse av $\partial x_1/\partial p_1$ og $\partial x_2/\partial p_1$. Løser vi disse får vi fasitsvaret.

Repetisjonsoppgaver for kapittel 12

4. Sett $X = Ng(u)$ der $u = \varphi(N)/N$. Da er $du/dN = [\varphi'(N)N - \varphi(N)]/N^2 = (1/N)(\varphi'(N) - u)$, og produktregelen og kjerneregelen gir

$$\frac{dX}{dN} = g(u) + Ng'(u)\frac{du}{dN} = g(u) + g'(u)(\varphi'(N) - u), \quad u = \frac{\varphi(N)}{N}$$

Derivasjon av $g(u) + g'(u)(\varphi'(N) - u)$ mhp. N gir

$$\begin{aligned}\frac{d^2X}{dN^2} &= g'(u)\frac{du}{dN} + g''(u)\frac{du}{dN}(\varphi'(N) - u) + g'(u)(\varphi''(N) - \frac{du}{dN}) \\ &= \frac{1}{N}g''\big(\varphi(N)/N\big)\big[\varphi'(N) - \varphi(N)/N\big]^2 + g'\big(\varphi(N)/N\big)\varphi''(N)\end{aligned}$$

11. $\mathrm{El}_x(y^2e^xe^{1/y}) = \mathrm{El}_x\, y^2 + \mathrm{El}_x\, e^x + \mathrm{El}_x\, e^{1/y} = 0$. Her $\mathrm{El}_x\, y^2 = 2\,\mathrm{El}_x\, y$ og $\mathrm{El}_x\, e^x = x$. Dessuten er $\mathrm{El}_x\, e^{1/y} = \mathrm{El}_x\, e^u$, der $u = y^{-1}$, slik at $\mathrm{El}_x\, e^u = u\,\mathrm{El}_x\, y^{-1} = -(1/y)\,\mathrm{El}_x\, y$. Alt i alt får vi at $2\,\mathrm{El}_x\, y + x - (1/y)\,\mathrm{El}_x\, y = 0$, slik at $\mathrm{El}_x\, y = xy/(1-2y)$. (Vi brukte regnereglene for elastisiteter på side 171. Hvis du ikke er fortrolig med disse reglene, kan du finne y' ved implisitt derivasjon og så bruke at $\mathrm{El}_x\, y = (x/y)y'$.)

15. (a) $f_1'(x, y) = ye^{xy}$, $f_2'(x, y) = xe^{xy}$, $f_{11}''(x, y) = y^2e^{xy}$, $f_{12}''(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}$ og $f_{22}''(x, y) = x^2e^{x,y}$. Med unntak av f_{12}'' er alle disse deriverte lik 0 i origo, slik at vi får den kvadratiske approksimasjonen $f(x, y) \approx f(0, 0) + f_{12}''(0, 0)xy = 1 + xy$.

(b) $f_1'(x, y) = 2xe^{x^2-y^2}$, $f_2'(x, y) = -2ye^{x^2-y^2}$, $f_{11}''(x, y) = (2+4x^2)e^{x^2-y^2}$, $f_{12}''(x, y) = -4xye^{x^2-y^2}$ og $f_{22}''(x, y) = (-2 + 4y^2)e^{x^2-y^2}$. Dermed er $f_1'(0, 0) = f_2'(0, 0) = 0$, $f_{11}''(0, 0) = 2$, $f_{12}''(0, 0) = 0$, $f_{22}''(0, 0) = -2$, slik at $f(x, y) \approx f(0, 0) + \frac{1}{2}f_{11}''(0, 0)x^2 + \frac{1}{2}f_{22}''(0, 0)y^2 = 1 + x^2 - y^2$.

(c) $f_1'(x, y) = \dfrac{1}{1 + x + 2y}$, $f_2'(x, y) = \dfrac{2}{1 + x + 2y}$, $f_{11}''(x, y) = -\dfrac{1}{(1 + x + 2y)^2}$, $f_{12}''(x, y) = -\dfrac{2}{(1 + x + 2y)^2}$ og $f_{22}''(x, y) = -\dfrac{4}{(1 + x + 2y)^2}$. I $(0, 0)$ får vi $f(0, 0) = 0$, $f_1'(0, 0) = 1$, $f_2'(0, 0) = 2$, $f_{11}''(0, 0) = -1$, $f_{12}''(0, 0) = -2$ og $f_{22}''(0, 0) = -4$, slik at

$$\begin{aligned}f(x, y) &\approx f(0, 0) + f_1'(0, 0)x + f_2'(0, 0)y + \tfrac{1}{2}f_{11}''(0, 0)x^2 + f_{12}''(0, 0)xy + \tfrac{1}{2}f_{22}''(0, 0)y^2 \\ &= x + 2y - \tfrac{1}{2}x^2 - 2xy - 2y^2\end{aligned}$$

16. (a) Derivasjon og samling av alle leddene med dp og dL på venstresiden, gir

$$\text{(i) } F'(L)\,dp + pF''(L)\,dL = dw \qquad \text{(ii) } F(L)\,dp + (pF'(L) - w)\,dL = L\,dw + dB$$

Siden $pF'(L) = w$, gir (ii) at $dp = (L\,dw + dB)/F(L)$. Substituerer vi dette i (i) og løser mhp. dL, får vi $dL = [(F(L) - LF'(L))\,dw - F'(L)\,dB]/pF(L)F''(L)$. Det følger at

$$\frac{\partial p}{\partial w} = \frac{L}{F(L)}, \quad \frac{\partial p}{\partial B} = \frac{1}{F(L)}, \quad \frac{\partial L}{\partial w} = \frac{F(L) - LF'(L)}{pF(L)F''(L)}, \quad \frac{\partial L}{\partial B} = -\frac{F'(L)}{pF(L)F''(L)}$$

(b) Vi vet at $p > 0$, $F'(L) > 0$ og $F''(L) < 0$. Dermed er $F(L) = (wL + B)/p > 0$. Dessuten ser vi at $\partial p/\partial w > 0$, $\partial p/\partial B > 0$ og $\partial L/\partial B > 0$.

For å finne fortegnet til $\partial L/\partial w$, trenger vi fortegn til $F(L) - LF'(L)$. Fra likningene i modellen får vi $F'(L) = w/p$ og $F(L) = (wL + B)/p$, slik at $F(L) - LF'(L) = B/p > 0$. Derfor er $\partial L/\partial w < 0$.

13 Optimeringsproblemer med flere variabler

13.2

3. Vi får at $U = (108 - 3y - 4z)yz$. Førsteordensbetingelsene gir da at $\partial U/\partial y = 108z - 6yz - 4z^2 = 0$ og $\partial U/\partial z = 108y - 3y^2 - 8yz = 0$. Siden y og z er positive, reduserer disse likningene seg til $6y + 4z = 108$ og $3y + 8z = 108$, med løsning $y = 12$ og $z = 9$. (Setning 13.2.1 kan ikke brukes direkte for å vise optimalitet. Men den kan brukes på det ekvivalente problemet å maksimere $\ln U$. Se Setning 13.6.3.)

7. Løs bibetingelsen mhp. z: $z = 4x + 2y - 5$. Problemet er da å minimere $P(x, y) = x^2 + y^2 + (4x + 2y - 5)^2$ mhp. x og y. Førsteordensbetingelsene gir $P_1' = 34x + 16y - 40 = 0$ og $P_2' = 16x + 10y - 20 = 0$, med løsning $x = 20/21$, $y = 10/21$. Siden $P_{11}'' = 34$, $P_{12}'' = 16$ og $P_{22}'' = 10$, ser vi at annenordensbetingelsene for minimum er oppfylt.

13.3

3. (a) Førsteordensbetingelsene: $V_t'(t, x) = f_t'(t, x)e^{-rt} - rf(t, x)e^{-rt} = 0$, $V_x'(t, x) = f_x'(t, x)e^{-rt} - 1 = 0$, slik at i optimum er $f_t'(t^*, x^*) = rf(t^*, x^*)$ og $f_x'(t^*, x^*) = e^{rt^*}$.
(b) og (c): Hvis $V(t, x) = g(t)h(x)e^{-rt} - x$, er $V_t' = h(x)(g'(t) - rg(t))e^{-rt}$ og $V_x' = g(t)h'(x)e^{-rt} - 1$. Dessuten er $V_{tt}'' = h(x)(g''(t) - 2rg'(t) + r^2 g(t))e^{-rt}$, $V_{tx}'' = h'(x)(g'(t) - rg(t))e^{-rt}$ og $V_{xx}'' = g(t)h''(x)e^{-rt}$. I (t^*, x^*) er $V_{tx}'' = 0$, $V_{xx}'' < 0$ og $V_{tt}'' = h(x^*)[g''(t^*) - 2rg'(t^*) + r^2 g(t^*)]e^{-rt^*}$. Siden $g'(t^*) = rg(t^*)$, får vi at $V_{tt}'' = h(x^*)[g''(t^*) - r^2 g(t^*)]e^{-rt^*} < 0$. Derfor er (t^*, x^*) et lokalt maksimumspunkt. (d) Førsteordensbetingelsene i (b) gir nå $e^{\sqrt{t^*}}/2\sqrt{t^*} = re^{\sqrt{t^*}}$, slik at $t^* = 1/4r^2$ og $1/(x^* + 1) = e^{1/4r}/e^{1/2r}$, og dermed $x^* = e^{1/4r} - 1$. De to betingelsene i (c) er oppfylt: Vi har $h''(x^*) = -(1 + x^*)^{-2} < 0$ og $g''(t^*) = \dfrac{1}{4t^*\sqrt{t^*}}e^{\sqrt{t^*}}(\sqrt{t^*} - 1) = r^2(1 - 2r)e^{1/2r} < r^2 e^{1/2r}$ når $r > 0$.

5. (a) Vi må kreve at $1 + x^2 y > 0$. Når $x = 0$ er $f(0, y) = 0$. Når $x \neq 0$ er $1 + x^2 y > 0 \Leftrightarrow y > -1/x^2$. (Figuren i fasiten viser en del av grafen til f. Merk at $f = 0$ på x-aksen og på y-aksen.) (b) Se fasiten.
(c) $A = f_{11}''(x, y) = \dfrac{2y - 2x^2 y^2}{(1 + x^2 y)^2}$, $B = f_{12}''(x, y) = \dfrac{2x}{(1 + x^2 y)^2}$ og $C = f_{22}''(x, y) = \dfrac{-x^4}{(1 + x^2 y)^2}$.
I punktet $(0, b)$ er $A = 2b$, $B = 0$, og $C = 0$. Siden $AC - B^2 = 0$ i disse stasjonære punktene, gir annenderiverttesten ingen opplysninger om dem. Ved å studere funksjonen direkte ser vi at $(0, b)$ er et lokalt maksimumspunkt hvis $b < 0$; er et lokalt minimumspunkt hvis $b > 0$; et sadelpunkt hvis $b = 0$.

13.4

2. (a) $\pi(p, q) = pQ_A + qQ_B - C(Q_A, Q_B)$. Se fasiten. (b) Ny profittfunksjon er $\hat{\pi} = -(b + d)p^2 + (a + \beta b)p + (c + \beta d)p - \alpha - \beta(a + c)$ som maksimeres for $\hat{p} = \dfrac{a + c + \beta(b + d)}{2(b + d)}$.
(c) Hvis $\beta = 0$, da er $p^* = \dfrac{a}{2b}$ og $q^* = \dfrac{c}{2d}$, med $\pi(p^*, q^*) = \dfrac{a^2}{4b} + \dfrac{c^2}{4d} - \alpha$. For $\hat{p} = \dfrac{a + c}{2(b + d)}$ er

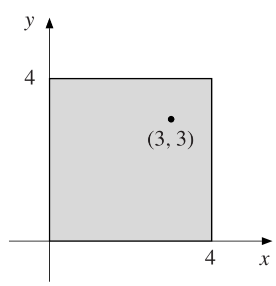
$\hat{\pi}(\hat{p}) = \dfrac{(a+c)^2}{4(b+d)} - \alpha$ og da blir $\pi(p^*, q^*) - \hat{\pi}(\hat{p}) = \dfrac{(ad-bc)^2}{4bd(b+d)} \geq 0$. Merk at differensen er 0 når $ad = bc$. Da er $p^* = q^*$, og bedriften ønsker selv å tilby samme pris i begge markedene.

4. (a) La $(x_0, y_0) = (0, 11.29)$, $(x_1, y_1) = (1, 11.40)$, $(x_2, y_2) = (2, 11.49)$ og $(x_3, y_3) = (3, 11.61)$, slik at x_0 svarer til til 1970, osv. (Tallene y_t er approksimasjoner, som de fleste resultatene i denne oppgaven.) Vi finner at $\mu_x = \frac{1}{4}(0+1+2+3) = 1.5$, $\mu_y = \frac{1}{4}(11.29 + 11.40 + 11.49 + 11.61) = 11.45$, og $\sigma_{xx} = \frac{1}{4}[(0-1.5)^2 + (1-1.5)^2 + (2-1.5)^2 + (3-1.5)^2] = 1.25$. Videre er $\sigma_{xy} = 0.13125$, slik at $\hat{a} = \sigma_{xy}/\sigma_{xx} = 0.105$ og $\hat{b} = \mu_y - \hat{a}\mu_x \approx 11.45 - 0.105 \cdot 1.5 = 11.29$.

(b) Med $z_0 = \ln 274$, $z_1 = \ln 307$, $z_2 = \ln 436$ og $z_3 = \ln 524$ blir $(x_0, z_0) = (0, 5.61)$, $(x_1, z_1) = (1, 5.73)$, $(x_2, z_2) = (2, 6.08)$ og $(x_3, z_3) = (3, 6.26)$. Som før er $\mu_x = 1.5$ og $\sigma_{xx} = 1.25$. Dessuten er $\mu_z = \frac{1}{4}(5.61 + 5.73 + 6.08 + 6.26) = 5.92$ og $\sigma_{xz} \approx 0.2875$. Dermed er $\hat{c} = \sigma_{xz}/\sigma_{xx} = 0.23$, $\hat{d} = \mu_z - \hat{c}\mu_x = 5.92 - 0.23 \cdot 1.5 = 5.575$.

(c) Med ln (GNP) = $0.105x + 11.25$ er GNP = $e^{11.25}e^{0.105x} = 80017e^{0.105x}$. Videre er FA = $256e^{0.23x}$. Kravet om at FA = 0.01 GNP, gir $e^{0.23x - 0.105x} = 80017/25600$, og dermed $0.125x = \ln(80017/25600)$, slik at $x = \ln(80017/25600)/0.125 = 9.12$. Siden $x = 0$ svarer til 1970, ville målet oppnås i 1979.

5. (a) Samlet nettoinntekt: $N = p(29-5p+4q) + q(16+4p-6q) - 5 - (29-5p+4q) - 3 - 2(16+4p-6q) = -5p^2 - 6q^2 + 8pq + 26p + 24q - 69$. Da er $N'_p = -10p + 8q + 26$ og $N'_q = -12q + 8p + 24$. Det eneste stasjonærpunktet er $(p, q) = (9, 8)$. Ved hjelp av setning 13.2.1 ser vi at det er et maksimumspunkt. (b) Bedrift A's profitt er nå $\pi_A(p) = px - 5 - x = p(29 - 5p + 4q) - 5 - 29 + 5p - 4q = -5p^2 + 34p + 4pq - 4q - 34$, med q fast. Dette kvadratiske polynomet har maksimum i $p = p_A(q) = \frac{1}{5}(2q + 17)$. Bedrift B's profitt er $\pi_B(q) = qy - 3 - 2y = -6q^2 + 28q + 4pq - 8p - 35$, med p fast. Dette kvadratiske polynomet har maksimum i $q = q_B(p) = \frac{1}{3}(p + 7)$. Se fasiten for (c) og (d).



Figur M13.5.2(a)

13.5

2. I alle disse problemene har vi en kontinuerlig funksjon f definert på en lukket, begrenset mengde S, slik at ekstremverdisetningen sikrer at f oppnår både maksimum og minimum over S.
(a) Mengden S er i dette tilfellet vist på figur M13.5.2(a). Stasjonære punkter er der (i) $f'_1 = 3x^2 - 9y = 0$ og (ii) $f'_2 = 3y^2 - 9x = 0$. Fra (i) får vi $y = \frac{1}{3}x^2$, som innsatt i (ii) gir $\frac{1}{3}x(x^3 - 27) = 0$, som har løsningene $x = 0$ og $x = 3$. Det eneste stasjonære punktet i det indre av S er derfor $(x, y) = (3, 3)$. Vi fortsetter ved å undersøke oppførselen til $f(x, y)$ langs randen av S, dvs. langs de fire sidene av S.
(I) $y = 0$, $x \in [0, 4]$. Da er $f(x, 0) = x^3 + 27$, som har minimum i $x = 0$, og maksimum i $x = 4$.
(II) $x = 4$, $y \in [0, 4]$. Da er $f(4, y) = y^3 - 36y + 91$. Definer funksjonen $g(y) = y^3 - 36y + 91$, $y \in [0, 4]$. Da er $g'(y) = 3y^2 - 36 = 0$ i $y = \sqrt{12}$. Mulige ekstrempunkter langs (II) er derfor $(4, 0)$,

$(4, \sqrt{12})$ og $(4, 4)$.
(III) $y = 4$, $x \in [0, 4]$. Da $f(x, 4) = x^3 - 36x + 91$, og som i (II) ser vi at mulige ekstrempunkter er $(0, 4)$, $(\sqrt{12}, 4)$ og $(4, 4)$. (IV) $x = 0$, $y \in [0, 4]$. Som i (I) oppnår f mulige ekstrempunkter i $(0, 0)$ og i $(0, 4)$.

Dette gir 6 kandidater, og $f(3, 3) = 0$, $f(0, 0) = 27$, $f(4, 0) = f(0, 4) = 91$, $f(4, \sqrt{12}) = f(\sqrt{12}, 4) = 91 - 24\sqrt{12} \approx 7.7$ og $f(0, 0) = 27$. Konklusjonen i fasiten følger.
(b) Mengden $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ er alle de punktene som ligger på eller innenfor sirkelen rundt origo med radius 1. Stasjonære punkter for f er der $f'_x(x, y) = 2x - 1 = 0$ og $f'_y(x, y) = 4y = 0$. Det eneste stasjonære punktet for f er dermed $(x_1, y_1) = (1/2, 0)$, som er et indre punkt i S.

Et ekstrempunkt som ikke ligger i det indre av S må ligger på randen av S, som er sirkelen $x^2 + y^2 = 1$. *Langs denne sirkelen* er $y^2 = 1 - x^2$, og dermed

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x = x^2 + 2(1 - x^2) - x = 2 - x - x^2$$

der $x \in [-1, 1]$. (Det er en vanlig feil å se bort fra denne beskrankningen.) Funksjonen $g(x) = 2 - x - x^2$ har et stasjonært punkt i det indre av $[-1, 1]$, nemlig i $x = -1/2$, slik at en ekstrempunktene for $g(x)$ må forekomme for denne verdien av x eller i endepunktene ± 1 av intervallet $[-1, 1]$. Ekstrempunktene for $f(x, y)$ på randen av S må derfor være blant punktene

$$(x_2, y_2) = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}),\ (x_3, y_3) = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}),\ (x_4, y_4) = (1, 0),\ (x_5, y_5) = (-1, 0)$$

Nå er $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$, $f(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{9}{4}$, $f(1, 0) = 0$ og $f(-1, 0) = 2$. Konklusjonen i fasiten følger.
(c) Mengden $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \quad x \geq 0\}$ er alle de punktene med $x \geq 0$ som ligger på eller innenfor sirkelen rundt origo med radius 1. Stasjonære punkter er der (i) $f'_1 = 3x^2 - 2x = 3x(x - 2/3) = 0$ og (ii) $f'_2 = -2y = 0$. Det eneste stasjonære punktet i det indre av S er $(2/3, 0)$.
Langs randen (I) $x = 0$, $y \in [-1, 1]$ er $f(0, y) = 3 - y^2$ størst når $y = 0$, og minst når $y = \pm 1$.
Langs randen (II) $x^2 + y^2 = 1$, $x \in [0, 1]$, er $f(x, y) = 2 + x^3$ og dermed størst når $x = 1$ og minst (som før) når $y = \pm 1$. Konklusjonen i fasiten følger.

(d) Mengden S består av alle punktene som ligger på eller innenfor rektanglet $[0, 2] \times [0, 1/2]$. Etter en del regning finner vi at de stasjonære punkter er gitt ved (i) $f'_1 = 2(x - 3/2)(x - 1)(2y - 1)e^{x^2 - x}e^{(y-2)^2} = 0$ og (ii) $f'_2 = 4(x - 2)(y - 3/2)(y - 1)e^{x^2 - x}e^{(y-2)^2} = 0$. Vi ser at ingen av de stasjonære punktene ligger i det indre av S. Altså må maksimums- og minimumspunktene ligge på en eller flere av de 4 sidekantene av rektanglet.
(I) $x = 0$, $y \in [0, 1/2]$. For $g(y) = f(0, y) = -2(2y - 1)e^{(y-2)^2}$ er $g'(y) \leq 0$ i $[0, 1/2]$ (se på (ii) for $x = 0$), og er derfor størst for $y = 0$, med verdi $2e^4$, minst for $y = 1/2$, med verdi 0.
(II) $y = 1/2$, $x \in [0, 2]$. Her er $f(x, 1/2) \equiv 0$. (III) $x = 2$, $y \in [0, 1/2]$. Her er $f(2, y) \equiv 0$.
(IV) $y = 0$, $x \in [0, 2]$. Her er $h(x) = f(x, 0) = -(x - 2)e^{x^2 - x}e^4$, og (ved å bruke (i) for $y = 0$) er $h'(x) = -2(x - 3/2)(x - 1)e^{x^2 - x}e^4 = 0$ for $x = 1$ og $x = 3/2$. Her er $h(1) = e^4$ og $h(3/2) = (1/2)e^{19/4} \approx 57.8 < 2e^4 \approx 109$. Konklusjonen i fasiten følger.

3. Mengden S er vist på figur f13.5.3 i fasiten. Den er opplagt lukket og begrenset, slik at den kontinuerlige funksjonen f har et maksimum i S. Stasjonære punkter er der hvor $\partial f / \partial x = 9 - 12(x + y) = 0$ og $\partial f / \partial y = 8 - 12(x + y) = 0$. Men $12(x + y) = 9$ og $12(x + y) = 8$ gir en motsigelse. Dermed er det ingen stasjonære punkter, og maksimumsverdien til f må ligge på randen, som består av fem deler. Enten må maksimumsverdien opptre i ett av fem hjørnene ("ekstrempunktene") til randen, eller i et indre

punkt på en av sidekantene. Funksjonsverdiene i de fem hjørnene er $f(0,0) = 0$, $f(5,0) = -105$, $f(5,3) = -315$, $f(4,3) = -234$ og $f(0,1) = 2$.
(I) $y = 0$, $x \in (0,5)$. Oppførselen til f er bestemt ved funksjonen $g_1(x) = f(x,0) = 9x - 6x^2$ for $x \in (0,5)$. Her er $g_1'(x) = 9 - 12x = 0$ i $x = 3/4$. Vi finner at $g_1(3/4) = f(3/4,0) = 27/8$.
(II) $x = 5$, $y \in (0,3)$. Definer $g_2(y) = f(5,y) = 45 + 8y - 6(5+y)^2$ for $y \in (0,3)$. Her er $g_2'(y) = -52 - 12y$, som er negativ i hele $(0,3)$, slik at det ikke er stasjonære punkter på denne sidekanten.
(III) $y = 3$, $x \in (4,5)$. Definer $g_3(x) = f(x,3) = 9x + 24 - 6(x+3)^2$ for $x \in (4,5)$. Her er $g_3'(x) = -27 - 12x$, som er negativ i hele $(4,5)$, slik at det ikke er stasjonære punkter på denne sidekanten.
(IV) $-x + 2y = 2$, eller $y = x/2 + 1$, med $x \in (0,4)$. Definer funksjon $g_4(x) = f(x, x/2+1) = -27x^2/2 - 5x + 2$ for $x \in (0,4)$. Her er $g_4'(x) = -27x - 5$, som er negativ i $(0,4)$, slik at det er ingen stasjonære punkter her.
(V) $x = 0$, $y \in (0,1)$. Definer $g_5(y) = f(0,y) = 8y - 6y^2$. Da er $g_5'(y) = 8 - 12y = 0$ i $y = 2/3$, med $g_5(2/3) = f(0,2/3) = 8/3$.

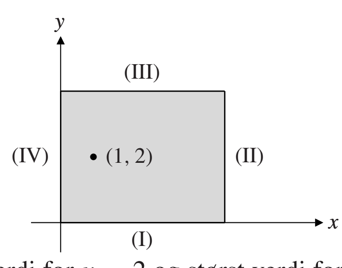
Ved å sammenlikne funksjonsverdiene for f i de fem hjørnene med de punktene vi fant på sidekantene, slutte vi at maksimumsverdien av f er $27/8$, som oppnås i $(3/4, 0)$.

5. (a) $f_1'(x,y) = e^{-x}(1-x)(y-4)y$, $f_2'(x,y) = 2xe^{-x}(y-2)$. Det følger at de stasjonære punktene er $(1,2)$, $(0,0)$ og $(0,4)$. (Pass på at du forstår hvorfor!) Dessuten er $f_{11}''(x,y) = e^{-x}(x-2)(y^2-4y)$, $f_{12}''(x,y) = e^{-x}(1-x)(2y-4)$ og $f_{22}'' = 2xe^{-x}$. Klassifisering av de stasjonære punktene:

(x,y)	A	B	C	$AC - B^2$	Type stasjonært punkt
$(1,2)$	$4e^{-1} > 0$	0	$2e^{-1}$	$8e^{-2} > 0$	Lokalt min.punkt
$(0,0)$	0	-4	0	$-16 < 0$	Sadelpunkt
$(0,4)$	0	4	0	$-16 < 0$	Sadelpunkt

(b) $f(1,y) = e^{-1}(y^2 - 4y) \to \infty$ når $y \to \infty$. Dette viser at f ikke har globale maksimumspunkter. Siden $f(-1,y) = -e(y^2-4y) \to -\infty$ når $y \to \infty$, har f ingen globale minimumspunkter heller.

(c) Mengden S er begrenset. Randen består av fire sidekanter som tilhører S. Altså er S lukket. Siden f er kontinuerlig viser ekstremverdisetningen at f har maksimums- og minimumspunkter i S. Disse global ekstrempunktene må enten være stasjonære punkter for f i det indre av S, eller punkter på randen til S. Det eneste stasjonære punktet for f i det indre av S er $(1,2)$, med $f(1,2) = -4e^{-1} \approx 1.4715$.



(i) Langs (I) er $y = 0$ og $f(x,y) = f(x,0) \equiv 0$.
(ii) Langs (II)er $x = 5$ og $f(x,y) = 5e^{-5}(y^2 - 4y)$, som har minst verdi for $y = 2$ og størst verdi for $y = 0$ og for $y = 4$. (Merk at $y \in [0,4]$ for alle punktene (x,y) på linjestykket (II).) Vi finner at $f(5,2) = -20e^{-5} \approx -0.1348$ og $f(5,0) = f(5,4) = 0$.
(iii) Langs (III) er $y = 4$ og $f(x,y) = f(x,4) \equiv 0$.
(iv) Langs (IV) er $x = 0$ og $f(x,y) = f(0,y) \equiv 0$.
Dette gir konklusjonen i fasiten.

(d) $y' = -\dfrac{f_1'(x,y)}{f_2'(x,y)} = -\dfrac{e^{-x}(1-x)(y-4)y}{2xe^{-x}(y-2)} = \dfrac{(x-1)(y-4)y}{2x(y-2)} = 0$ når $x = 1$.

13.6

4. Å beregne f_x' er enkelt. Den deriverte av $\int_y^z e^{t^2}\,dt$ mhp. y, når z holdes konstant, er ifølge (10.3.7) lik $-e^{y^2}$. Den deriverte av $\int_y^z e^{t^2}\,dt$ mhp. z, når y holdes konstant, er ifølge (10.3.6) e^{z^2}. Derfor er $f_y' = 2 - e^{y^2}$ og $f_z' = -3 + e^{z^2}$. Siden hver av tre partielle deriverte bare avhenger av én variabel og er 0 for to forskjellige verdier av variabelen, er det åtte stasjonære punkter. Se fasiten.

13.7

2. (a) Førsteordensbetingelser: $\pi_K' = \frac{2}{3}pK^{-1/3} - r = 0$, $\pi_L' = \frac{1}{2}pL^{-1/2} - w = 0$, $\pi_T' = \frac{1}{3}pT^{-2/3} - q = 0$. Dermed er $K^{-1/3} = 3r/2p$, $L^{-1/2} = 2w/p$ og $T^{-2/3} = 3q/p$. Ved å opphøye hver side av $K^{-1/3} = 3r/2p$ i -3 får vi, $K = (3r/2p)^{-3} = (2p/3r)^3 = (8/27)p^3r^{-3}$. På samme måten finner vi L og T.
(b) Se fasiten.

4. (a) Differensiering av $pF_K'(K^*, L^*) = r$ gir $dp\,F_K'(K^*, L^*) + pd(F_K'(K^*, L^*)) = dr$. Her er $d(F_K'(K^*, L^*)) = F_{KK}''(K^*, L^*)\,dK^* + F_{KL}''(K^*, L^*)\,dL^*$. Dette forklarer den første likningen vi skulle vise (erstatt dK med dK^* og dL med dL^*). Den andre vises på samme måte.
(b) Ved å flytte differensialene til de eksogene variablene over på høyre side, får vi med forenklet notasjon:

$$
\begin{aligned}
pF_{KK}''\,dK^* + pF_{KL}''\,dL^* &= dr - F_K'\,dp \\
pF_{LK}''\,dK^* + pF_{LL}''\,dL^* &= dw - F_L'\,dp
\end{aligned}
$$

Vi bruker Cramers regel for å uttrykke differensialene dK^* og dL^* ved dp, dr og dw. Definerer vi $\Delta = F_{KK}''F_{LL}'' - F_{KL}''F_{LK}'' = F_{KK}''F_{LL}'' - (F_{KL}'')^2$, får vi

$$
dK^* = \frac{1}{p^2\Delta}\begin{vmatrix} dr - F_K'\,dp & pF_{KL}'' \\ dw - F_L'\,dp & pF_{LL}'' \end{vmatrix} = \frac{-F_K'F_{LL}'' + F_L'F_{KL}''}{p\Delta}\,dp + \frac{F_{LL}''}{p\Delta}\,dr + \frac{-F_{KL}''}{p\Delta}\,dw
$$

På samme måten er

$$
dL^* = \frac{1}{p^2\Delta}\begin{vmatrix} pF_{KK}'' & dr - F_K'\,dp \\ pF_{LK}'' & dw - F_L'\,dp \end{vmatrix} = \frac{-F_L'F_{KK}'' + F_K'F_{LK}''}{p\Delta}\,dp + \frac{-F_{LK}''}{p\Delta}\,dr + \frac{F_{KK}''}{p\Delta}\,dw
$$

Vi kan nå lese av de partielle deriverte det er spurt etter. (c) Se fasiten.

5. (a) (i) $R_1'(x_1^*, x_2^*) + s = C_1'(x_1^*, x_2^*)$ (marginalinntekten pluss subsidiesatsen er lik marginalkostnaden).
(ii) $R_2'(x_1^*, x_2^*) = C_2'(x_1^*, x_2^*) + t$ (marginalinntekten er lik marginalkostnaden plus skattesatsen).
(b) Se fasiten. (c) Ved å differensiere (i) og (ii) får vi etter omordning

$$
(R_{11}'' - C_{11}'')\,dx_1^* + (R_{12}'' - C_{12}'')\,dx_2^* = -ds, \quad (R_{21}'' - C_{21}'')\,dx_1^* + (R_{22}'' - C_{22}'')\,dx_2^* = dt
$$

Løser vi disse likningene mhp. dx_1^* og dx_2^* får vi, etter omordning,

$$
dx_1^* = \frac{-(R_{22}'' - C_{22}'')\,ds - (R_{12}'' - C_{12}'')\,dt}{D}, \quad dx_2^* = \frac{(R_{21}'' - C_{21}'')\,ds + (R_{11}'' - C_{11}'')\,dt}{D}
$$

Herav finner vi de partielle deriverte:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial s} = \frac{-R''_{22} + C''_{22}}{D} > 0, \quad \frac{\partial x_1^*}{\partial t} = \frac{-R''_{12} + C''_{12}}{D} > 0, \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial s} = \frac{R''_{21} - C''_{21}}{D} < 0, \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial t} = \frac{R''_{11} - C''_{11}}{D} < 0$$

Fortegnene følger fra antakelsene i problemet og fra antakelsen $D > 0$ fra (b). Merk at disse fortegnene er i overensstemmelse med økonomisk intuisjon. Hvis for eksempel skatten på gode 2 øker, da vil produksjonen av gode 1 øke, mens produksjonen av gode 2 avtar.
(d) Følger fra uttrykkene i (c) fordi $R''_{12} = R''_{21}$ og $C''_{12} = C''_{21}$.

Repetisjonsoppgaver for kapittel 13

2. (a) Profittfunksjonen er $\pi(Q_1, Q_2) = 120Q_1 + 90Q_2 - 0.1Q_1^2 - 0.1Q_1Q_2 - 0.1Q_2^2$. Førsteordensbetingelsene for maksimal profitt er: $\pi'_1(Q_1, Q_2) = 120 - 0.2Q_1 - 0.1Q_2 = 0$ og $\pi'_2(Q_1, Q_2) = 90 - 0.1Q_1 - 0.2Q_2 = 0$. Vi finner at $(Q_1, Q_2) = (500, 200)$. Dessuten er $\pi''_{11}(Q_1, Q_2) = -0.2 \le 0$, $\pi''_{12}(Q_1, Q_2) = -0.1$ og $\pi''_{22}(Q_1, Q_2) = -0.2 \le 0$. Siden også $\pi''_{11}\pi''_{22} - (\pi''_{12})^2 = 0.03 \ge 0$, vil $(500, 200)$ maksimere profitten.
(b) Profittfunksjonen er nå, $\hat{\pi}(Q_1, Q_2) = P_1Q_1 + 90Q_2 - 0.1Q_1^2 - 0.1Q_1Q_2 - 0.1Q_2^2$. Førsteordensbetingelsene for maksimal profitt: $\hat{\pi}_1 = P_1 - 0.2Q_1 - 0.1Q_2 = 0$, $\hat{\pi}_2 = 90 - 0.1Q_1 - 0.2Q_2 = 0$. Hvis vi krever at $Q_1 = 400$, vil førsteordensbetingelsene redusere seg til $P_1 - 80 - 0.1Q_2 = 0$ og $90 - 40 - 0.2Q_2 = 0$. Det følger at $P_1 = 105$.

4. (a) (i) $f'_1(x, y) = 3x^2 - 2xy = x(3x - 2y) = 0$, (ii) $f'_2(x, y) = -x^2 + 2y = 0$. Fra (i) får vi $x = 0$ eller $3x = 2y$. Hvis $x = 0$, da gir (ii) at $y = 0$. Hvis $3x = 2y$, da gir (ii) at $3x = x^2$, slik at $x = 0$ eller $x = 3$. Hvis $x = 3$, da gir (ii) at $y = x^2/2 = 9/2$. De stasjonære punktene er derfor $(0, 0)$ og $(3, 9/2)$.

(b) (i) $f'_1(x, y) = ye^{4x^2-5xy+y^2}(8x^2 - 5xy + 1) = 0$, (ii) $f'_2(x, y) = xe^{4x^2-5xy+y^2}(2y^2 - 5xy + 1) = 0$. Hvis $y = 0$, da er (i) oppfylt, mens (ii) bare er oppfylt når $x = 0$. Hvis $x = 0$, da er (ii) oppfylt og (i) er bare oppfylt når $y = 0$. I tillegg til $(0, 0)$, har vi eventuelle andre stasjonære punkter når $8x^2 - 5xy + 1 = 0$ og $2y^2 - 5xy + 1 = 0$. Subtraherer vi den andre likningen fra den første, får vi $8x^2 = 2y^2$, eller $y = \pm 2x$. Setter vi $y = -2x$ i $8x^2 - 5xy + 1 = 0$ gir det $18x^2 + 1 = 0$, som ikke har noen løsninger. Setter vi $y = 2x$ i $8x^2 - 5xy + 1 = 0$ gir det $x^2 = \frac{1}{2}$, slik at $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Vi slutter at de stasjonære punktene er $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

8. (a) $f'_1(x, y) = 2x - y - 3x^2$, $f'_2(x, y) = -2y - x$, $f''_{11}(x, y) = 2 - 6x$, $f''_{12}(x, y) = -1$, $f''_{22}(x, y) = -2$. Stasjonære punkter der $2x - y - 3x^2 = 0$ og $-2y - x = 0$. Den siste likningen gir $y = -x/2$, som innsatt i den første likningen gir $x(\frac{5}{6} - x) = 0$. Det følger at det er to stasjonære punkter, $(x_1, y_1) = (0, 0)$ og $(x_2, y_2) = (5/6, -5/12)$. Disse punktene er klassifisert i følgende tabell:

(x, y)	A	B	C	$AC - B^2$	Type stasjonært punkt
$(0, 0)$	2	−1	−2	−5	Sadelpunkt
$(\frac{5}{6}, -\frac{5}{12})$	−3	−1	−2	5	Lokalt maksimumspunkt

(b) f er konkav der $f''_{11} \le 0$, $f''_{22} \le 0$ og $f''_{11}f''_{22} - (f''_{12})^2 \ge 0$, dvs. der $2 - 6x \le 0$, $-2 \le 0$ og $(2 - 6x)(-2) - (-1)^2 \ge 0$. Disse betingelsene er ekvivalente med $x \ge 1/3$ og $x \ge 5/12$. Spesielt må vi ha $x \ge 5/12$. Siden $5/12 > 1/3$, er f konkav i mengden S bestående av alle (x, y) der $x \ge 5/12$.

(c) Det stasjonære punktet $(x_2, y_2) = (5/6, -5/12)$ vi fant i (a) tilhører S. Siden f er konkav i S, er dette et (globalt) maksimumspunkt for f i S. $f(5/6, -5/12) = 125/432$.

9. (a) Likningene (se fasiten) $x - 1 + ay$ og $a(x-1) - y^2 + 2a^2 y$ gir $-a^2 y = y^2 - 2a^2 y$, slik at $a^2 y = y^2$. Dermed er $y = 0$ eller $y = a^2$. Siden $x = 1 - ay$, er de stasjonære punktene $(1, 0)$ og $(1 - a^3, a^2)$. (Siden vi bare ble spurt å vise at $(1 - a^3, a^2)$ er et stasjonær punkt, er det nok å påvise at i dette punktet er begge partielle deriverte lik 0.)

10. (c) $\hat{\pi} = p(a - bp + cq) + q(\alpha + \beta p - \gamma q) - P(a - bp + cq) - Q(\alpha + \beta p - \gamma q) - R$, og førsteordensbetingelsene blir $\partial\hat{\pi}/\partial p = a - 2bp + cq + \beta q + bP - \beta Q = 0$, $\partial\hat{\pi}/\partial q = cp + \alpha + \beta p - 2\gamma q - cP - \gamma Q = 0$. (d) $\partial^2\hat{\pi}/\partial p^2 = -2b$, $\partial^2\hat{\pi}/\partial q^2 = -2\gamma$ og $\partial^2\hat{\pi}/\partial p\partial y = \beta + c$. Siden $\partial^2\hat{\pi}/\partial p^2 < 0$ og $\partial^2\hat{\pi}/\partial q^2 < 0$ og $\Delta = (\partial^2\hat{\pi}/\partial p^2)(\partial^2\hat{\pi}/\partial q^2) - (\partial^2\hat{\pi}/\partial p\partial q)^2 = 4\gamma b - (\beta + c)^2$, følger konklusjonen.

14 Maksimering og minimering under bibetingelser

14.1

4. (a) Med $\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(x + 2y - 4)$ er førsteordensbetingelsene: $\mathcal{L}'_1 = 2x - \lambda = 0$ og $\mathcal{L}'_2 = 2y - 2\lambda = 0$. Fra disse likningene får vi $2x = y$, som innsatt i bibetingelsen gir $x + 4x = 4$, slik at $x = 4/5$ og $y = 2x = 8/5$, med $\lambda = 2x = 8/5$.
(b) Samme metoden som i (a) gir $2x - \lambda = 0$ og $4y - \lambda = 0$, slik at $x = 2y$. Fra bibetingelsen får vi $x = 8$ og $y = 4$, med $\lambda = 16$. (c) Førsteordensbetingelsene medfører at $2x + 3y = \lambda = 3x + 2y$, som gir $x = y$. Løsningen er dermed $(x, y) = (50, 50)$ med $\lambda = 250$.

7. Fasiten er tilstrekkelig.

9. (a) Med $\mathcal{L}(x, y) = 100 - e^{-x} - e^{-y} - \lambda(px + qy - m)$, er $\mathcal{L}'_x = \mathcal{L}'_y = 0$ når $e^{-x} = \lambda p$ og $e^{-y} = \lambda q$. Dermed er $x = -\ln(\lambda p) = -\ln\lambda - \ln p$, $y = -\ln\lambda - \ln q$. Substituerer vi disse uttrykkene for x og y i bibetingelsen og løser den framkomne likningen mhp. $\ln\lambda$, får vi $\ln\lambda = -(m + p\ln p + q\ln q)/(p + q)$. Dermed er $x(p, q, m) = [m + q\ln(q/p)]/(p + q)$ og $y(p, q, m) = [m + p\ln(p/q)]/(p + q)$.
(b) $x(tp, tq, tm) = [tm + tq\ln(tq/tp)]/(tp + tq) = x(p, q, m)$, slik at x er homogen av grad 0. På samme måte ser vi at $y(p, q, m)$ er homogen av grad 0.

14.2

3. (a) Fra $x + 2y = a$ får vi $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x$, og da er $x^2 + y^2 = x^2 + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x)^2 = \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}a^2$. Denne kvadratiske funksjonen har minimum i $x = a/5$. (b) $\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(x + 2y - a)$. Nødvendige betingelser for maksimum er $\mathcal{L}'_1 = 2x - \lambda = 0$ og $\mathcal{L}'_2 = 2y - 2\lambda = 0$, som gir at $2x = y$. Fra bibetingelsen får vi $x = a/5$ og da er $y = 2a/5$ og $\lambda = 2a/5$.

Verdifunksjonen er $f^*(a) = (a/5)^2 + (2a/5)^2 = a^2/5$, slik at $df^*(a)/da = 2a/5$, som også er verdien av Lagrange-multiplikatoren. Likning (2) blir bekreftet. (c) Se fasiten.

4. (a) Med $\mathcal{L}(x, y) = \sqrt{x} + y - \lambda(x + 4y - 100)$, er førsteordensbetingelsene for at (x^*, y^*) skal løse problemet: (i) $\partial\mathcal{L}/\partial x = 1/2\sqrt{x^*} - \lambda = 0$ (ii) $\partial\mathcal{L}/\partial y = 1 - 4\lambda = 0$. Fra (ii) får vi $\lambda = 1/4$, som innsatt i (i) gir $\sqrt{x^*} = 2$, slik at $x^* = 4$. Da er $y^* = 25 - \frac{1}{4}4 = 24$, og maksimal nytte er $U^* = \sqrt{x^*} + y^* = 26$.
(b) Betegn de nye optimale verdiene av x og y med $\hat{x}$ og $\hat{y}$. Hvis 100 endres to 101, har vi fremdeles $\lambda = 1/4$ og $\hat{x} = 4$. Bibetingelsen gir nå $4 + 4\hat{y} = 101$, slik at $\hat{y} = 97/4 = 24.25$, med $\hat{U} = \sqrt{\hat{x}} + \hat{y} = 26.25$. Økningen i maksimal nytte når 100 endres til 101, er derfor $\hat{U} - U^* = 0.25 = \lambda$. (Generelt er nytteøkningen bare *tilnærmet* lik verdien av Lagrange-multiplikatoren.)

(c) Nødvendige betingelser for optimalitet er nå $\partial\mathcal{L}/\partial x = 1/2\sqrt{x^*} - \lambda p = 0$, $\partial\mathcal{L}/\partial y = 1 - \lambda q = 0$. Vi finner at $\lambda = 1/q$, $\sqrt{x^*} = q/2p$, slik at $x^* = q^2/4p^2$, med $y^* = m/q - q/4p$. (Merk at $y^* > 0 \Leftrightarrow m > q^2/4p$.) (Hvis vi løser bibetingelsen mhp. y, blir nyttefunksjonen $u(x) = \sqrt{x} + (m - px)/q$. Vi ser at $u'(x) = 1/2\sqrt{x} - p/q = 0$ for $x^* = q^2/4p^2$ og $u''(x) = -(1/4)x^{-3/2} < 0$ når $x > 0$. Dermed har vi funnet maksimum.)

5. (a) Fra fasiten har vi $px^* = pa + \alpha/\lambda$ og $qy^* = qb + \beta/\lambda$ som gir $m = px^* + qy^* = pa + qb + (\alpha+\beta)/\lambda = pa + qb + 1/\lambda$, slik at $1/\lambda = m - (pa + qb)$. Resultatene i $(**)$ følger enkelt. (Hvis vi tenker oss at a og b indikerer et eksistensminimum for de to varer, betyr betingelsen $pa + qb < m$ at konsument har råd til å kjøpe (a, b).) (b) Med U^* som i fasiten får vi, siden $\alpha + \beta = 1$, at

$$\frac{\partial U^*}{\partial m} = \frac{\alpha}{m - (pa + qb)} + \frac{\beta}{m - (pa + qb)} = \frac{1}{m - (pa + qb)} = \lambda > 0$$

Videre er

$$\frac{\partial U^*}{\partial p} = \frac{-\alpha a}{m - (pa + qb)} - \frac{\alpha}{p} + \frac{-\beta a}{m - (pa + qb)} = \frac{-a}{m - (pa + qb)} - \frac{\alpha}{p} = -a\lambda - \frac{\alpha}{p},$$

og

$$-\frac{\partial U^*}{\partial m}x^* = -\lambda(a + \frac{\alpha}{\lambda p}) = -a\lambda - \frac{\alpha}{p}$$

slik at

$$\frac{\partial U^*}{\partial p} = -\frac{\partial U^*}{\partial m}x^*$$

Den siste likheten vises på samme måten.

6. $f(x, T) = x\int_0^T [-t^3 + (\alpha T^2 + T - 1)t^2 + (T - \alpha T^3)t]\,dt =$ $x\Big|_0^T [-\frac{1}{4}t^4 + (\alpha T^2 + T - 1)\frac{1}{3}t^3 + (T - \alpha T^3)\frac{1}{2}t^2] = -\frac{1}{6}\alpha x T^5 + \frac{1}{12}xT^4 + \frac{1}{6}xT^3$. Videre får vi at $g(x, T) = x\int_0^T (tT - t^2)\,dt = x\Big|_0^T (\frac{1}{2}t^2 T - \frac{1}{3}t^3) = \frac{1}{6}xT^3$. Den letteste måten å løse problem $(*)$ på er å merke seg at siden $\frac{1}{6}xT^3 = M$, er problemet redusert til å maksimere

$$-\tfrac{1}{6}\alpha x T^5 + \tfrac{1}{12}xT^4 + \tfrac{1}{6}xT^3 = -\alpha(\tfrac{1}{6}xT^3)T^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{6}xT^3)T + \tfrac{1}{6}xT^3 = -\alpha M T^2 + \tfrac{1}{2}MT + M$$

Maksimum for denne kvadratiske funksjonen oppnås for $T = 1/4\alpha$. Da er $x = 384\alpha^3 M$ med $f^*(M) = M + M/16\alpha$. Eliminerer vi Lagrange-multiplikatoren fra førsteordensbetingelsene, $f_1' = \lambda g_1'$ og $f_2' = \lambda g_2'$, får vi igjen $T = 1/4\alpha$, med Lagrange-multiplikator $\lambda = 1 + 1/16\alpha$. Vi ser at $\partial f^*(M)/\partial M = \lambda$, som bekrefter (2).

14.3

1. (a) Med $\mathcal{L}(x, y) = 3xy - \lambda(x^2 + y^2 - 8)$, er førsteordensbetingelsene $\mathcal{L}_1' = 3y - 2\lambda x = 0$ og $\mathcal{L}_2' = 3x - 2\lambda y = 0$. Siden $(0, 0)$ ikke oppfylle bibetingelsen, slutter vi at av disse likningene at i optimum må $x^2 = y^2$. Innsatt i bibetingelsen gir dette $x^2 = 4$, slik at $x = \pm 2$, og løsningskandidatene er: $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$ og $(-2, -2)$. Her er $f(2, 2) = f(-2, -2) = 12$ og $f(-2, 2) = f(2, -2) = -12$. Dermed vil $(2, 2)$ og $(-2, -2)$ løse maksimeringsproblemet, og $(-2, 2)$ og $(2, -2)$ løser minimeringsproblemet, fordi ekstremverdisetningen sikrer at løsninger fins. (f er kontinuerlig og beskrankningskurven er en lukket, begrenset mengde (en sirkel).)

(b) Med $\mathcal{L} = x + y - \lambda(x^2 + 3xy + 3y^2 - 3)$, er førsteordensbetingelsene $1 - 2\lambda x - 3\lambda y = 0$

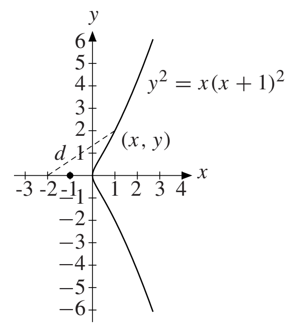
og $1 - 3\lambda x - 6\lambda y = 0$. Fra disse likningene får vi $2\lambda x + 3\lambda y = 3\lambda x + 6\lambda y$, eller $\lambda(3y + x) = 0$. Her er $\lambda = 0$ er umulig, slik at $x = -3y$. Innsatt i bibetingelsen får vi $(3, -1)$ og $(-3, 1)$ som mulige løsninger. Ekstremverdisetningen sikrer at løsningene fins. (Kriteriefunksjonen er kontinuerlig og beskrankningskurven er en lukket, begrenset mengde (en ellipse, se (4.6.5)).

2. (a) Med $\mathcal{L} = x^2 + y^2 - 2x + 1 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 16)$, er førsteordensbetingelsene (i) $2x - 2 - 2\lambda x = 0$ og (ii) $2y - 8\lambda y = 0$. Likning (i) gir $\lambda = 1 - 1/x$ (hvorfor kan vi være sikre på at $x \neq 0$?), og likning (ii) viser at $y = 0$ eller $\lambda = 1/4$. Hvis $y = 0$, da er $x^2 = 16 - 4y^2 = 16$, slik at $x = \pm 4$, og da er $\lambda = 1 \mp 1/4$. Hvis $y \neq 0$, da er $\lambda = 1/4$ og (i) gir $2x - 2 - x/2 = 0$, slik at $x = 4/3$. Bibetingelsen $x^2 + 4y^2 = 16$ gir så $4y^2 = 16 - 16/9 = 128/9$, slik at $y = \pm\sqrt{32/9} = \pm 4\sqrt{2}/3$. Derfor fins det fire løsningskandidater: (i) $(x, y, \lambda) = (4, 0, 3/4)$, (ii) $(x, y, \lambda) = (-4, 0, 5/4)$, (iii) $(x, y, \lambda) = (4/3, 4\sqrt{2}/3, 1/4)$ og
(iv) $(x, y, \lambda) = (4/3, -4\sqrt{2}/3, 1/4)$. Av disse gir (ii) maksimumspunktet (mens (iii) og (iv) gir minimumspunkter).
(b) Lagrange-funksjonen er $\mathcal{L} = \ln(2 + x^2) + y^2 - \lambda(x^2 + 2y - 2)$. De nødvendige førsteordensbetingelsene er (i) $\partial\mathcal{L}/\partial x = 2x/(2 + x^2) - 2\lambda x = 0$ (ii) $\partial\mathcal{L}/\partial y = 2y - 2\lambda = 0$, (iii) $x^2 + 2y = 2$. Fra (i) får vi $x\big(1/(2 + x^2) - \lambda\big) = 0$, slik at $x = 0$ eller $\lambda = 1/(2 + x^2)$.
(I) Hvis $x = 0$, da gir (iii) $y = 1$, slik at $(x_1, y_1) = (0, 1)$ er en kandidat.
(II) Hvis $x \neq 0$, da er $y = \lambda = 1/(2 + x^2)$, der vi brukte (ii). Substituerer vi $y = 1/(2 + x^2)$ inn i (iii) gir det $x^2 + 2/(2 + x^2) = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x^4 + 2 = 4 + 2x^2 \Leftrightarrow x^4 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{2}$.
Fra (iii) får vi $y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Derfor er $(x_2, y_2) = (\sqrt[4]{2}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})$ og $(x_3, y_3) = (-\sqrt[4]{2}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})$ løsningskandidater. Nå er $f(x_1, y_1) = f(0, 1) = \ln 2 + 1 \approx 1.69$, $f(x_2, y_2) = f(x_3, y_3) = \ln(2 + \sqrt{2}) + (1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = \ln(2 + \sqrt{2}) + \frac{3}{2} - \sqrt{2} \approx 1.31$. Minimumspunktene for $f(x, y)$ (under bibetingelsen $x^2 + 2y = 2$) er derfor (x_2, y_2) og (x_3, y_3).

4. (a) Med $\mathcal{L} = 24x - x^2 + 16y - 2y^2 - \lambda(x^2 + 2y^2 - 44)$, får vi at førsteordensbetingelsene er (i) $\mathcal{L}'_1 = 24 - 2x - 2\lambda x = 0$ og (ii) $\mathcal{L}'_2 = 16 - 4y - 4\lambda y = 0$. Fra (i) får vi $x(1 + \lambda) = 12$ og fra (ii) $y(1 + \lambda) = 4$. Eliminerer vi λ fra (i) og (ii) får vi $x = 3y$. Innsatt i bibetingelsen gir det, $11y^2 = 44$, slik at $y = \pm 2$, og da er $x = \pm 6$. Vi har dermed to kandidater, $(x, y) = (6, 2)$ og $(-6, -2)$, med $\lambda = 1$. Beregner vi kriteriefunksjonen i disse to punktene, ser vi at bare $(x, y) = (6, 2)$ er en mulig løsning. Siden kriteriefunksjonen er kontinuerlig og beskrankningskurven er lukket og begrenset (en ellipse), viser ekstremverdisetningen at optimum er funnet. (b) I hht. (14.2.3) er den tilnærmede endringen lik $\lambda \cdot 1 = 1$.

14.4

3. Minimum er lik 1 i $(x, y) = (-1, 0)$. Dette er et ganske "tricky" problem. Lagrange-funksjonen er $\mathcal{L} = (x + 2)^2 + (1 - \lambda)y^2 + \lambda x(x + 1)^2$. Det eneste stasjonære punktet som oppfyller bibetingelsen er $(0, 0)$, med $\lambda = -4$, og med $f(0, 0) = 4$. (Vi har at $\mathcal{L}'_2 = 0$ bare hvis $\lambda = 1$ eller $y = 0$. For $\lambda = 1$, er $\mathcal{L}'_1 = 3(x + 1)^2 + 2 > 0$ for alle x. For $y = 0$ gir bibetingelsen at $x = 0$ eller $x = -1$. Men $x = -1$ gir $\mathcal{L}'_1 = 2$, slik at $x = 0$ er nødvendig for at Lagrange-funksjonen skal være stasjonær.) Lagranges metode gir altså gal løsningskandidat i dette tilfellet. Merk at i punktet $(-1, 0)$ er både $g'_1(-1, 0)$ og $g'_2(-1, 0)$ lik 0. Betingelsene i setning 14.4.1 er dermed ikke oppfylt. Det gitte problemet er geometrisk sett å minimere (kvadratet av) avstanden fra $(-2, 0)$ til et punkt på grafen til $g(x, y) = 0$. Men grafen består av det isolerte punktet $(-1, 0)$ og en glatt kurve, som vist på figur M14.4.3.



Figur M14.4.3

14.5

4. $U''_{11}(x, y) = a(a-1)x^{a-2} \le 0$, $U''_{22}(x, y) = a(a-1)y^{a-2} \le 0$ og $U''_{12}(x, y) = 0$, slik at U er konkav. Med $\mathcal{L} = x^a + y^a - \lambda(px + qy - m)$, er førsteordensbetingelsene $\mathcal{L}'_1 = ax^{a-1} - \lambda p = 0$ og $\mathcal{L}'_2 = ay^{a-1} - \lambda q = 0$. Altså er $ax^{a-1} = \lambda p$ og $ay^{a-1} - \lambda q$. Eliminerer vi λ får vi $(x/y)^{a-1} = p/q$, slik at $x = y(p/q)^{1/(a-1)}$. Innsatt i budsjettbetingelsen får vi
$px + qy = py(p/q)^{1/(a-1)} + qy = yp^{a/(a-1)}q^{-1/(a-1)} + qy = yq^{-1/(a-1)}[p^{a/(a-1)} + q^{a/(a-1)}] = m$,
slik at $y = mq^{1/(a-1)}/[p^{a/(a-1)} + q^{a/(a-1)}]$. Et liknende uttrykk får vi for x.

14.6

3. (a) $\mathcal{L} = \alpha \ln x + \beta \ln y + (1-\alpha-\beta)\ln(L-\ell) - \lambda(px + qy - w\ell - m)$, som er stasjonær når: (i) $\mathcal{L}'_x = \alpha/x^* - \lambda p = 0$; (ii) $\mathcal{L}'_y = \beta/y^* - \lambda q = 0$; (iii) $\mathcal{L}'_\ell = -(1-\alpha-\beta)/(L-\ell^*) + \lambda w = 0$. Fra (i) og (ii) får vi $qy^* = (\beta/\alpha)px^*$, mens (i) og (iii) gir $\ell^* w = wL - [(1-\alpha-\beta)/\alpha]px^*$. Innsetting i budsjettbetingelsen og løsning mhp. x^* gir svaret i fasiten. De tilhørende verdiene for y^* og ℓ^* følger. Betingelsen $m \le [(1-\alpha-\beta)/\alpha]wL$ sikrer at $\ell^* \ge 0$. (b) Se fasiten.

6. Lagrange-funksjonen er $\mathcal{L} = x + y - \lambda(x^2 + 2y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z - 1)$, som er stasjonær når: (i) $\mathcal{L}'_x = 1 - 2\lambda x - \mu = 0$; (ii) $\mathcal{L}'_y = 1 - 4\lambda y - \mu = 0$; (iii) $\mathcal{L}'_z = -2\lambda z - \mu = 0$. (i) og (ii) gir $\lambda(x - 2y) = 0$. Hvis $\lambda = 0$, da gir (ii) og (iii) motsigelsen $\mu = 1$ og $\mu = 0$. Derfor er $x = 2y$. Substituerer vi denne verdien av x inn i bibetingelsene, får vi $6y^2 + z^2 = 1$ og $3y + z = 1$. Dermed er $z = 1 - 3y$ og $1 = 6y^2 + (1-3y)^2 = 15y^2 - 6y + 1$. Altså er $y = 0$ eller $y = 2/5$, og dermed er $x = 0$ eller 4/5, og $z = 1$ eller $-1/5$. De eneste løsningskandidatene er $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ med $\lambda = -1/2$, $\mu = 1$ og $(x, y, z) = (4/5, 2/5, -1/5)$ med $\lambda = 1/2$, $\mu = 1/5$. Siden $x + y$ er 0 i $(0, 0, 1)$ og 6/5 i $(4/5, 2/5, -1/5)$, har vi henholdsvis minimum og maksimum. (Bibetingelser representerer en kurve som er skjæringen mellom en ellipsoid (se figur 11.4.2, side 338) og et plan. Den kontinuerlige funksjonen $x + y$ oppnår derfor et maksimum og et minimum over denne lukkede, begrensede mengden.)

7. (a) Med en Cobb–Douglas nyttefunksjon er $U'_j(\mathbf{x}) = \alpha_j U(\mathbf{x})/x_j$, slik at fra (14.6.6) (med $k = 1$), har vi $p_j/p_1 = U'_j(\mathbf{x})/U'_1(\mathbf{x}) = \alpha_j x_1/\alpha_1 x_j$. Derfor er $p_j x_j = (a_j/a_1)p_1 x_1$. Innsatt i budsjettbetingelsen får vi $p_1x_1 + (a_2/a_1)p_1x_1 + \cdots + (a_n/a_1)p_1x_1 = m$, som medfører at $p_1x_1 = a_1 m/(a_1 + \cdots + a_n)$. Mer generelt er $p_k x_k = a_k m/(a_1 + \cdots + a_n)$ for $k = 1, \dots, n$.

(b) $U'_j(\mathbf{x}) = ax_j^{a-1}$, slik at (14.6.6) (med $k = 1$) gir $x_j^{a-1}/x_1^{a-1} = p_j/p_1$, slik at $x_j/x_1 = (p_j/p_1)^{-1/(1-a)}$ eller $p_j x_j/p_1 x_1 = (p_j p_1)^{1-1/(1-a)} = (p_j/p_1)^{-a/(1-a)}$. Budsjettbetingelsen gir

$p_1x_1\left[1+(p_2/p_1)^{-a/(1-a)}+\cdots+(p_n/p_1)^{-a/(1-a)}\right]=m$. Multipliserer vi hver side med $p_1^{-a/(1-a)}$, får vi $p_1x_1 = mp_1^{-a/(1-a)}\Big/\sum_{j=1}^{n} p_j^{-a/(1-a)}$. Argumenterer vi på samme måten for hver k, får vi

$$x_k = mp_k^{-1/(1-a)}\Big/\sum_{j=1}^{n} p_j^{-a/(1-a)} \quad \text{for } k=1,\dots,n.$$

14.7

2. Her er $\mathcal{L} = x+4y+3z-\lambda(x^2+2y^2+\frac{1}{3}z^2-b)$, slik at de nødvendige betingelsene er: (i) $\mathcal{L}_1' = 1-2\lambda x = 0$; (ii) $\mathcal{L}_2' = 4-4\lambda y = 0$; (iii) $\mathcal{L}_3' = 3-\frac{2}{3}\lambda z = 0$. Det følger at $\lambda \neq 0$, slik at $x = 1/2\lambda$, $y = 1/\lambda$ og $z = 9/2\lambda$. Substituerer vi disse verdiene inn i bibetingelsen får vi $\lambda^2 = 9/b$, slik at $\lambda = \pm 3/\sqrt{b}$. Verdien av kriteriefunksjonen er $x+4y+3z = 18/\lambda$, slik at $\lambda = -3/\sqrt{b}$ gir minimumspunktet. Dette er $(x,y,z) = (a,2a,9a)$, der $a = -\sqrt{b}/6$. Se så fasiten.

4. (a) Med $\mathcal{L} = x^2+y^2+z-\lambda(x^2+2y^2+4z^2-1)$, er de nødvendige betingelsene:
(i) $\partial\mathcal{L}/\partial x = 2x-2\lambda x = 0$, (ii) $\partial\mathcal{L}/\partial y = 2y-4\lambda y = 0$, (iii) $\partial\mathcal{L}/\partial z = 1-8\lambda z = 0$.
Fra (i) får vi $2x(1-\lambda) = 0$, slik at det er to muligheter: $x = 0$ eller $\lambda = 1$.
(A): $x = 0$. Fra (ii) får vi $2y(1-2\lambda) = 0$, slik at $y = 0$ eller $\lambda = 1/2$.
Hvis (A.1), $y = 0$, da gir bibetingelsen at $4z^2 = 1$, slik at $z^2 = 1/4$, eller $z = \pm 1/2$. Likning (iii) gir $\lambda = 1/8z$, slik at vi har to løsningskandidater: $P_1 = (0,0,1/2)$ med $\lambda = 1/4$ og $P_2 = (0,0,-1/2)$ med $\lambda = -1/4$.
(A.2) Hvis $\lambda = 1/2$, da gir (iii) at $z = 1/8\lambda = 1/4$. Det følger fra bibetingelsen at $2y^2 = 3/4$ (husk at vi har antatt $x = 0$), og dermed er $y = \pm\sqrt{3/8} = \pm\sqrt{6}/4$. Vi har fått en ny kandidater: $P_3 = (0,\sqrt{6}/4,1/4)$ med $\lambda = 1/2$, $P_4 = (0,-\sqrt{6}/4,1/4)$ med $\lambda = 1/2$.
(B): Anta at $\lambda = 1$. Likning (iii) gir $z = 1/8$, og (ii) gir $y = 0$. Fra bibetingelsen får vi $x^2 = 15/16$, slik at $x = \pm\sqrt{15}/4$. Kandidater: $P_5 = (\sqrt{15}/4,0,1/8)$ med $\lambda = 1$, $P_6 = (-\sqrt{15}/4,0,1/8)$ med $\lambda = 1$.

Verdiene av kriteriefunksjonen i kandidatpunktene er $f(0,0,1/2) = 1/2$, $f(0,0,-1/2) = -1/2$, $f(0,\sqrt{6}/4,1/4) = 5/8$, $f(0,-\sqrt{6}/4,1/4) = 5/8$, $f(\sqrt{15}/4,0,1/8) = 17/16$, $f(-\sqrt{15}/4,0,1/8) = 17/16$, som passer med fasiten. (c) Se fasiten.

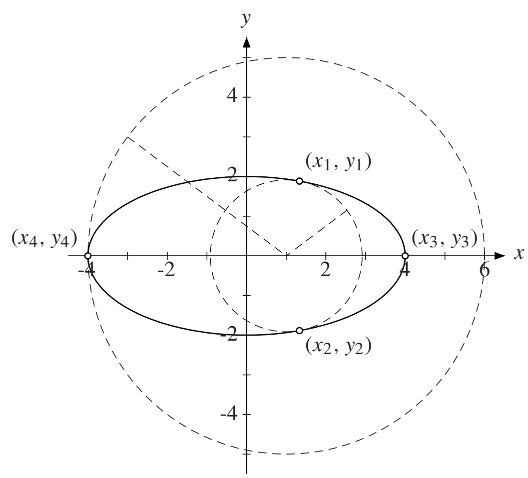
5. $\mathcal{L} = rK+wL-\lambda(K^{1/2}L^{1/4}-Q)$, slik at de nødvendige betingelsene for at (K^*,L^*) skal løse problemet er: (i) $\mathcal{L}_K' = r-\frac{1}{2}\lambda(K^*)^{-1/2}(L^*)^{1/4} = 0$, (ii) $\mathcal{L}_L' = w-\frac{1}{4}\lambda(K^*)^{1/2}(L^*)^{-3/4} = 0$, (iii) $(K^*)^{1/2}(L^*)^{1/4} = Q$. Fra (i) og (ii) får vi ved å eliminere λ at $L^* = rK^*/2w$. Substituerer vi dette i bibetingelsen får vi $(K^*)^{1/2}(rK^*/2w)^{1/4} = Q$, eller $(K^*)^{3/4}2^{-1/4}r^{1/4}w^{-1/4} = Q$. Løst mhp. K^*, får vi fasitsvaret. Vi finner lett fasitsvarene for L^* og $C^* = rK^*+wL^*$ når vi benytter at $2^{1/3} = 2\cdot 2^{-2/3}$. Verifiseringen av $(*)$ i eksempel 14.7.3 er enkel.

Repetisjonsoppgaver for kapittel 14

6. (a) Tolkning av førsteordensbetingelsen $p(x^*) = C_1'(x^*,y^*)-x^*p'(x^*)$: Hvor mye tjener en på å selge ett ekstra tonn av den første varen? Svar $p(x^*)$, fordi det er prisen som oppnås for ett tonn. Hvor mye taper en? For det første vil det å selge ett tonn ekstra av den første varen gi den ekstra kostnaden $C(x^*+1,y^*)-C(x^*,y^*)$, som er tilnærmet lik $C_1'(x^*,y^*)$. Men siden forutsetningsvis $p'(x) < 0$, vil produksjonen av ett ekstra tonn lede til en nedgang i inntektene som er tilnærmet $-x^*p'(x^*)$ (antall solgte tonn ganget med prisdifferensen. Det vi taper ved å øke produksjonen med ett tonn, $C_1'(x^*,y^*)-x^*p'(x^*)$, er tilnærmet lik det vi vinner, $p(x^*)$. Den andre førsteordensbetingelsen, $q(y^*) = C_2'(x^*, y^*) - y^* q'(y^*)$ har en liknende tolkning. (b) Se fasiten.

7. (a) Med $\mathcal{L} = x^2 + y^2 - 2x + 1 - \lambda(\frac{1}{4}x^2 + y^2 - b)$, er førsteordensbetingelsene:
(i) $\mathcal{L}_1' = 2x - 2 - \frac{1}{2}\lambda x = 0$; (ii) $\mathcal{L}_2' = 2y - 2\lambda y = 0$; (iii) $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = b$.
Fra (ii) får vi $(1-\lambda)y = 0$, og dermed er $\lambda = 1$ eller $y = 0$.
(I) Anta at $\lambda = 1$. Da gir (i) at $x = \frac{4}{3}$, og fra (iii) får vi $y^2 = b - \frac{1}{4}x^2 = b - \frac{4}{9}$, som gir $y = \pm\sqrt{b - \frac{4}{9}}$. Denne gir to kandidater: $(x_1, y_1) = (4/3, \sqrt{b - \frac{4}{9}})$ og $(x_2, y_2) = (4/3, -\sqrt{b - \frac{4}{9}})$.
(II) Hvis $y = 0$, da gir (iii) at $x^2 = 4b$, dvs. $x = \pm 2\sqrt{b}$. Dette gir to nye kandidater: $(x_3, y_3) = (2\sqrt{b}, 0)$ og $(x_4, y_4) = (-2\sqrt{b}, 0)$. Kriteriefunksjonen utregnet i disse punktene er: $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = b - 1/3$, $f(x_3, y_3) = (2\sqrt{b} - 1)^2 = 4b - 4\sqrt{b} + 1$, $f(x_4, y_4) = (-2\sqrt{b} - 1)^2 = 4b + 4\sqrt{b} + 1$. Her er (x_4, y_4) maksimumspunktet. For å avgjøre hvilket av punktene (x_3, y_3), (x_1, y_1) eller (x_2, y_2) som gir minimum, må vi undersøke hvilken verdi som er størst av $4b - 4\sqrt{b} + 1$ og $b - \frac{1}{3}$. Differensen er $4b - 4\sqrt{b} + 1 - \left(b - \frac{1}{3}\right) = 3\left(b - \frac{4}{3}\sqrt{b} + \frac{4}{9}\right) = 3\left(\sqrt{b} - \frac{2}{3}\right)^2 > 0$ siden $b > \frac{4}{9}$. Derfor har vi minimum i (x_1, y_1) og i (x_2, y_2).

Bibetingelsen $x^2/4 + y^2 = b$ framstiller en ellipse som vist på figur M14.R.7. Kriteriefunksjonen $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$ måler kvadratet av avstanden mellom punktene (x, y) og $(1, 0)$. Nivåkurvene for f er derfor sirkler med sentrum i $(1, 0)$, og på figuren ser vi de to som går gjennom maksimums- og minimumspunktene. (b) Se fasiten.



Figur M14.R.7

9. (a) Med $\mathcal{L} = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y - \lambda[(x+y)\sqrt{x+y+b} - 2\sqrt{a}\,]$, får vi førsteordensbetingelsene
(i) $\mathcal{L}_1' = 2x - 2 - \lambda[\sqrt{x+y+b} + (x+y)/\sqrt{x+y+b}\,] = 0$,
(ii) $\mathcal{L}_2' = 2y - 2 - \lambda[\sqrt{x+y+b} + (x+y)/\sqrt{x+y+b}\,] = 0$. Fra disse likningene følger det øyeblikkelig at $2x - 2 = 2y - 2$, slik at $x = y$. Innsatt i bibetingelsen gir det $2x\sqrt{2x+b} = 2\sqrt{a}$. Forkorting med 2 og kvadrering gir nå den andre likningen i $(*)$. (b) Differensiering av likningene i $(*)$ gir: (i) $dx = dy$; (ii) $6x^2\,dx + x^2\,db + 2bx\,dx = da$. Fra disse likningene finner vi umiddelbart de

førsteordens partielle deriverte av x og y mhp. a og b som gitt i fasiten. Videre er

$$\frac{\partial^2 x}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{6x^2+2bx} = -\frac{12x+2b}{(6x^2+2bx)^2}\frac{\partial x}{\partial a} = -\frac{12x+2b}{(6x^2+2bx)^3} = -\frac{6x+b}{4x^3(3x+b)^3}$$

10. (a) Se fasiten. (b) Et alternativ til fasiten er å differensiere de to likningene i ($*$) og ($**$): (i) $y\,dp + p\,dy = 24\,dw - w\,dx - x\,dw$ og (ii) $U_1'\,dp + p(U_{11}''\,dx + U_{12}''\,dy) = U_2'\,dw + wU_{21}''\,dx + wU_{22}''\,dy$, og så løse disse likningene mhp. dx og dy uttrykt ved dp og dw.

A Summer. Induksjon

A.1

3. (a)–(d): Se på det siste leddet og erstatt n med k. Summer over k fra 1 to n. (e) Koeffisientene er potensene 3^n for $n = 1, 2, 3, 4, 5$, slik at det generelle leddet er $3^n x^n$. (f) og (g): Se fasiten.
(h) Denne er vanskeligere. Du må observere at hvert ledd er 198 større enn det foregående. (Problemet er knyttet til historien om Gauss på side 464.)

8. (a) Rett: $\sum_{k=1}^n ck^2 = c\cdot 1^2 + c\cdot 2^2 + \cdots + c\cdot n^2 = c(1^2+2^2+\cdots+n^2) = c\sum_{k=1}^n k^2$
(b) Gal selv for $n = 2$: Venstresiden er $(a_1+a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$, mens høyresiden er $a_1^2 + a_2^2$.
(c) Rett: Begge sidene er lik $b_1 + b_2 + \cdots + b_N$. (d) Rett: Begge sidene er lik $5^1+5^2+5^3+5^4+5^5$.
(e) Rett: Begge sidene er lik $a_{0,j}^2 + \cdots + a_{n-1,j}^2$.
(f) Gal selv for $n = 2$: Venstresiden er $a_1 + a_2/2$, mens høyresiden er $(1/k)(a_1+a_2)$.

A.3

1. (a) Se fasiten. (b) $\displaystyle\sum_{s=0}^{2}\sum_{r=2}^{4}\left(\frac{rs}{r+s}\right)^2 = \sum_{s=0}^{2}\left[\left(\frac{2s}{2+s}\right)^2 + \left(\frac{3s}{3+s}\right)^2 + \left(\frac{4s}{4+s}\right)^2\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{4}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{6}\right)^2 = 5 + \frac{3113}{3600}$
(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i\cdot j^2 = \sum_{i=1}^{m} i \cdot \sum_{j=1}^{n} j^2 = \tfrac{1}{2}m(m+1)\cdot\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \tfrac{1}{12}m(m+1)n(n+1)(2n+1)$, der vi brukte (A.2.4) og (A.2.5).
(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} i\cdot k^j = \sum_{i=1}^{m} i\cdot\sum_{j=1}^{n}\cdot k^j = \tfrac{1}{2}m(m+1)k\frac{k^n-1}{k-1}$ (der vi brukte at $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} k^j = k + k^2 + \cdots + k^n = k(1+k+\cdots+k^{n-1})$ og formel (8.4.3) side 234).

4. $\bar{a}$ er det aritmetiske gjennomsnittet middel av $\bar{a}_s$'ene fordi $\displaystyle\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m} a_{rs}\right) = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\bar{a}_s$.
For å vise ($*$), merker vi oss at siden $a_{rj} - \bar{a}$ er uavhengige av summasjonsindeksen s, er den en felles faktor når vi summerer over s, slik at $\sum_{s=1}^m (a_{rj}-\bar{a})(a_{sj}-\bar{a}) = (a_{rj}-\bar{a})\sum_{s=1}^m (a_{sj}-\bar{a})$ for hver r. Ved å summere over r får vi

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}(a_{rj}-\bar{a})(a_{sj}-\bar{a}) = \left[\sum_{r=1}^{m}(a_{rj}-\bar{a})\right]\left[\sum_{s=1}^{m}(a_{sj}-\bar{a})\right] \qquad (**)$$

Ved å bruke egenskapene ved summer og definisjonen av $\bar{a}_j$, får vi

$$\sum_{r=1}^{m}(a_{rj} - \bar{a}) = \sum_{r=1}^{m} a_{rj} - \sum_{r=1}^{m} \bar{a} = m\bar{a}_j - m\bar{a} = m(\bar{a}_j - \bar{a})$$

På samme måte, ved å erstatte r med s som summasjonsindeks, får vi også at $\sum_{s=1}^{m}(a_{sj} - \bar{a}) = m(\bar{a}_j - \bar{a})$. Ved å substituere disse verdiene i $(**)$ får vi bekreftet $(*)$.

A.4

3. (a) For $n = 1$ er begge sidene lik 1/2. Anta at formelen er sann for $n = k$. Da er summen av de første $k+1$ leddene

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

Men $\dfrac{k}{k+1} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k+1}{k+2}$, som nettopp er den gitte formelen for $n = k+1$. Ved induksjon er da formelen sann for alle n.

(b) For $n = 1$ er begge sidene lik 3. Anta at formelen er sann for $n = k$. Da er summen av de første $k+1$ leddene

$$3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^k + 3^{k+1} = \tfrac{1}{2}(3^{k+1} - 3) + 3^{k+1}$$

Men $\frac{1}{2}(3^{k+1} - 3) + 3^{k+1} = \frac{3}{2}3^{k+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(3^{k+2} - 3)$, som nettopp er den gitte formelen for $n = k+1$. Ved induksjon er da formelen sann for alle n.

5. Siden $x_1 = 1$ er $0 < x_1 < 4$. Anta som induksjonsantakelse at $0 < x_k < 4$ er sann for $k = p$. Vi må vise at $0 < x_{p+1} < 4$. Nå er $x_{p+1} = 2\sqrt{x}_p > 0$ siden $x_p > 0$ etter induksjonsantakelsen. Videre er etter induksjonsantakelsen $x_{p+1} = 2\sqrt{x}_p < 2\sqrt{4} = 4$. Men da har vi vist at formelen er allmenngyldig.

7. Ulikheten gjelder for $n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$. Anta at $(1+x)^k \geq 1 + kx$ for et vilkårlig naturlig tall k. Vi vil vise at da er også $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$. Siden $x \geq -1$ og $k > 0$, er

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$$

Ved induksjon er derfor Bernoullis ulikhet gyldig for alle naturlige tall n.

B Trigonometriske funksjoner

B.1

4. Ved å bruke at $\cos(y - \pi/2) = \sin y$, (B.1.8) og resultatet i oppgave 3 får vi

$$\begin{aligned}\sin(x+y) = \cos(x + (y - \pi/2)) &= \cos x \cos(y - \pi/2) - \sin x \sin(y - \pi/2) \\ &= \cos x \sin y + \sin x \cos y = \sin x \cos y + \cos x \sin y\end{aligned}$$

Erstatter vi y med $-y$ i denne formelen får vi $\sin(x-y) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

6. (b) (B.1.8) og tabell B.1.1 gir: $\cos(\pi + \pi/6) = \cos\pi\cos(\pi/6) - \sin\pi\sin(\pi/6) = (-1)\frac{1}{2}\sqrt{3} - 0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$. (c) Ved oppgave 2(a) og tabell B.1.1 er $\sin(-3\pi/4) = -\sin(3\pi/4) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
(d) $\cos(5\pi/4) = \cos(\pi/4 + \pi) = \cos(\pi/4)\cos\pi - \sin(\pi/4)\sin\pi = -\cos(\pi/4) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
(e) Ifølge (B.1.6) er $\tan(7\pi/6) = \tan(\pi/6) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. (f) Se fasiten.

12. (a) Dette er en sinuskurve $y = A\sin(ax)$ med $A = 2$ og $a(8\pi) = 2\pi$, dvs. $a = 1/4$.
(b) $y = 2 + \cos x$. (En cosinuskurve med amplitude 1 og periode 2π flyttet 2 enheter oppover.)
(c) $y = 2e^{-x/\pi}\cos x$. (Eksponentielt dempet cosinuskurve med amplitude $2e^{-x/\pi}$.)

13. Siden linjesegmentene AC og BD er like lange, har vi at $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 = (\cos(x+y) - 1)^2 + \sin^2(x+y)$. Venstresiden er lik

$$\begin{aligned} \text{VS} &= \cos^2 x - 2\cos x\cos y + \cos^2 y + \sin^2 x + 2\sin x\sin y + \sin^2 y \\ &= 2 - 2\cos x\cos y + 2\sin x\sin y \end{aligned}$$

og høyresiden er

$$\text{HS} = \cos^2(x+y) - 2\cos(x+y) + 1 + \sin^2(x+y) = 2 - 2\cos(x+y)$$

der vi har brukt at $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ gjentatte ganger. Likningen VS = HS medfører at $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$.

B.2

5. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x} = 2\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 2$, pga. (B.2.10), eller bruk l'Hôpital.
(b) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin mt}{\sin nt} = \text{“}\dfrac{0}{0}\text{”} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{m\cos mt}{n\cos nt} = \dfrac{m}{n}$
(c) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t^2} = \text{“}\dfrac{0}{0}\text{”} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{2t} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = \dfrac{1}{2}$, ifølge (B.2.10).
(d) $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin ax}{x} = 0$, direkte. (Dette er ikke et “0/0”-uttrykk.)

9. (b) Med $v = 1 + x^2$ er $\dfrac{d(\arctan v)}{dx} = \dfrac{d(\arctan v)}{dv}\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{1+v^2}2x = \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}$.

B.3

2. (a) $\displaystyle\int_0^\pi (\sin x + \cos x)\,dx = \Big|_0^\pi (-\cos x + \sin x) = -\cos\pi + \cos 0 + \sin\pi - \sin 0 = 1 + 1 + 0 - 0 = 2$
(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \Big|_0^{\pi/2} x(-\cos x) - \int_0^{\pi/2}(-\cos x)\,dx = -(\pi/2)\cos(\pi/2) + \Big|_0^{\pi/2}\sin x = 0 + 1 - 0 = 1$
(c) $\displaystyle I = \int_{-\pi}^0 \sin^2 t\,dt = \int_{-\pi}^0 \sin t\sin t\,dt = \Big|_{-\pi}^0 (-\cos t)\sin t - \int_{-\pi}^0 (-\cos t)\cos t\,dt = \int_{-\pi}^0 \cos^2 t\,dt$
$\displaystyle = \int_{-\pi}^0 (1 - \sin^2 t)\,dt = \Big|_{-\pi}^0 t - I = \pi - I$. Dermed er $I = \pi/2$.

6. (a) $\displaystyle S = \int_0^4 \tfrac{3}{2}x\sin^2\pi t\,dt + \int_0^4 y\,dt = \tfrac{3}{2}x\int_0^4 \sin^2\pi t\,dt + y\Big|_0^4 t = 3x + 4y$. Her brukte vi at $\displaystyle\int_0^4 \sin^2\pi t\,dt = 2$, som vi kan vise ved delvis integrasjon som i oppgave B.3.2(c). Her er et alternativ som er lettere om du mot formodning kjenner formelen

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x \qquad (*)$$

(Setter vi $y = x$ i formel (B.1.8), får vi $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$, og dermed følger (∗).) Bruker vi (∗) får vi

$$\int_0^4 \sin^2 \pi t \, dt = \int_0^4 \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\pi t\right) dt = \Big|_0^4 \left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4\pi}\sin 2\pi t\right) = 2$$

(b) Problemet blir

$$\text{maks}\,(3x + 4y) \quad \text{når} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = K$$

Dette er helt analogt med problem 14.4.2. Ved å studere nivålinjene $3x + 4y = c$, der c er en konstant, ser vi at løsningen må være i punktet $(x, y) = (0, K^2)$.