NMBU
Fakultet for realfag og teknologi

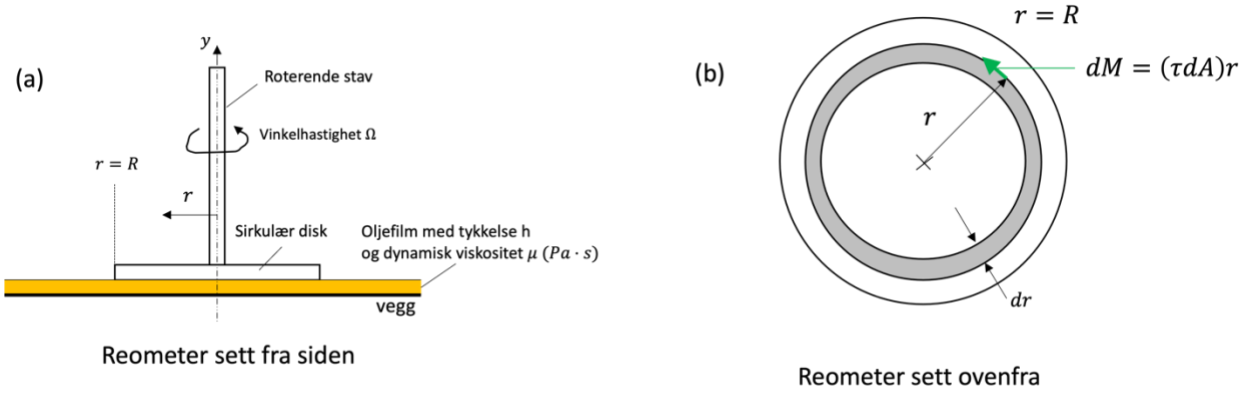
Obligatorisk oppgave i: TPS200 - Fluidmekanikk 1.

Innleveringsfrist: Tirsdag 22. mars 2022, kl. 23:59

Forsøk å løse alle oppgavene selv før du samarbeider med andre. Digital besvarelse leveres individuelt i Canvas, og skal leveres som Pdf. Vi foretrekker at du bruker et skriveprogram (Word, Latex) til besvarelsen, og hvis du velger å scanne en håndskrevet besvarelse setter vi pris på om du gjør deg flid med håndskriften. En score på 40% kreves for godkjent besvarelse.

Oppgave 1 – Fluiders mekaniske egenskaper og målemetoder

Et reometer består av en roterende sirkulær disk, og brukes for å måle den dynamiske viskositeten μ til en oljefilm med tykkelse h<<R, se Fig 1a. Vinkelhastigheten Ω $\left(\frac{radianer}{sekund}\right)$ er konstant. Både hastighet $u = \Omega\, r$ og skjærkraft τ varierer lineært med radien r.



Figur 1. Et reometer brukes for å måle viskositeten til en oljefilm, som er et viskøst (Newtonsk) fluid. Vi er interessert i et uttrykk for skjærkraften og momentet om den roterende staven.

a) Vis at skjærkraften i oljefilmen kan uttrykkes som $\tau = \frac{\mu\Omega r}{h}$. (1 poeng)

b) Vis at momentet som kreves for å rotere staven kan uttrykkes som $M = \int_0^R dM = \frac{\pi\mu\Omega R^4}{2h}$. (1 poeng)

c) Forklar hvilke antakelser du har lagt til grunn for beregningene dine. (0.5 poeng)

Løsning: Se eksempel 1.10 i White «Fluid Mechanics» 7th Edition

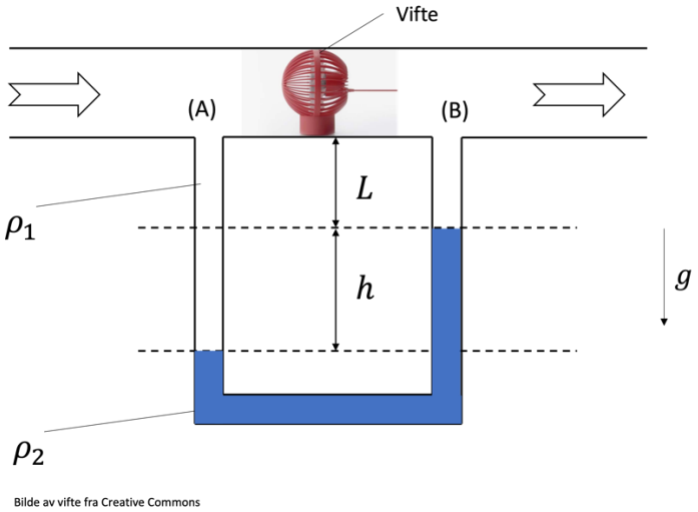
a) Skjærkraften defineres som: $\tau = \frac{\mu du}{dy} \approx \frac{\mu \Omega r}{h}$.

b) $dM = (\tau)(dA)r = \left(\frac{\mu \Omega r}{h}\right)(2\pi r\, dr)r,\ M = \int_0^R dM = \frac{2\pi\mu\Omega}{h}\int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\mu\Omega R^4}{2h}$.

c) Neglisjerer randeffekter (hvis oljen fester seg til siden av disken måler man en høyere (uriktig) viskositet. Neglisjerer turbulens (som er rimelig ved lave Reynoldstall), og neglisjerer luftmotstand fra oversiden av disken. To av tre riktige gir full score på c).

Oppgave 2 – Fluidstatikk: Bruk av manometer til måling av trykkforskjell i et strømmende fluid

Et U-rør manometer (bestående av to like lange vertikale rør og ett horisontalt rør) brukes for å måle trykkfallet fra (A) til (B) over en vifte som vist i Figur 2. Det strømmende fluidet har en egenvekt ρ_1 og manometerfluidiet har en egenvekt som er mye høyere enn det strømmende fluidiet, altså $\rho_2 \gg \rho_1$.



Figur 2. Ved å måle forskjellen i væskehøyde i det venstre og det høyre røret kan vi bestemme trykkfallet fra (a) til (B) over en vifte eller annen hindring i strømningen.

a) Vis at trykkforskjellen fra (A) til (B) kan uttrykkes som $-\Delta p = p_a - p_b = (\rho_2 - \rho_1)gh \approx \rho_2 gh$. (1 poeng)

Løsning: Se eksempel 2.3 i i White «Fluid Mechanics» 7th Edition

Kraftbalanse om interfasen mellom fluidene i venstre bend:

$p_a + \rho_1 gL + \rho_1 gh - \rho_2 gh - \rho_1 gL = p_b$

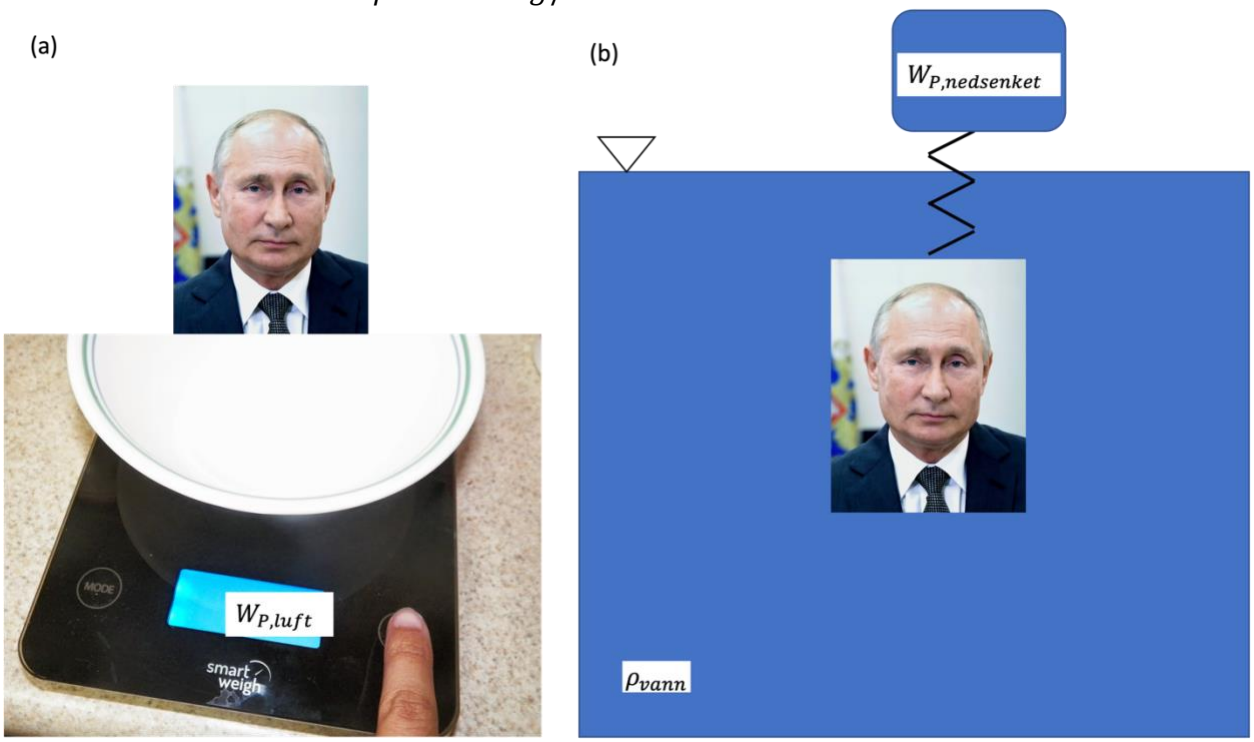
Som gir: $-\Delta p = p_a - p_b = (\rho_2 - \rho_1)gh$

Dersom $\rho_1 \ll \rho_2$ får vi at:

$\underline{-\Delta p = p_a - p_b = \rho_2 gh.}$

Oppgave 3 – Fluidstatikk: Kraft på nedsenkede flater og oppdrift

En mann stiller seg på en badevekt og leser av vekten $W_{p,luft} = m_P \cdot g = 1\ kN$, der m_P er mannens masse og g=10m/s^2 er gravitasjonskonstanten. Når mannen tar et bad i Svartehavet (ved en av hans mange palasser) og måler vekten sin med en fiskevekt viser den $W_{p,nedsenket} = 0.95\ kN$. Vannets tetthet er $\rho = 1000\ kg/m^3$.



Vis ved bruk av kraftbalanse at oppdriftskraften $F_P = W_{P,luft} - W_{P,nedsenket} = 0.05\ kN = 50N$ (0.5 poeng) og at egenvekten til mannen er $\rho_P = 1.05\rho$ (0.5 poeng).

Løsning: Se eksempel 2.11 i White «Fluid Mechanics»7th Edition

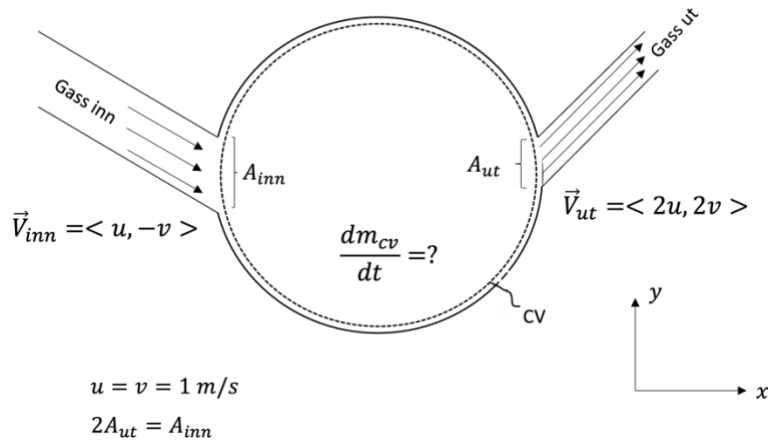
Kraftbalanse i z-retning: $\Sigma F_z = 0 = W_{p,nedsenket} + F_P - W_{P,luft} = 0.95kN + F_P - 1kN.$

Som gir: $\underline{F_P = 0.05\ kN = 50N}$.

Volumet til vannet mannen fortrenger er $Volum_P = \frac{F_P}{\rho g} = \frac{50N}{1000kg/m^3 \cdot 10m/s^2} = 0.005m^3 \rightarrow$

$\rho_P = \frac{W_{P,luft}}{Volum_P \cdot g} = \frac{m_{P,luft}}{Volum_P} = \frac{100kg}{0.005m^3} = \frac{20000kg}{m^3} \approx 20\rho$. Ja, han er ikke laget av biologisk materiale.

Oppgave 4 – kontrollvolum, kontinuitetslikning og impulslikning



Figur X: Gass strømmer inn i et kontrollvolum med hastighetsvektor $\vec{V}_{inn}$ og ut med hastighetsvektor $\vec{V}_{ut}$. Arealene A_{inn} og A_{ut} er parallelle med y-aksen. Vi kan bruke kontinuitetslikningen til å regne ut akkumulasjonen i kontrollvolumet.

a) Gass strømmer inn i et kontrollvolum med hastighetsvektor $\vec{V}_{inn}$ og ut med hastighetsvektor $\vec{V}_{ut}$. Arealene A_{inn} og A_{ut} er parallelle med y-aksen. Bruk kontinuitetslikningen til å vise at akkumulasjonen i kontrollvolumet er lik null, altså $\frac{dm_{cv}}{dt} = 0$. (1 poeng)

Løsning: Kontinuitetslikningen md hastighet prikket med normalvektor gir:

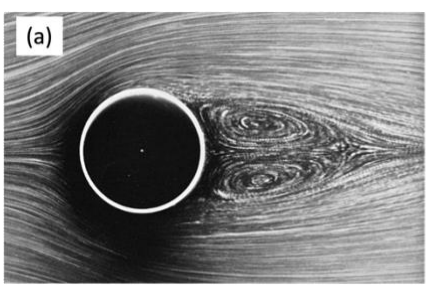
$\dot{m}_{CV} = \rho < u, -v > \cdot < -1,0 > A_{inn} - \rho < 2u, 2v > \cdot < 0,1 > A_{ut}$

$\dot{m}_{CV} = -\rho(-u + 0)A_{inn} - \rho(2u \cdot 0 + 2v)A_{ut}$

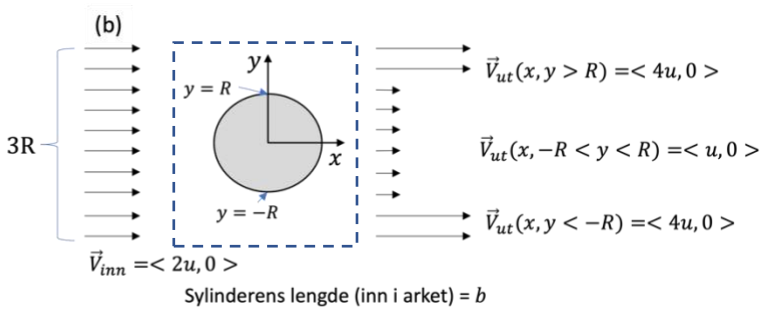
$\dot{m}_{CV} = \rho u A_{inn} - \rho 2 v A_{ut}$

Vi har at $A_{ut} = \frac{1}{2}A_{inn}$, dermed:

$$\dot{m}_{CV} = \rho u A_{inn} - \rho 2 v \frac{1}{2} A_{inn} = \rho A_{inn}(u - v) = \rho A_{inn}\left(\frac{1m}{s} - \frac{1m}{s}\right) = 0$$



This Photo by Unknown Author is licensed under CC BY-SA



Figur X: Strømningen rundt en sylinder (a) kan forenkles ved hastighetsfeltet vist i (b). Vi kan bruke impulslikningen til å finne kraften på sylinderen. Rammen viser et nyttig valg av kontrollvolum.

Strømningen rundt en sylinder kan forenkles som vist i Figur X. Sylinderen har radius R og bredde b inn i arket. Egenvekten til fluidet er $\rho = konstant$.

b) Bruk kontinuitetslikningen til å vise at massen er bevart fra innløp til utløp. (0.5 poeng)
Løsning: $\dot{m}_{inn} = 3Rb \cdot 2u = 6bRu$
$\dot{m}_{ut} = \dot{m}_{bak} + \dot{m}_{over} + \dot{m}_{under} = 2Rbu + Rb4u = 6bRu$

c) Bruk impulslikningen for å vise at bevegelsesmengden er $\dot{m}_{ut}V_{ut} - \dot{m}_{inn}V_{inn} = 6\rho bRu^2$. Neglisjer gravitasjon og viskøse friksjonskrefter. Strømningen er stasjonær. (2 poeng)

Løsning: Impulslikning i x-retning rett foran og rett bak sylinderen gir:
$Bevegelsesmengde_1 = (\rho AV^2)_{ut} - (\rho AV^2)_{inn}$
$A = 2bR$ (tverrsnittsarealet til sylinderen). Setter inn for A:
$Bevegelsesmengde_1 = \rho 2bR(u^2 - (2u)^2) = \rho 2bR(-3u^2) = -6\rho bRu^2$

Impulslikning i x-retning på siden av sylinderen gir:
$Bevegelsesmengde_2 = (\rho AV^2)_{ut} - (\rho AV^2)_{inn}$
Tverrsnittsarealet på siden av sylinderen er: $A_2 = Rb$. Setter inn for A_2:
$V_{ut} = 4u, V_{inn} = 2u$
$Bevegelsesmengde_2 = \rho Rb((4u)^2 - (2u)^2) = \rho Rb(16u^2 - 4u^2) = 12\rho Rbu^2$

$Samlet\ bevegelsesmengde = -6\rho bRu^2 + 12\rho Rbu^2 = 6\rho bRu^2$

c) Trykket på innløpet og utløpet er kjent, henholdsvis p_{inn}og p_{ut}. Bruk impulslikningen for å vise at dragkraften på sylinderen (rettet mot strømningen) er $F_D = (p_{inn} - p_{ut})3Rb - 6\rho bRu^2$. Neglisjer gravitasjon og viskøse friksjonskrefter. Strømningen er stasjonær. Regn ut en tallverdi for dragkraften F_D når $p_{inn} - p_{ut} = 1\ bar = 10^5 N, R = 0.5m, b = 2m, u = 1m/s$ (1 poeng)

Løsning: Kraftbalanse I x-retning gir:
$6\rho bRu^2 = (p_{inn} - p_{ut})A_{inn} - F_D$
$F_D = (p_{inn} - p_{ut})A_{inn} - 6\rho bRu^2$
$F_D = (P_{inn} - p_{ut})3Rb - 6\rho bRu^2$
Setter in tall: $F_D = \frac{10^5 N}{m^2} \cdot 3 \cdot 1m^2 - 6 \cdot \frac{1000kg}{m^3} \cdot 1m^2 \left(\frac{1m}{s}\right)^2 = 3 \cdot 10^5 N - 6 \cdot 10^3 N = 294kN$