# NMBU
## Fakultet for realfag og teknologi

Obligatorisk oppgave 2 i: TPS200 - Fluidmekanikk 1.

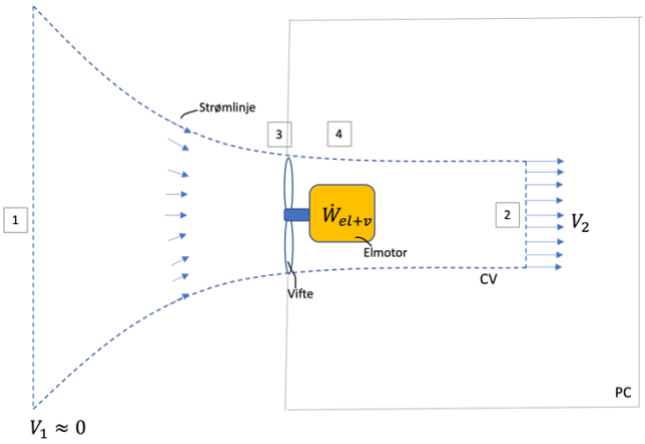
Innleveringsfrist: Tirsdag 3. mai 2022, kl. 23:59

Forsøk å løse alle oppgavene selv før du samarbeider med andre. Digital besvarelse leveres individuelt i Canvas, og skal leveres som Pdf. Vi foretrekker at du bruker et skriveprogram (Word, Latex) til besvarelsen, og hvis du velger å scanne en håndskrevet besvarelse setter vi pris på om du gjør deg flid med håndskriften. En score på 40% kreves for godkjent besvarelse.

**Oppgave 1 – Energilikningen: Luftavkjøling av en PC**

En vifte brukes for å luftavkjøle en PC, se Figur 1. Diameteren på viften er 5 cm, og den kombinerte virkningsgraden til viften og elmotoren som driver viften er 30 prosent, dvs. $\eta = 0.3$. Vi velger et kontrollvolum CV som er stort nok til at hastigheten i punkt 1 kan tilnærmes som $V_1 \approx 0$. Korreksjonsfaktoren på hastigheten $V_2 = 4.90 m/s$ er $\alpha_2 = 1.10$. PCen står i et rom som holder 20 $°C$ og trykket i rommet er 1 atm.

Vis at (*a*) effekten til viften med elmotor er 0.506 W (2 poeng) og at (*b*) trykkforskjellen over viften (fra 3 til 4 i Figur 1) er 15.8 Pa (1 poeng). Gjør nødvendige tilnærminger og begrunn disse.




Figur 1. En vifte som drives av en elmotor avkjøler en PC. Den samlede virkningsgraden av elmotor og vifte er 30 prosent, og hastigheten på luften inn i PCen er $V_2$. Vi vil finne ut hvor mye effekt $\dot{W}_{el+v}$ vi trenger fra strømnettet for å drive viften og elmotoren.

Løsning 1a):

Trykket i punkt 1 og 2 er atmosfærisk og høydeforskjellen mellom 1 og 2 er lik null (det er også mulig å argumentere med at selv om det hadde vært en høydeforskjell så hadde denne gitt opphav til en veldig liten trykkforskjell siden egenvekten til luft er lav). Vi antar at strømningen er friksjonsløs og at energitapet kun skyldes singulærtap over viften. Massen er bevart slik at massestrøm inn er lik massestrøm ut ($\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3 = \dot{m}_4 = \dot{m}$). Massestrømmen $\dot{m} = \rho Q$ der volumstrømmen $Q = V_2 A = V_2 \pi D^2/4$. Med $D = 0.05m$ og $\rho = 1.2\ kg/m^3$ (fra tabell eller Google-søk) innsatt i uttrykket for massestrøm finner vi at $\dot{m} = 0.0115 kg/s$.

Energilikningen kan skrives som:

$$\dot{m}\left(\frac{P_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2} + g z_1\right) + \dot{W}_{vifte} = \dot{m}\left(\frac{P_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + g z_2\right) + \dot{W}_{turbin}$$

der 1., 2., 3. ledd på venstre side kan strykes; det samme kan 1., 3., og 4. på høyre side. Dermed står vi igjen med $\dot{W}_{vifte} = \dot{m}\alpha_2 V_2^2/2$, som gir:

$$\dot{W}_{vifte} = \frac{\left(0.0115\frac{kg}{s}\right)(1.10)\left(\frac{4.90m}{s}\right)^2}{2} W = 0.152\ W.$$

(Her står W for Watt (J/s), ikke arbeid.)

Effekten vi må forsyne viften og elmotoren med fra strømnettet er $\dot{W}_{el+v} = \frac{\dot{W}_{vifte}}{\eta} = \frac{0.152}{0.3} W = \mathbf{0.506W}$.

Løsning 1b)

Vi skal finne trykkfallet fra 3 til 4. Vi antar at hastigheten er konstant over viften og at høydeforskjellen er null, dvs. $V_3 \approx V_4$ og $z_3 \approx z_4$. Energilikningen fra punkt 3 til 4 reduseres dermed til:

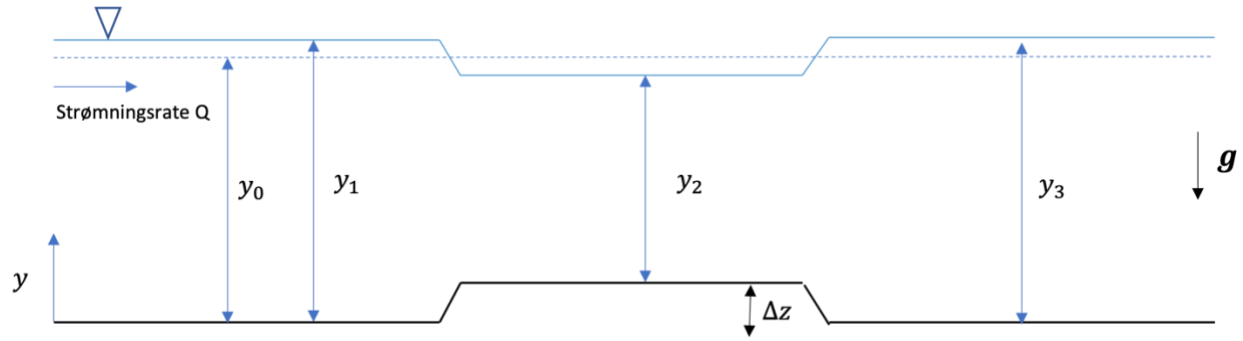
$$\dot{m}\frac{P_3}{\rho} + \dot{W}_{vifte} = \dot{m}\frac{P_4}{\rho},$$

som uttrykt ved trykkforskjellen kan skrives som:

$$P_4 - P_3 = \frac{\rho \dot{W}_{vifte}}{\dot{m}} = \frac{\left(\frac{1.20kg}{m^3}\right)(0.152W)}{\frac{0.0115kg}{s}} = \mathbf{15.8\ Pa}.$$

**Oppgave 2 – Kanalstrømning: Finne vannstanden over en bunnhevning**

I en kanal med bredde b=1.5m strømmer det vann med en rate på Q=3 m/s, se Figur 2. Vannets tetthet $\rho = 1000 kg/m^3$ og tyngdeakselerasjonen er $g = 9.8 m/s^2$. En terskel er plassert på bunnen med høyde $\Delta z$ og bredde b og dens lengde er tilstrekkelig til at væskenivået $y_2$ er konstant over terskelen. Oppstrøms (før) terskelen er vannivået $y_1$, og nedstrøms terskelen er nivået $y_3$. Når det ikke strømmer er vannstanden $y_0$ = 1.6 m overalt, og dette er også tilfelle når terskelhøyden $\Delta z$ ikke overstiger en kritisk verdi $\Delta z_c$, dvs. $y_0$ = 1.6 m overalt når $\Delta z < \Delta z_c$. Anta tapsfri strømning.




Figur 2. Kanalstrømning over en terskel med høyde $\Delta z$.

Oppgaver:

Anta tapsfri strømning og a) vis at vi får kritisk strømning over terskelen når $y_2 = y_c = \left(\frac{q}{g}\right)^{1/3} = 0.742m$, der $y_c$ er kritisk dybde og q er volumstrømmen per breddeenhet, dvs. q = Q/b (1 poeng).

b) $y_2 = y_c = \left(\frac{q}{g}\right)^{1/3}$ medfører at $\Delta z = \Delta z_c$. Vis at den høyeste terskelen vi kan uten at væskenivået før terskelen $y_1$ overstiger $y_0$ har en høyde $\Delta z_c$=0.57 m (1 poeng). Du kan bruke at $\left(y_c + \frac{q^2}{2gy_c^2}\right) = \frac{3}{2}y_c$ (1 poeng).

c) Vis at høyden $y_2$ som følge av en bunnhevning $\Delta z = 0.3m$ kan uttrykkes som

$$y_2^3 - 1.38y_2^2 + \frac{q^2}{2g} = 0$$

og forklar hvordan du ville løst denne for $y_2$ (1 poeng).

d) Løs likningen over og vis at $y_2$ er 1.25m hvis bunnhevningen er $\Delta z = 0.3m$ (1 poeng). Hvorfor kan du utelukke de to andre løsningene for $y_2$?

Løsning 2a)

Kritisk strømning er definert ved at strømningshastigheten V er lik bølgehastigheten c, dvs. Fr = V/c = 1. Se løsningsforslag for eksamen 2003, oppgave 3a og Forelesningsnotater fra forelesning 19 fra 2021 med Vegard.

Løsning 2b)

$y_2 = y_c = \left(\frac{q}{g}\right)^{1/3}$ medfører at $\Delta z = \Delta z_c$.

Bernoulli fra 1 til 2, med P1 = P2 = Patm ved vannoverflaten, gir $\Delta z_c = (y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2}) - \left(y_c + \frac{q^2}{2gy_c^2}\right)$. Det første leddet har numerisk verdi lik 1.68m når $y_1 = y_0$, som gir at $\Delta z_c = 1.68m - \frac{3}{2} \cdot 0.742m = \mathbf{0.57m}$.
Se også løsningsforslag for eksamen 2003, oppgave 3a og Forelesningsnotater fra forelesning 19 fra 2021 med Vegard Nilsen.

Løsning 2c)
Energilikningen uten tap fra 1 til 2, med P1 = P2, gir:

$$E_1 = E_2 + \Delta z = 1.68m - 0.3m = 1.38m$$
$$E_2 = y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} = 1.38m$$

Som uttrykt ved den ukjente $y_2$ blir:

$$\boldsymbol{y_2^3 - 1.38y_2^2 + \frac{q^2}{2g} = 0}$$

Se også løsningsforslag for eksamen 2003, oppgave 3a og Forelesningsnotater fra forelesning 19 fra 2021 med Vegard.

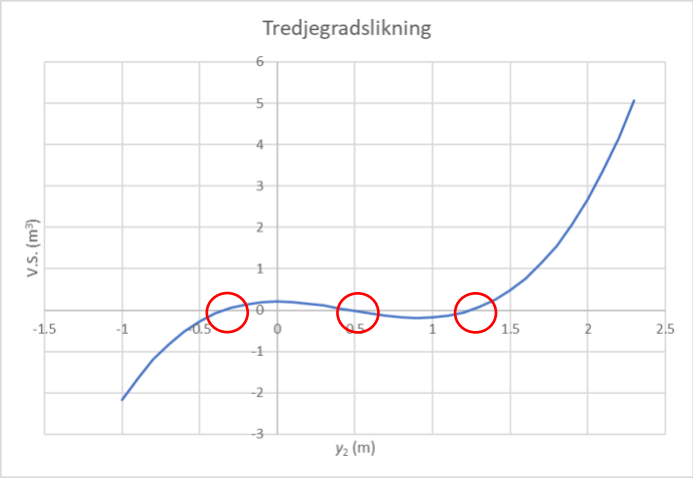
Løsning d)
Likningen

$$y_2^3 - 1.38y_2^2 + \frac{q^2}{2g} = 0$$

har én underkritisk, én overkritisk løsning og en negativ (ufysisk) løsning (denne kan vi utelukke).

Foreslått løsning (andre metoder gir også riktig svar): Plotter Q (eller q) som funksjon av $y_2$ i Excel og finner nullpunktene.

Hvilken er riktig? Så lenge $\Delta z < \Delta z_c$ endrer ikke strømningsregimet seg og vi velger løsningen som svarer til strømningsregimet oppstrøms terskelen (underkritisk → underkritisk; overkritisk → overkritisk)




I oppgave 2 d) plotter vi Q vs. $y_2$ og finner nullpunktene.
Se løsningsforslag for eksamen 2003, oppgave 3a og Forelesningsnotater fra forelesning 19 (kanalstrømning 3) fra 2021 med Vegard Nilsen.

**Oppgave 3 – Dragkraft: Terminalhastigheten til husholdningspartikler i vann og matolje/ honning/sirup**

I denne oppgaven skal du lære om dragkraft ved jobbe litt slik vi forskere gjør. Oppgaven går ut på å predikere (regne ut) terminalhastigheten til ulike husholdningspartikler (riskorn, quinoafrø, gul eller grønn ert, M&M e.l.) som faller i matolje og i vann, og å utføre enkle eksperimenter for å validere den teoretiske prediksjonen din for terminalhastigheten.

Oppgave a) Gå på kjøkkenet ditt og velg en husholdsningspartikkel. Regn ut hvilken terminalhastighet denne partikkelen vil nå når den faller i en viskøs væske som matolje (olivenolje, rapsolje osv.), honning eller sirup, og hvilken terminalhastighet den vil nå når den faller i vann. Kommenter utregningen din og hvilke antakelser du har tatt (2 poeng).

Oppgave b) For å validere teorien fra a) skal du utføre eksperimenter med fallende partikler hvor du måler terminalhastigheten. Hvordan forholder de eksperimentelle resultatene seg til den teoretiske prediksjonen din fra a)? Kommenter avvik og samsvar mellom teori og eksperiment. Hvis det er mulig å forbedre utregningen din fra a) for å få bedre samsvar mellom teori og eksperiment skal du gjøre dette. Kan du også forbedre den eksperimentelle metoden din? (2 poeng)

Oppgave c) Hvor lang tid tar det for partiklene å nå terminalhastighet, og hvilken strekning har de da tilbakelagt? (Bonusoppgave, ingen poeng)

Løsningsveiledning: Hvis Re << 1 kan man bruke Stokes' draglov til å regne ut terminalhastigheten. Denne vil være gyldig for eksempel for riskorn og quinoafrø i honning, og muligens også i olje. Pass på å bruke riktig projeksjonsareal (riskorn legger seg for eksempel på siden ved lave Re, og arealet er da lengden ganger diameteren).

De fleste husholdningpartikler vil falle ved Re >> 1 i vann, og da gjelder ikke lenger Stokes' draglov – man må da finne terminavhastighet ved å gjette et Re og så finne $C_D$ ved bruk av Figure 11.9 i Elger (EFM ) og tilslutt finne terminalhastighet ved å bruke kraftbalansen (mellom gravitasjonskraft, oppdrift og drag) til å uttrykke terminalhastighet ved $C_D$, som beskrevet i eksempel 11.4. Man kan eventuelt bruke formel (11.9) for å finne $C_D$ som funksjon av Re når Re >> 1 istedenfor å bruke Figure 11.9. I forsøkene bør man passe på at partiklene ikke faller langs veggen siden de da faller mye saktere. Hvis man har valgt en assymmetrisk partikkel ser jeg for meg at det er vanskelig å få samsvar mellom teori og eksperiment. Lengdeskalaen som bestemmer terminalhastigheten er da den hydrodynamiske diameteren.

**Mer detaljert:** Dragkraften er generelt (alle Re) gitt ved $F_D = c_D A \frac{1}{2}\rho V_0^2$, der $\rho$ er fluidets tetthet, $c_D$ er dragkoeffisienten, A er tverrsnittsarealet ($\pi d^2/4$ for en kule, for eksempel en ert) og $V_0$ er hastigheten. Tyndekraften er gitt ved $F_W = \Delta\rho \forbidden{V_k} g$, der $\Delta\rho = \rho_k - \rho$ er tetthetsforskjellen mellom partikkelen og fluidet, $\forbidden{V_k}$er volumet til den fallende partikkelen ($\pi d^3/6$ for en kule) og $g$ er tyngdeakselerasjonen. Når dragkraften balanserer tyngdekraften er summen av krefter lik null slik at partikkelen faller med konstant hastighet, $V_0 = konst.$

Kraftlikevekt gir:

$$F_D = F_W$$
$$c_D A \frac{1}{2}\rho V_0^2 = \Delta\rho V_k g$$

,som løst for $V_0$ gir

$$V_0 = \sqrt{\frac{2\Delta\rho \forbidden{V_k} g}{c_D A \rho}} \text{ (likn. 1).}$$

Innsatt for $A$ og $\forbidden{V_k}$ for en kule blir dette

$$V_0 = \sqrt{\frac{4\Delta\rho d g}{3 c_D \rho}}.$$

Ved Re < 1 gjelder Stokes' draglov, som uttrykt for en kule er: $F_D = F_{D,Stokes} = 3\pi\mu V_0 d$, der $\mu$ er den dynamiske viskositeten til fluidet. Når partikkelen faller med konstant hastighet er $F_{D,Stokes} = F_W$. Med $A$ og $\forbidden{V_k}$ for en kule innsatt i $F_{D,Stokes} = F_W$ får vi:

$$3\pi\mu V_0 d = \frac{1}{6}\Delta\rho\pi d^2 g,$$

som løst for $V_0$ gir

$$V_0 = \frac{\Delta\rho d^2 g}{18\mu} \text{ (likn. 2).}$$

Hvis Re <1 kan vi benytte (likn. 2) til å predikere terminalhastigheten $V_0$ (verdien av Re må sjekkes, $Re = V_0\, d/\nu$), mens hvis Re > 1 må vi iterere oss frem til en løsning. I dette tilfellet bruker vi (likn. 2) for å få et kvalifisert gjett av $V_0$ (en initialverdi), og vi bruker figur 11.9 i Elger et al. (EFM) i kombinasjon med (likn. 1) til å forbedre prediksjonen av $V_0$.

**Iterasjonsmetode for å finne $V_0$ ved Re > 1:**

1. Estimer en gjettet verdi for $V_0$ fra (likn. 2). Vi kaller denne verdien $V_{0,gjett}$.
2. Iterasjon 1, steg 1: Beregn Reynoldstallet, $Re^{(1)} = V_{0,gjett} d/\nu$, der (1) står for iterasjon nummer 1.
3. Iterasjon 1, steg 2: Les av $c_D$ for $Re = V_{0,gjett} d/\nu$ ved bruk av fig. 11.9 i Elger et al. Dette gir $c_D^{(1)}$.
4. Iterasjon 1, steg 3: Bruk (likn. 1) til å finne en ny verdi for $V_0$. Vi kaller denne verdien $V_0^{(1)}$.
5. Iterasjon 2, steg 1: Den nye verdien av $V_0$ brukes til å oppdatere Reynoldstallet, $Re^{(2)} = V_0^{(1)} d/\nu$.
6. Iterasjon 2, steg 2: Les av $c_D$ for det oppdaterte Reynoldstallet, $Re^{(2)} = V_0^{(1)} d/\nu$. Dette gir $c_D^{(2)}$.
7. Iterasjon 2, steg 3: Bruk (likn.1) til å finne en ny verdi for $V_0$, dvs. bruk (likn. 1) til å finne $V_0^{(2)}$ fra $c_D^{(2)}$.
8. Sammenlikn $V_0^{(1)}$ med $V_0^{(2)}$. Dersom hastigheten endrer seg lite mellom iterasjon 1 og 2 kan vi stoppe iterasjonsprosessen og sette $V_0 = V_0^{(2)}$, mens hvis endringen er stor utfører vi en tredje iterasjon der vi gjentar steg 5, 6 og 7 over. $V_0$ bør endre seg mindre og mindre ved gjentatte iterasjoner, og i dette tilfellet sier vi at løsningen konvergerer.

**Oppgave 4 – Dimensjonsanalyse og skalering: Drenering fra liten og stor tank**

Høyden, h(t), til en væske som drenerer fra et hull i bunnen av en sylindisk tank er en funksjon av tiden, t, den initielle væskehøyden, H, hulldiameteren, d, tankens diameter, D, gravitasjonskonstanten, g, og den kinematiske viskositeten, ν. Dermed kan syv fysiske variabler (h(t), t, H, d, D, g, ν), som inneholder to basisvariable (lengde og tid), bli skrevet som fem dimensjonsløse parametre:

- høydeforholdet, h/H
- dimensjonsløs tid, $t \cdot \left(\frac{g}{H}\right)^{1/2}$
- forholdet mellom initiell høyde og tankdiameter, H/D
- dimensjonsløs hulldiameter, d/D
- Reynoldstall, Re = $d \cdot (gH)^{\frac{1}{2}}/\nu$

Oppgave a) **Forklar** ved å utføre laben gå til Similarity & Scaling > Virtual Labs > Flow from a Tank > Effect of Reynolds Number (Pg. 558) **hvordan man kan se at løsningen, h(t)/H, er uavhengig av Re for høye Re og hvorfor dette er tilfelle (1/2 poeng).** For figur gå til Multimedia Fluid Mechanics online (du må være på NMBU-nettet) > Similarity & Scaling > Virual Labs > Flow from a Tank > Introduction (Pg. 555).

Oppgave b) Gå til Multimedia Fluid Mechanics online (du må være på NMBU-nettet) > Similarity & Scaling > Virual Labs > Flow from a Tank > Take Measurements (Pg. 557) og utfør den virtuelle laben. Legg et bilde av plottet ditt ved besvarelsen din, både for fysisk høyde, h, mot fysisk tid, t, og for høydeforholdet, h/H, mot dimensjonsløs tid, $t \cdot \left(\frac{g}{H}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Fra den virtuelle laben ser du at i starten av tømmingen (når h/H≈1) avtar h/H raskere for den store tanken enn for den lille, men at datapunktene for h/H for stor og liten tank nærmer seg hverandre når væskenivåene går mot null, h/H ≈0.

**Forklar hvorfor datapunktene for de to målingene sammenfaller i det siste tilfellet.** (**1/2 poeng).**
Hvorfor avtar h/H raskere for den store tanken enn for den lille i starten av tømmingen? (frivillig, gir ingen poeng).

Oppgave c) Bruk Buckingham-Π – teoremet (kap. 8 i Elger EFM) til å komme frem til de fem dimensjonsløse parameterne over (frivillig, gir ingen poeng)

Løsning a): Ved å gå til Similarity & Scaling > Virtual Labs > Flow from a Tank > Effect of Reynolds Number (Pg. 558) og plotte h(t)/H mot dimensjonsløs tid, kan man se at løsningen, dvs. h(t)/H, blir uavhengig av viskositetet når viskositeten går mot null (h/H-kurvene blir tettere og tettere). Siden en viskositet som går mot null er ekvivalent med at Re går mot uendelig, kan vi konkludere med at løsningen er uavhengig av Re når Re går mot uendelig.

Forklaringen på at løsningen blir uavhengig av Re når Re går mot uendelig er at tykkelsen til det viskøse grensesjiktet går mot null i dette tilfellet, slik at strømningen blir friksjonsløs.

Løsning b) Målingene sammenfaller fordi vi har dynamisk similaritet, der h/H kun avhenger av similaritetsvariabelen $t \cdot \left(\frac{g}{H}\right)^{\frac{1}{2}}$. Ekstra: h/H avtar fortere for den store tanken enn for den lille fordi Re er høyere for den store tanken, altså avhenger løsningen også av Re tidlig i tømmingen (hvis viskositeten i de to målingene er den samme er Re for stor tank 2.8 ganger høyere enn for liten tank).