11 – Energilikningen 1

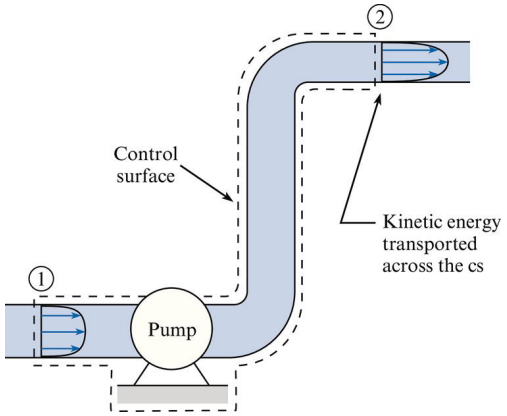
TPS200 – Fluidmekanikk 1: Innføring

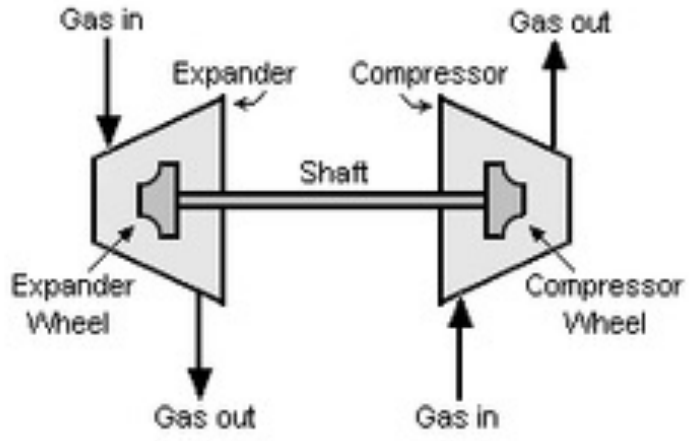
03-03-2021 – Vegard Nilsen, Postdoktor

Energilikningen 1 - Anvendelser

TPS200 – Fluidmekanikk 1: Innføring

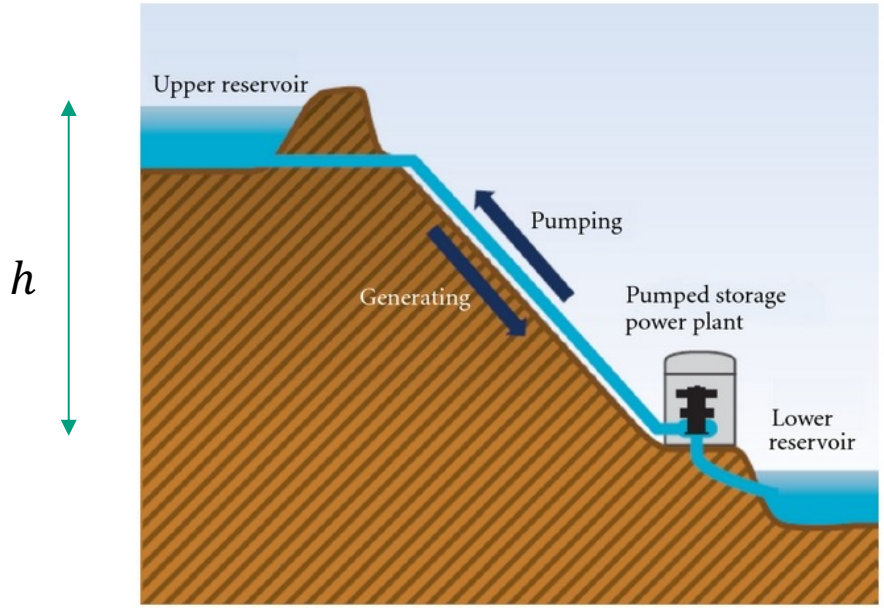
Dato: 3-3-2022





Turbomaskin

- Finne hvilken varme $\dot{Q}$ vi må tilføre for å drive en turbomaskin med effekt $\dot{W}$
- Finne varmen som utvikles i en forbrenningsmotor
- Finne hvilken effekt vi kan forvente av et vannkraftverk med fallhøyde h?

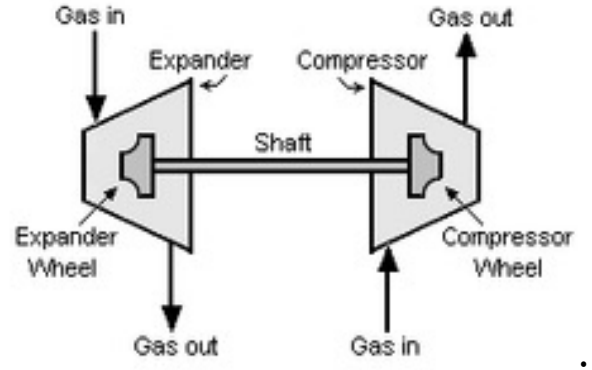


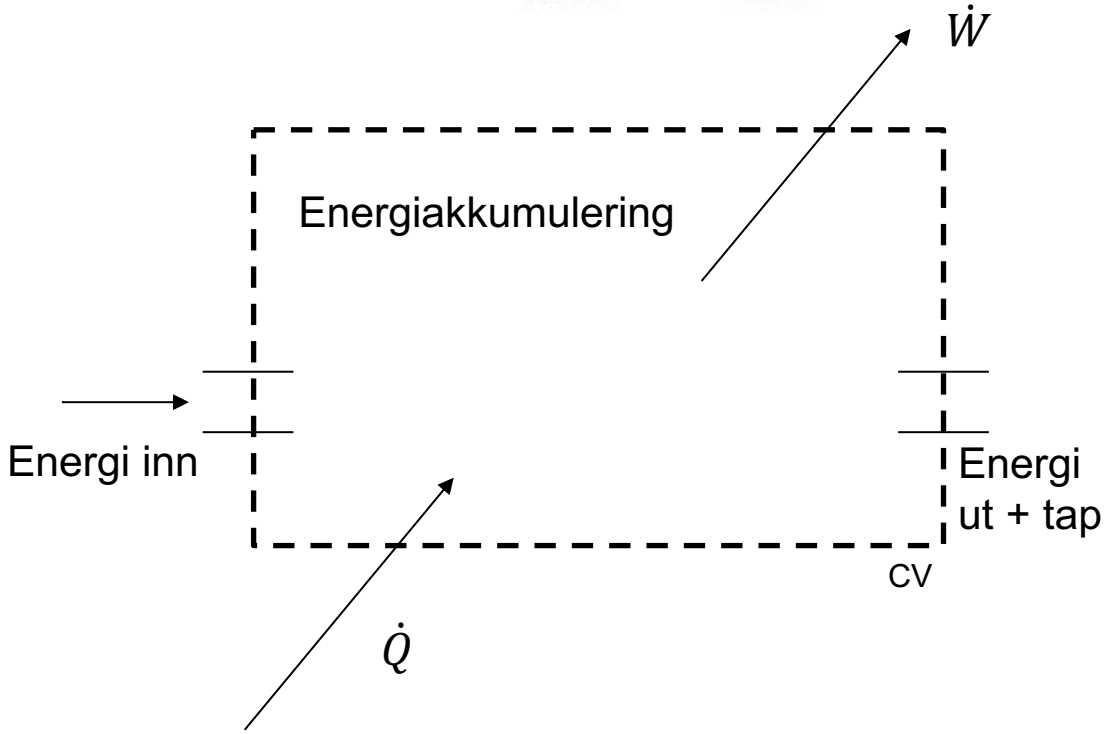
Vannkraftverk

Bilder fra Creative Commons

Energilikningen er en formulering av termodynamikkens første lov for strømmende (åpne) systemer

- Termodynamikkens første lov:
  - Varme $\dot{Q}$ tilført kontrollvolumet (CV) minus arbeid $\dot{W}$ utført av kontrollvolumet er lik akkumulering av energi i CV pluss energistrømmer inn i kontrollvolumet minus energistrømmer ut av kontrollvolumet minus friksjonstap

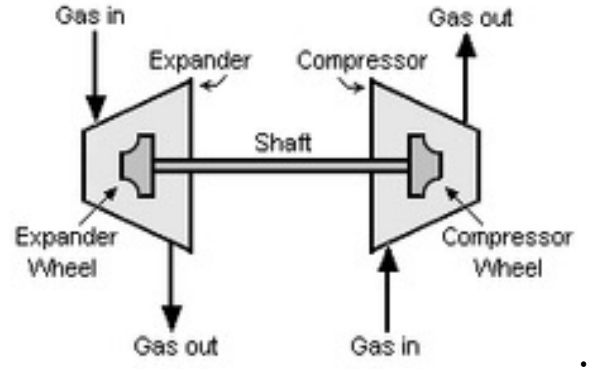


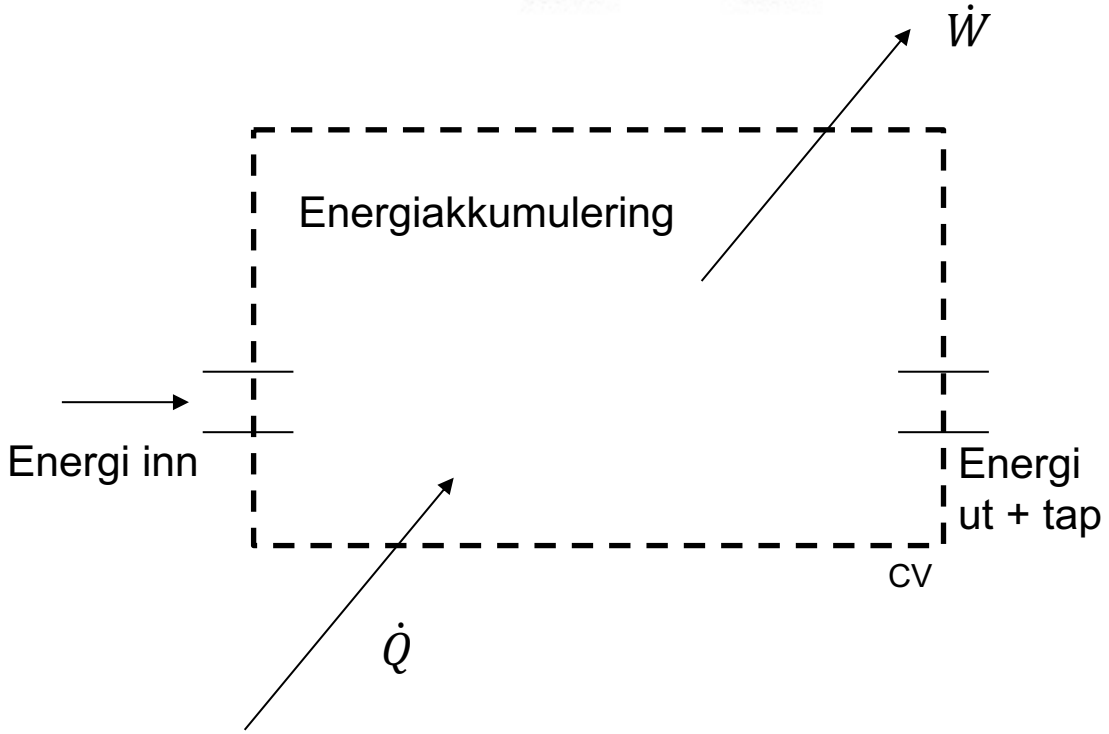


Bilder fra Creative Commons

Energilikningen er en formulering av termodynamikkens første lov for strømmende (åpne) systemer

- Termodynamikkens første lov/energibevaring:
  - Varme $\dot{Q}$ tilført kontrollvolumet (CV) minus arbeid $\dot{W}$ utført av kontrollvolumet er lik akkumulering av energi (e) i CV pluss energistrømmer inn i kontrollvolumet minus energistrømmer ut av kontrollvolumet minus friksjonstap

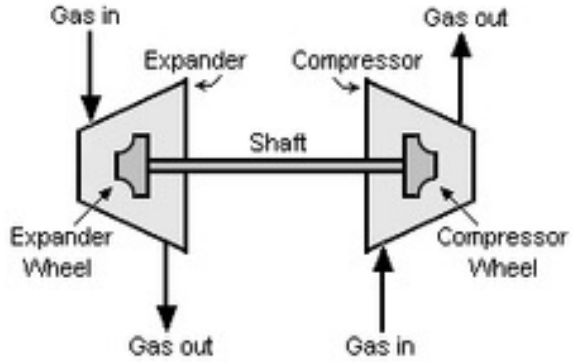




Bilder fra Creative Commons

Energilikningen er en formulering av termodynamikkens første lov for strømmende (åpne) systemer

- Termodynamikkens første lov/energibevaring:



$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{cv} e\rho \, dV + \int_{cs} e\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}$$

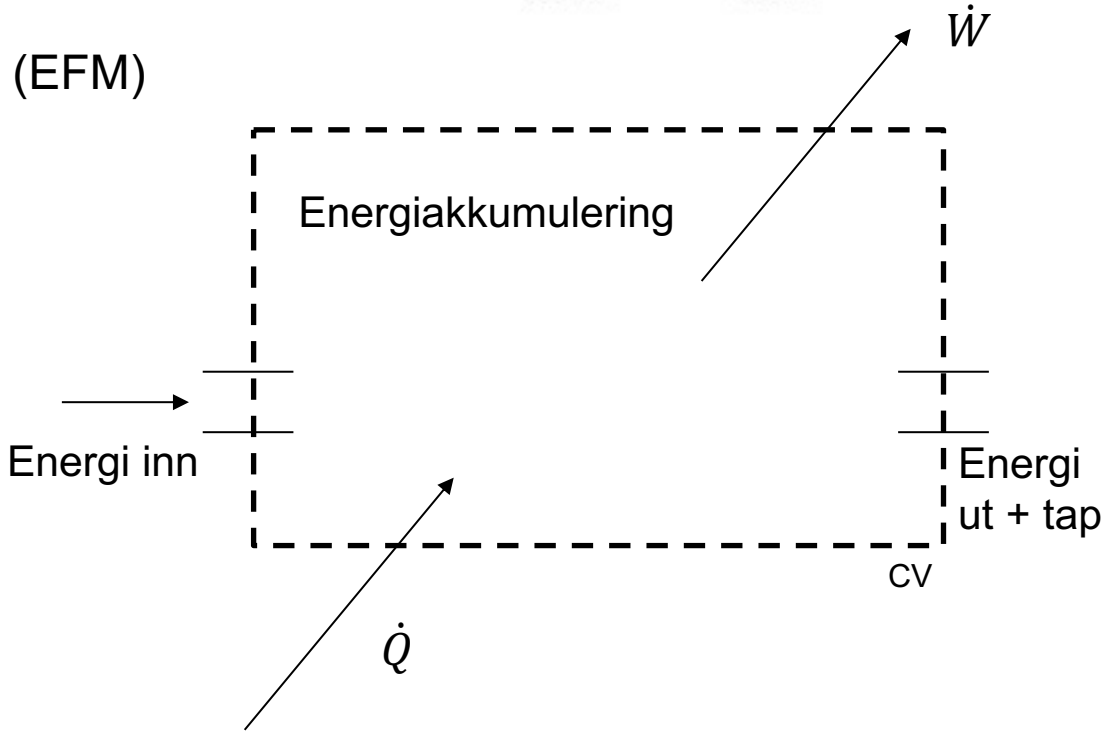
Likn. 7.6 (EFM)

Varmetransport per tidsenhet inn i kontrollvolumet

Arbeid utført av kontrollvolumet på omgivelsene per tidsenhet

Endring i energi i kontrollvolumet per tidsenhet

Transport av energi med massestrøm ut av kontrollvolumet gjennom kontrollflatene



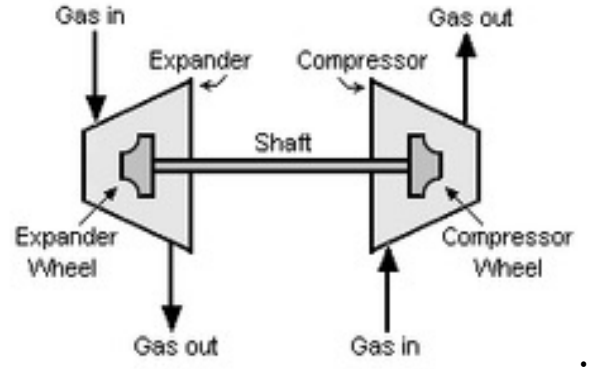
Bilder fra Creative Commons

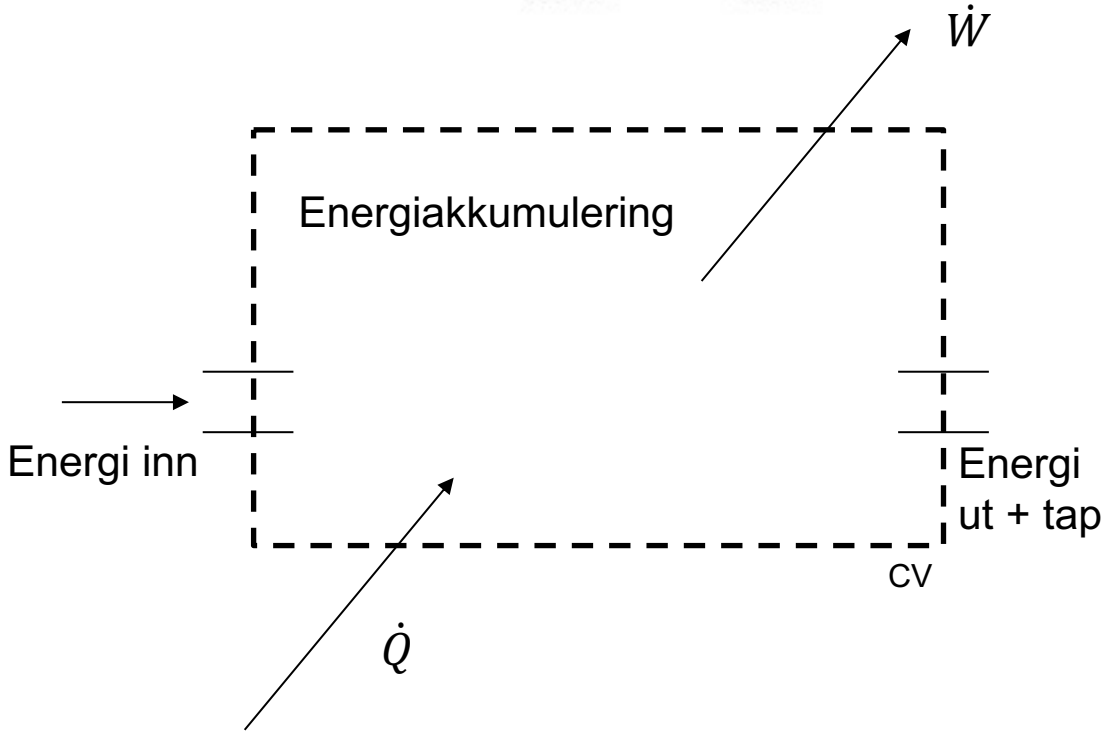
Energilikningen er en formulering av termodynamikkens første lov for strømmende (åpne) systemer

- Termodynamikkens første lov/energibevaring:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{cv} e\rho \, dV + \int_{cs} e\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}$$

Varme | Arbeid | Energiakkumulering | Energifluks



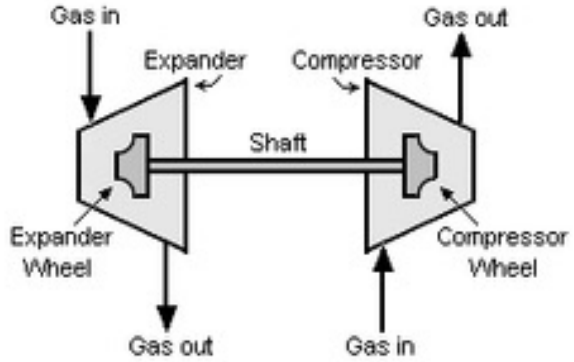


Bilder fra Creative Commons

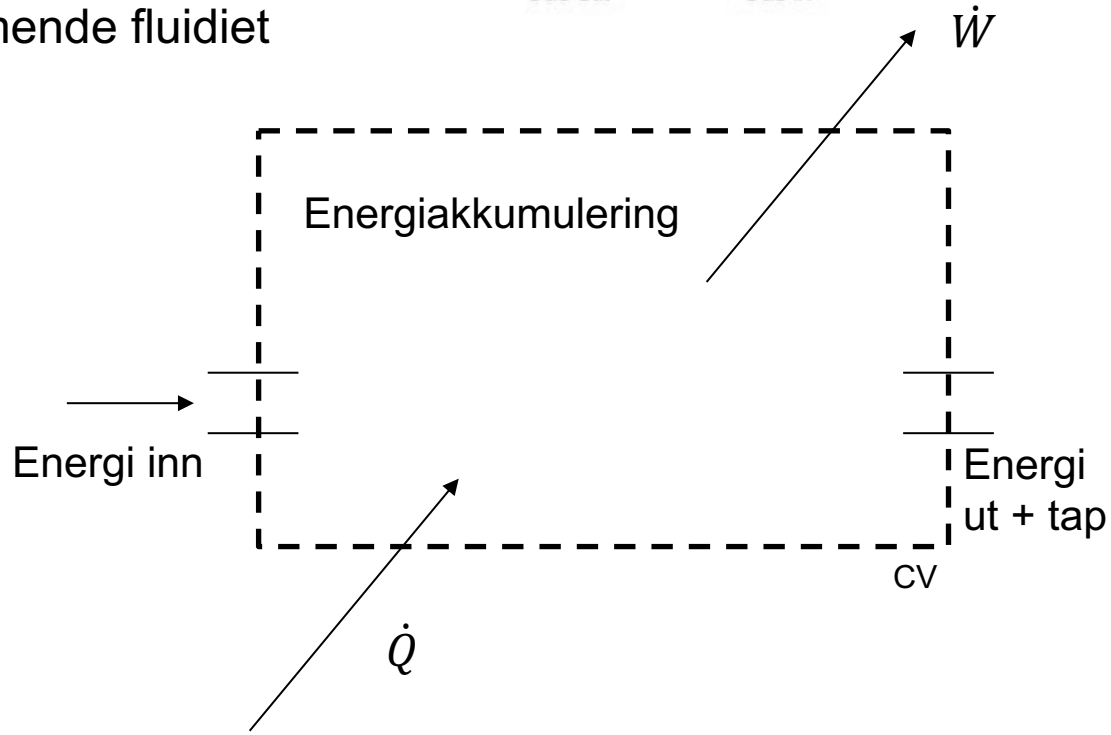
Energilikningen er en formulering av termodynamikkens første lov for strømmende (åpne) systemer

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{cv} e\rho \, dV + \int_{cs} e\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}$$

Varme | Arbeid | Energiakkumulering | Energifluks



- Energien e er en energi per masseenhet til det strømmende fluidiet
- Kalles «spesifikk energi»
- Vi har tre typer spesifikk energi. Hvilke?



Bilder fra Creative Commons

Energilikningen er en formulering av termodynamikkens første lov for strømmende (åpne) systemer

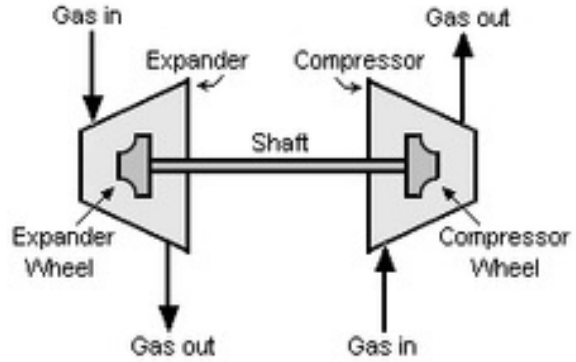
$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{cv} e\rho \, dV + \int_{cs} e\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}$$

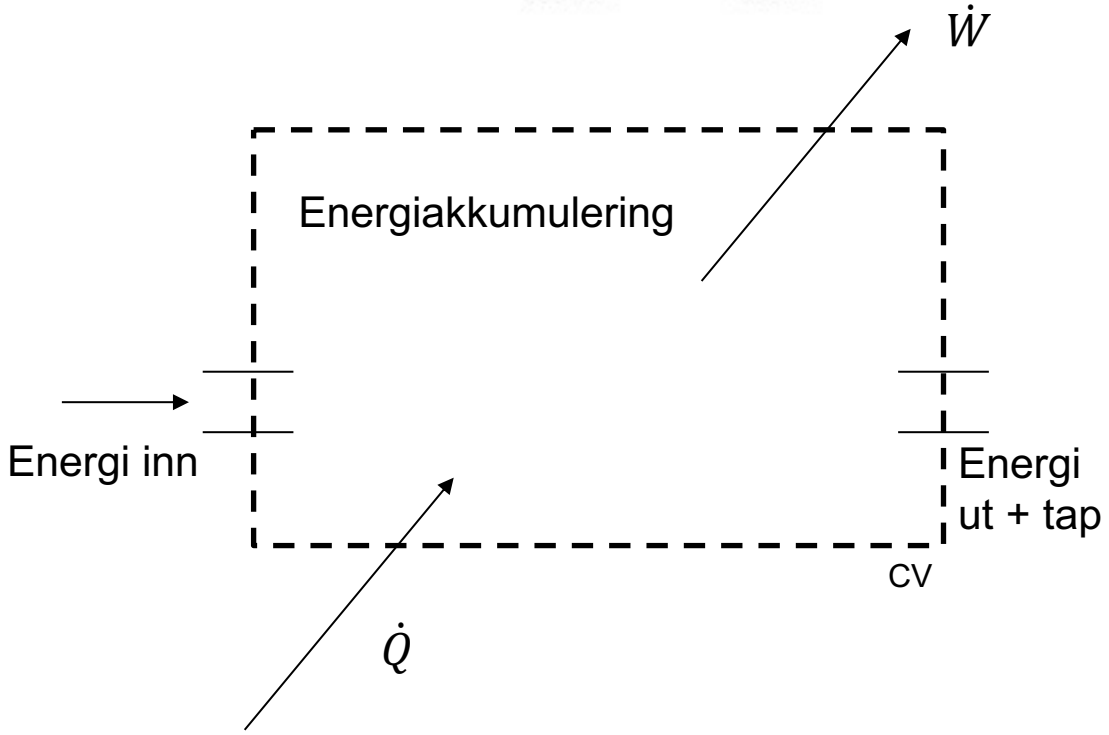
Varme | Arbeid | Energiakkumulering | Energifluks

Spesifikk energien består av

$$e = e_k + e_p + u$$

- e_k – kinetisk energi
- e_p – potensiell energi (her: tyngde)
- u – indre energi (til molekylene, et mål på hvor mye molekylene vibrerer)
- $u = h - RT$, der h er entalpi, T temperatur og R den ideele gasskonstanten
- e kalles spesifikk energi (per masseenhet)



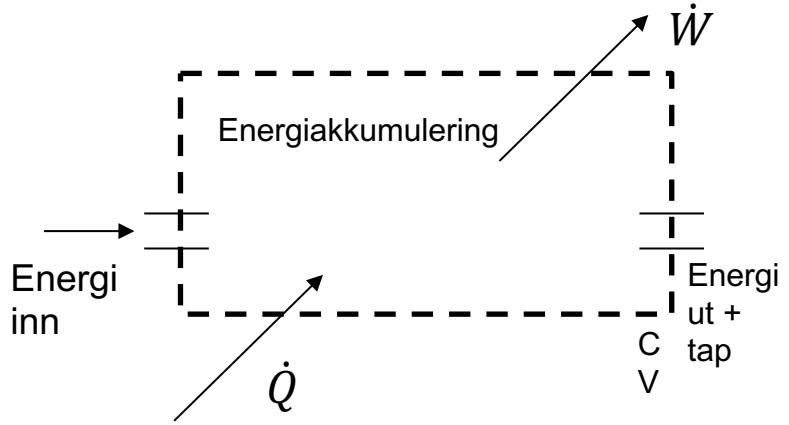


Bilder fra Creative Commons

Energilikningen er en formulering av termodynamikkens første lov for strømmende (åpne) systemer

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{cv} e\rho \, dV + \int_{cs} e\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}$$

Varme | Arbeid | Energiakkumulering | Energifluks



Spesifikk energien består av

$$e = e_k + e_p + u$$

- e_k – kinetisk energi
- e_p – potensiell energi (her: tyngde)
- u – indre energi (til molekylene, et mål på hvor mye molekylene vibrerer)
- $u = h - p/\rho$, der h er entalpi («varme», p er trykk og ρ egenvekter til fluidet)
- e kalles spesifikk energi (per masseenhet)

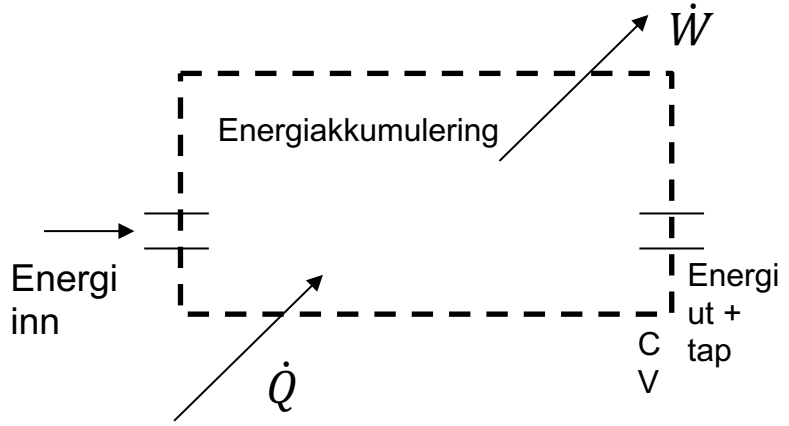
$$e_k = \frac{mV^2/2}{m} = \frac{V^2}{2}$$

$$e_p = \frac{mgz}{m} = gz$$

Energilikningen er en formulering av termodynamikkens første lov for strømmende (åpne) systemer

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{cv} e\rho \, dV + \int_{cs} e\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}$$

Varme | Arbeid | Energiakkumulering | Energifluks



Spesifikk energien består av

$$e = e_k + e_p + u$$

- e_k – kinetisk energi
- e_p – potensiell energi (her: tyngde)
- u – indre energi (til molekylene, et mål på hvor mye molekylene vibrerer)
- $u = h - p/\rho$, der h er entalpi («varme», p er trykk og ρ egenvekter til fluidet)
- e kalles spesifikk energi (per masseenhet)

$$e_k = \frac{mV^2/2}{m} = \frac{V^2}{2}, \qquad e_p = \frac{mgz}{m} = gz$$

- Innsatt i (den generelle) energilikningen:

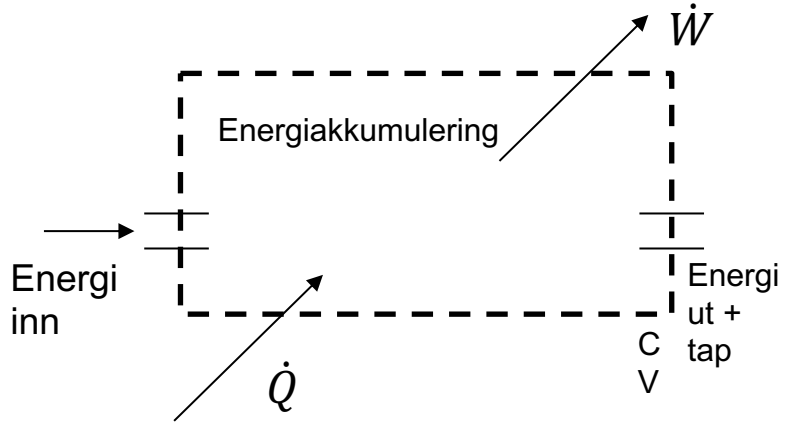
$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{cv} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho \, dV + \int_{cs} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}$$

Likn. 7.10 (EFM)

Hvilken enhet har spesifikk energi e?

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{cv} e\rho \, dV + \int_{cs} e\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}$$

Varme | Arbeid | Energiakkumulering | Energifluks



Spesifikk energien består av

$$e = e_k + e_p + u$$

- e_k – kinetisk energi
- e_p – potensiell energi (her: tyngde)
- u – indre energi (til molekylene, et mål på hvor mye molekylene vibrerer)
- e kalles spesifikk energi (per masseenhet)

$$e_k = \frac{mV^2/2}{m} = \frac{V^2}{2}, \qquad e_p = \frac{mgz}{m} = gz$$

- Innsatt i (den generelle) energilikningen:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{cv} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho \, dV + \int_{cs} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}$$

Hva er enheten til e?

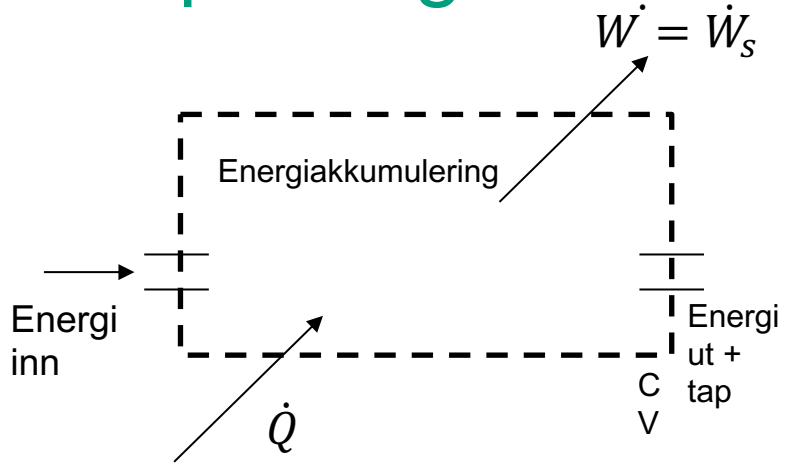
Bilder fra Creative Commons

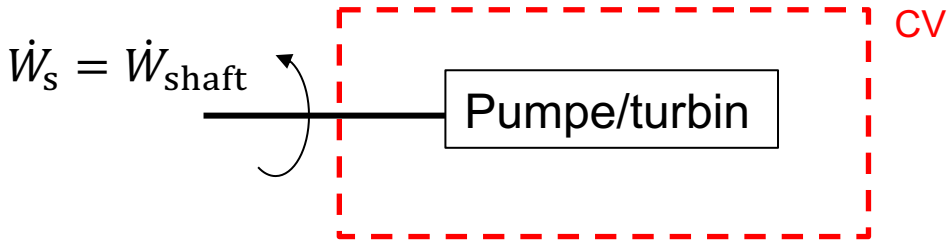
Kontrollvolumet kan utføre ulike typer arbeid på omgivelsene

Arbeid utført av kontrollvolum på omgivelsene har tre bidrag

- Arbeid utført av trykkrefter, $\dot{W}_{\mathrm{pr}}$
- Arbeid utført av viskøse skjærkrefter, $\dot{W}_{\mathrm{v}}$
- Arbeid utført av maskiner i strømningen (pumper/turbiner), $\dot{W}_{\mathrm{s}}$

• Altså: $\dot{W} = \dot{W}_{pr} + \dot{W}_{v} + \dot{W}_{s}$





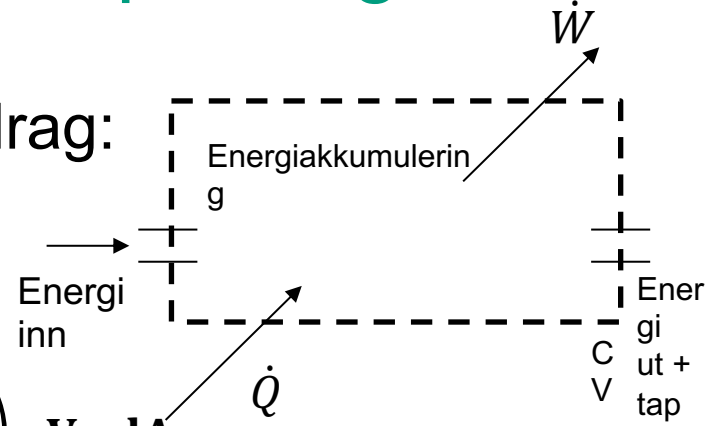
$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{\mathrm{cv}} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho\, dV + \int_{\mathrm{cs}} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$$

Varme | Arbeid | Energiakkumulering | Energifluks

Kontrollvolumet kan utføre ulike typer arbeid på omgivelsene

Arbeid utført av kontrollvolum på omgivelsene har tre bidrag:

- $\dot{W} = \dot{W}_{pr} + \dot{W}_v + \dot{W}_s =$ trykkarbeid + viskøst arbeid + turbinarbeid



$$\dot{Q} - \underbrace{\dot{W}_s - \dot{W}_v - \dot{W}_{pr}}_{\text{Arbeid}} = \frac{d}{dt}\int_{cv}\left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho\, dV + \int_{cs}\left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$$

Varme

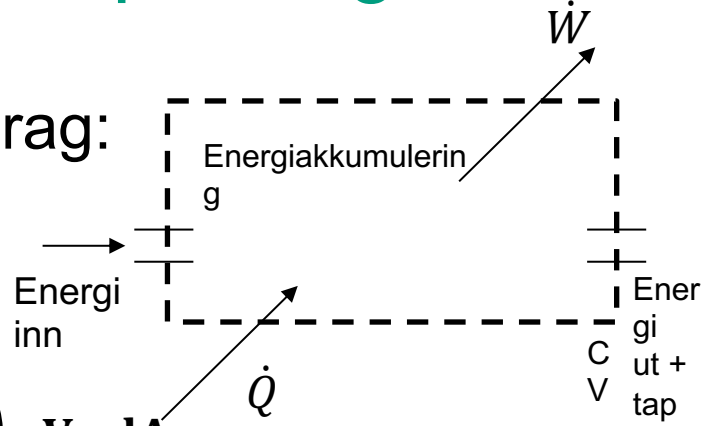
Energiakkumulering

Energifluks

Kontrollvolumet kan utføre ulike typer arbeid på omgivelsene

Arbeid utført av kontrollvolum på omgivelsene har tre bidrag:

- $\dot{W} = \dot{W}_{pr} + \dot{W}_v + \dot{W}_s =$ trykkarbeid + viskøst arbeid + turbinarbeid



$$\dot{Q} - \underbrace{\dot{W}_s - \dot{W}_v - \dot{W}_{pr}}_{\text{Arbeid}} = \frac{d}{dt}\int_{cv}\left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho\, dV + \int_{cs}\left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$$

Varme — Arbeid — Energiakkumulering — Energifluks

- Trykkarbeidet kan innlemmes i fluksleddet på høyre side, og indre energi kan skrives som $u = h - p/\rho$:

- $\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{d}{dt}\int_{cv}\left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho\, dV + \int_{cs}\left(\frac{V^2}{2} + gz + h\right)\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$ Likn. 7.20 (EFM)

Detaljer her...

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho\, dV + \int_{\text{cs}} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$$

$$\dot{W} = \dot{W}_{\text{pr}} + \dot{W}_{\text{s}} = \dot{W}_{\text{pr}} + \dot{W}_{\text{t}} - \dot{W}_{\text{pu}}$$

$$\dot{W}_{\text{pr}} = \int_{\text{cs}} p\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$$

1. Bruk transportteoremet (RTT) med termodynamikkens 1. lov (TD1)
2. Skriv energi som summen av indre energi, kinetisk energi og potensiell energi
3. Del opp arbeidet i TD1 i ulike typer arbeid
4. Finn et uttrykk for arbeidet til trykkreftene i kontrollflatene
5. Bruk 1 – 4 og ordne likningen
6. Anta stasjonær strømning + ett innløp og ett utløp
7. Anta $p/\rho + gz$ og temperatur konstant over kontrollflaten
8. Definer korreksjonsfaktoren α
9. Bruk α og gjør en del algebra
10. Definer energihøyde for pumpe (h_p) og turbin (h_t)
11. Innfør tapshøyden h_L og vi er ferdige

- Kombiner og få

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \int_{\text{cs}} p\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA} = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho\, dV + \int_{\text{cs}} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$$

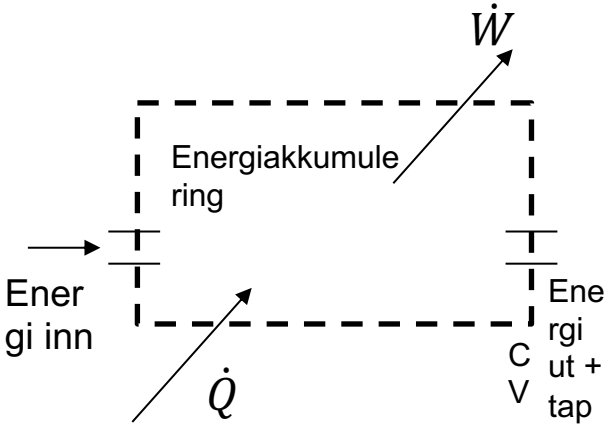
$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho\, dV + \int_{\text{cs}} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA} + \int_{\text{CS}} p\mathbf{V}\cdot d\mathbf{A}$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho\, dV + \int_{\text{cs}} \left(\frac{V^2}{2} + gz + \underbrace{u + \frac{p}{\rho}}_{h}\right)\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$$

Fluksleddene kan skrives på en enklere måte

Den generelle energilikningen:

- $\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho\, dV + \boxed{\int_{\text{cs}} \left(\frac{V^2}{2} + gz + h\right)\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}}$



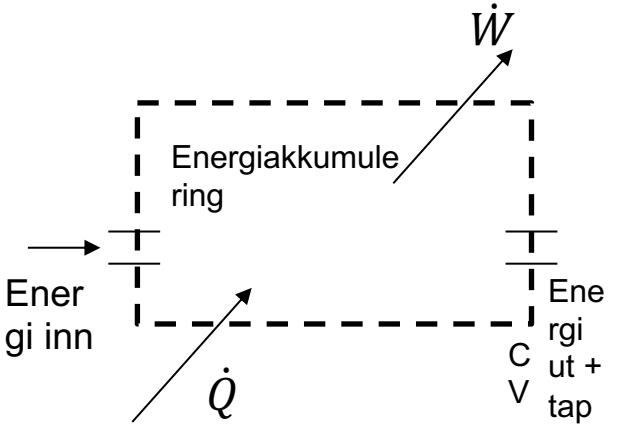
- Forenkling av fluksleddet:

$$\int_{\text{cs}} \left(\frac{V^2}{2} + gz + h\right)\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA} = \sum_{CS}\left(h + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{ut} \dot{m}_{ut} - \sum_{CS}\left(h + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{inn} \dot{m}_{inn}$$

Fluksleddene kan skrives på en enklere måte

Den generelle energilikningen:

- $\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{d}{dt}\int_{cv}\left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho\, dV + \boxed{\int_{cs}\left(\frac{V^2}{2} + gz + h\right)\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}}$



- Forenkling av fluksleddet:

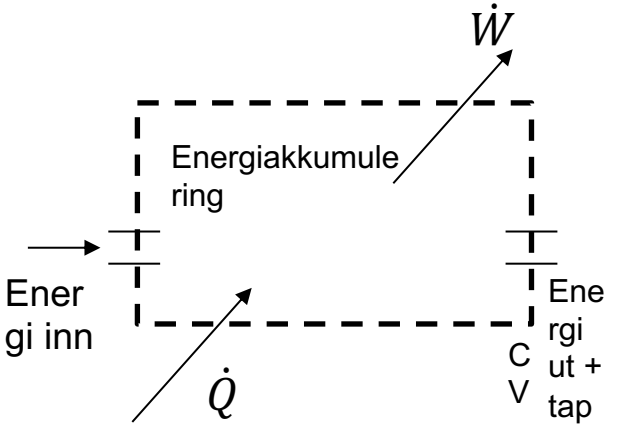
$$\int_{cs}\left(\frac{V^2}{2} + gz + h\right)\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA} = \sum_{CS}\left(h + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{ut}\dot{m}_{ut} - \sum_{CS}\left(h + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{inn}\dot{m}_{inn}$$

Hvilke antakelser har vi gjort for å forenkle fluksleddet?

Fluksleddene kan skrives på en enklere måte

Den generelle energilikningen:

- $\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_v = \frac{d}{dt}\int_{cv}\left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho\, dV + \int_{cs}\left(\frac{V^2}{2} + gz + h\right)\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$



- Forenkling av fluksleddet:

$$\int_{cs}\left(\frac{V^2}{2} + gz + h\right)\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA} = \sum_{CS}\left(h + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{ut}\dot{m}_{ut} - \sum_{CS}\left(h + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{inn}\dot{m}_{inn}$$

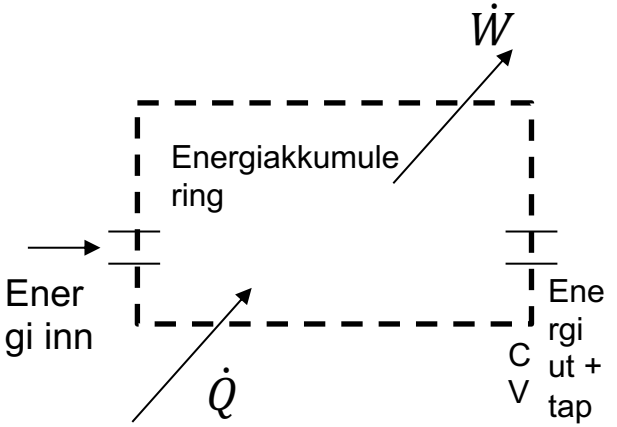
Hvilke antakelser har vi gjort for å forenkle fluksleddet?

1. Konstant tetthet
2. Hastigheten V varierer ikke over innløp og utløp
3. Hastigheten V står normal på innløp/utløp

Viskøst arbeid er ofte lik null

Den generelle energilikningen:

- $\dot{Q} - \dot{W}_s \underbrace{- \dot{W}_v}_{\text{Ofte lik 0}} = \frac{d}{dt}\int_{cv}\left(\frac{V^2}{2} + gz + u\right)\rho\, dV + \int_{cs}\left(\frac{V^2}{2} + gz + h\right)\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$



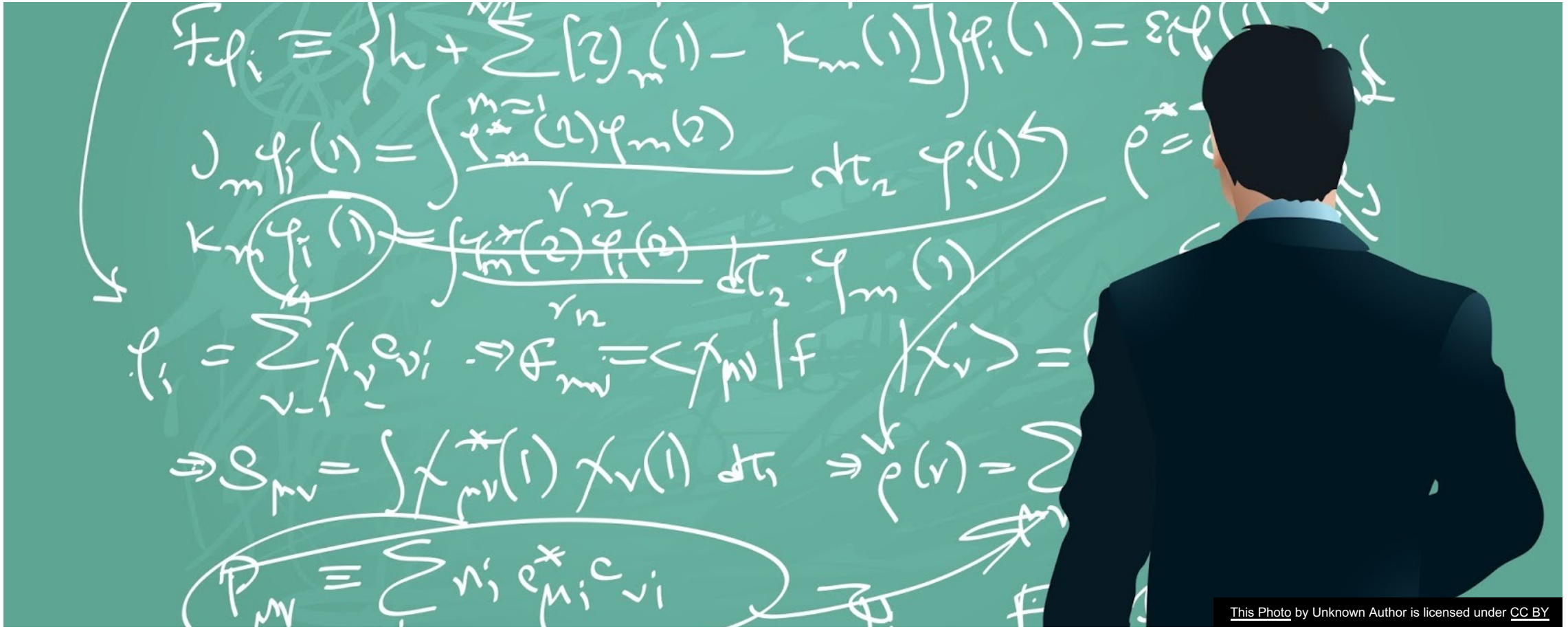
- Forenkling av fluksleddet:

$$\int_{cs}\left(\frac{V^2}{2} + gz + h\right)\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA} = \sum_{CS}\left(h + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{ut}\dot{m}_{ut} - \sum_{CS}\left(h + \frac{1}{2}V^2 + gz\right)_{inn}\dot{m}_{inn}$$

Hvilke antakelser har vi gjort for å forenkle fluksleddet?

1. Konstant tetthet
2. Hastigheten V varierer ikke over innløp og utløp
3. Hastigheten V står normal på innløp/utløp

Etter en del matematikk (Likn. 7.22 til 7.29)



Resultatet: Energilikningen slik vi skal bruke den (kontrollvolum med ett innløp og ett utløp)

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

Likn. 7.29 EFM

Energihøyde ved innløp til kontrollvolumet

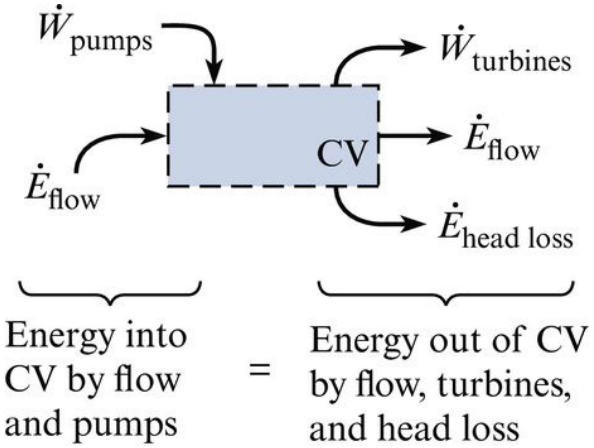
Energihøyde tilført kontrollvolumet av pumpe

Energihøyde ved utløp av kontrollvolumet

Energihøyde tatt ut av kontrollvolumet av turbin

Energihøyde tapt til termisk energi pga. friksjon (viskøse tap)

- α er en faktor som korrigerer for at hastigheten ikke er konstant over innløp og utløp
- Likner på Bernoullis, men med noen ekstra ledd



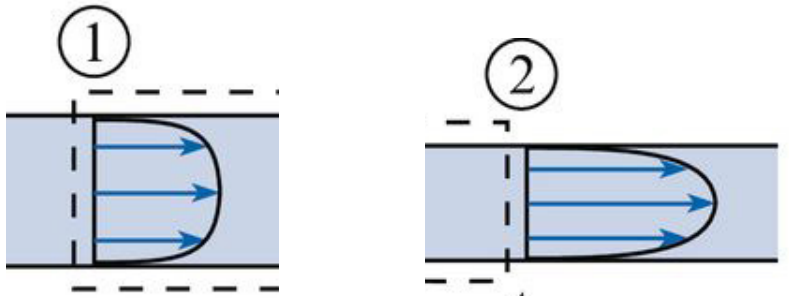
8. Definer korreksjonsfaktoren α

- Transport av kinetisk energi gjennom kontrollflatene

$$\dot{E}_{\mathrm{k}} = \int_A \frac{\rho V^3}{2} dA$$

- Det vil være praktisk å kunne uttrykke $\dot{E}_{\mathrm{k}}$ vha. middelhastigheten $\bar{V}$
- For å få til det, innfører man en korreksjonsfaktor α som korrigerer for den feilen vi gjør når vi erstatter V med middelhastighten $\bar{V}$ i uttrykket for $\dot{E}_{\mathrm{k}}$

1. Bruk transportteoremet (RTT) med termodynamikkens 1. lov (TD1)
2. Skriv energi som summen av indre energi, kinetisk energi og potensiell energi
3. Del opp arbeidet i TD1 i ulike typer arbeid
4. Finn et uttrykk for arbeidet til trykkreftene i kontrollflatene
5. Bruk 1 – 4 og ordne likningen
6. Anta stasjonær strømning + ett innløp og ett utløp
7. Anta $p/\rho + gz$ og temperatur konstant over kontrollflaten
8. Definer korreksjonsfaktoren α
9. Bruk α og gjør en del algebra
10. Definer energihøyde for pumpe (h_p) og turbin (h_t)
11. Innfør tapshøyden h_L og vi er ferdige



8. Definer korreksjonsfaktoren α

- Definisjonen av α: Vi har altså

$$\dot{E}_{\mathrm{k,rett}} = \int_A \frac{\rho V^3}{2} dA$$

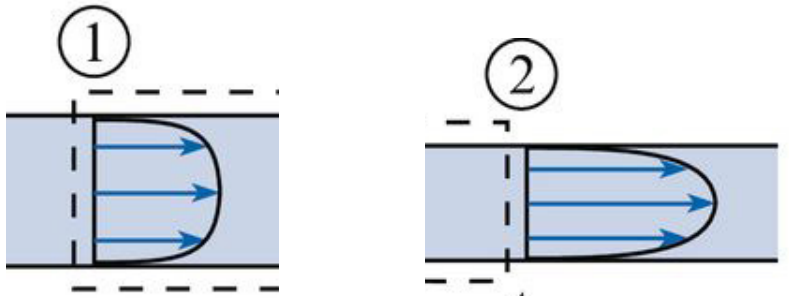
$$\dot{E}_{\mathrm{k,feil}} = \frac{\bar{V}^3}{2} \int_A \rho \, dA$$

- Bruker α til å korrigere:

$$\dot{E}_{\mathrm{k,rett}} = \alpha \dot{E}_{\mathrm{k,feil}}$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{\dot{E}_{\mathrm{k,rett}}}{\dot{E}_{\mathrm{k,feil}}} = \frac{\int_A \frac{\rho V^3}{2} dA}{\frac{\bar{V}^3}{2} \int_A \rho \, dA} = \frac{\int_A \rho V^3 dA}{\bar{V}^3 \int_A \rho \, dA}$$

1. Bruk transportteoremet (RTT) med termodynamikkens 1. lov (TD1)
2. Skriv energi som summen av indre energi, kinetisk energi og potensiell energi
3. Del opp arbeidet i TD1 i ulike typer arbeid
4. Finn et uttrykk for arbeidet til trykkreftene i kontrollflatene
5. Bruk 1 – 4 og ordne likningen
6. Anta stasjonær strømning + ett innløp og ett utløp
7. Anta $p/\rho + gz$ og temperatur konstant over kontrollflaten
8. Definer korreksjonsfaktoren α
9. Bruk α og gjør en del algebra
10. Definer energihøyde for pumpe (h_p) og turbin (h_t)
11. Innfør tapshøyden h_L og vi er ferdige



8. Definer korreksjonsfaktoren α

- Definisjonen av α

$$\alpha = \frac{\dot{E}_{\mathrm{k,rett}}}{\dot{E}_{\mathrm{k,feil}}} = \frac{\int_A \rho V^3 dA}{\bar{V}^3 \int_A \rho \, dA}$$

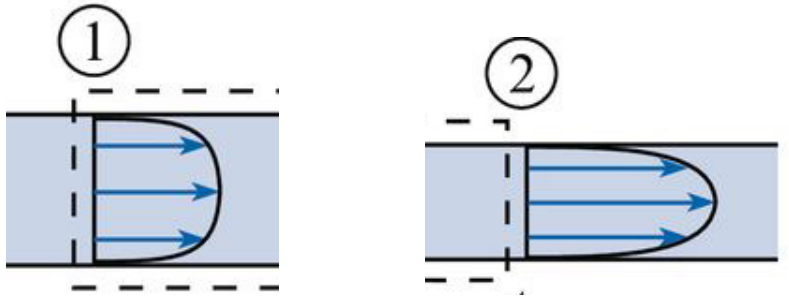
- Ved konstant tetthet:

$$\alpha = \frac{\dot{E}_{\mathrm{k,rett}}}{\dot{E}_{\mathrm{k,feil}}} = \frac{\int_A V^3 dA}{\bar{V}^3 \int_A dA} = \frac{\int_A V^3 dA}{\bar{V}^3 A}$$

- Vi får dermed følgende vanlige uttrykk for α

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{V}{\bar{V}} \right)^3 dA$$

1. Bruk transportteoremet (RTT) med termodynamikkens 1. lov (TD1)
2. Skriv energi som summen av indre energi, kinetisk energi og potensiell energi
3. Del opp arbeidet i TD1 i ulike typer arbeid
4. Finn et uttrykk for arbeidet til trykkreftene i kontrollflatene
5. Bruk 1 – 4 og ordne likningen
6. Anta stasjonær strømning + ett innløp og ett utløp
7. Anta $p/\rho + gz$ og temperatur konstant over kontrollflaten
8. Definer korreksjonsfaktoren α
9. Bruk α og gjør en del algebra
10. Definer energihøyde for pumpe (h_p) og turbin (h_t)
11. Innfør tapshøyden h_L og vi er ferdige



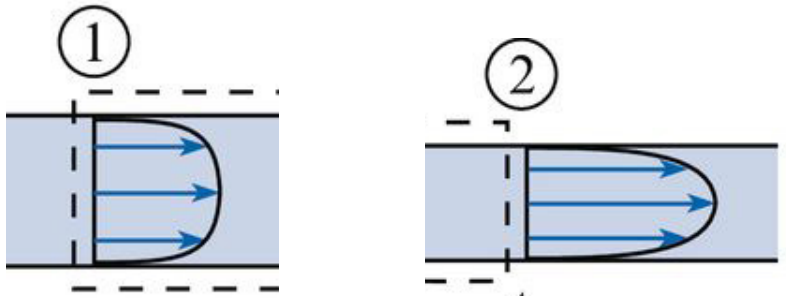
8. Definer korreksjonsfaktoren α

- Ved konstant tetthet har vi

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{V}{\overline{V}}\right)^3 dA$$

- For laminær rørstrømning er $\alpha = 2$ (EFM eksempel 7.1)
- For fullt utviklet turbulent rørstrømning er $\alpha \approx 1{,}05$
- For dyser og andre konvergerende strømningstverrsnitt, $\alpha \approx 1$
- Vi setter som regel $\alpha = 1$, men pass på hvis du er i nærheten av laminær strømning

1. Bruk transportteoremet (RTT) med termodynamikkens 1. lov (TD1)
2. Skriv energi som summen av indre energi, kinetisk energi og potensiell energi
3. Del opp arbeidet i TD1 i ulike typer arbeid
4. Finn et uttrykk for arbeidet til trykkreftene i kontrollflatene
5. Bruk 1 – 4 og ordne likningen
6. Anta stasjonær strømning + ett innløp og ett utløp
7. Anta $p/\rho + gz$ og temperatur konstant over kontrollflaten
8. Definer korreksjonsfaktoren α
9. Bruk α og gjør en del algebra
10. Definer energihøyde for pumpe (h_p) og turbin (h_t)
11. Innfør tapshøyden h_L og vi er ferdige



Energilikningen oppsummert

TABLE 7.1 Summary of the Energy Equation

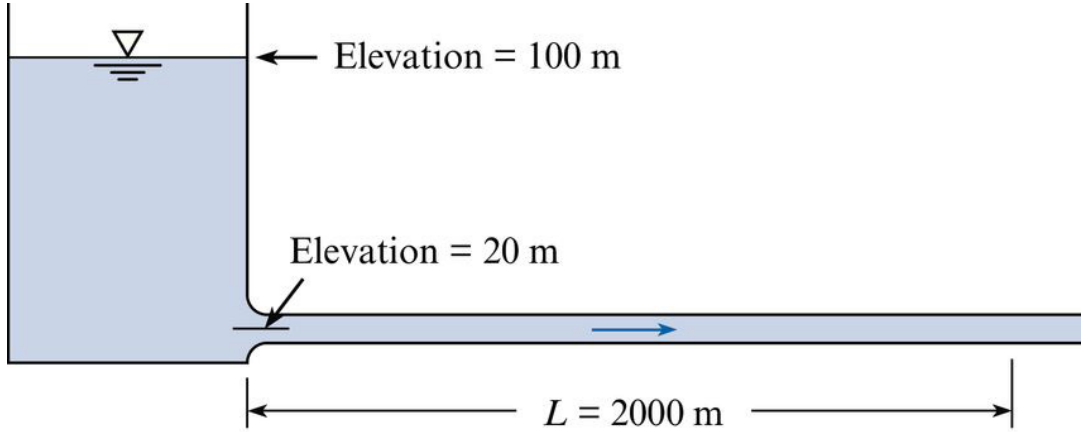
Description	Equation	Terms
The energy equation has only one form. Major assumptions: • Steady state; no energy accumulation in CV. • The CV has one inlet and one outlet. • Constant density flow. • All thermal energy terms (except for head loss) can be neglected. • Streamlines are straight and parallel at each section. • Temperature is constant across each section.	$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{\overline{V}_1^2}{2g} + z_1\right) + h_p =$ $\left(\frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{\overline{V}_2^2}{2g} + z_2\right) + h_t + h_L$ Eq. (7.29)	$\left(\frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{\overline{V}^2}{2g} + z\right) = \begin{pmatrix}\text{energy/weight transported} \\ \text{into or out of cv} \\ \text{by fluid flow}\end{pmatrix} = \text{total head}$ p/γ = pressure head at cs (m) $\alpha \frac{\overline{V}^2}{2g}$ = velocity head at cs (m) (α = kinetic energy (KE) correction factor at cs) ($\alpha \approx 1.0$ for turbulent flow) ($\alpha \approx 1.0$ for nozzles) ($\alpha \approx 2.0$ for full-developed laminar flow in round pipe) z = elevation head at cs (m) h_p = head added by a pump (m) h_t = head removed by a turbine (m) h_L = head loss (m) (to predict head loss, apply Eq. (10.45))

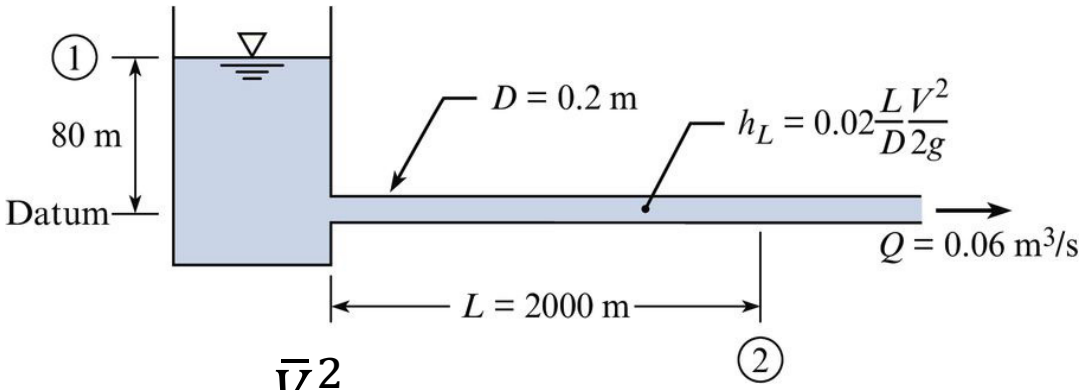
EFM Eksempel 7.2

- Tank med vann, tetthet $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$
- Tapshøyden i røret er gitt som

$$h_L = 0{,}02\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

- Opplysninger som vist i figur
- Hva er trykket i ledningen ved $L = 2000\ \mathrm{m}$?
- Anta $\alpha_2 = 1$





$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

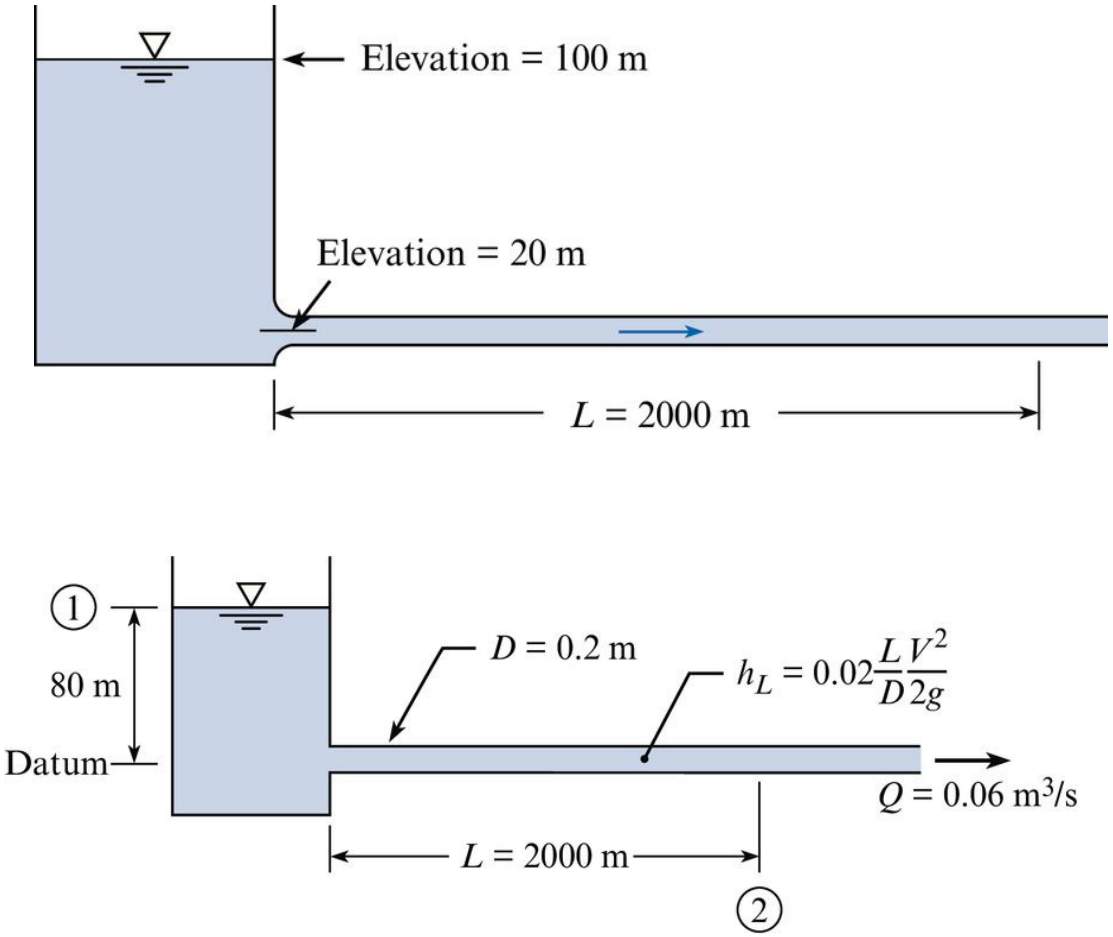
EFM Eksempel 7.2

- Hva er trykket i ledningen ved $L = 2000\ \mathrm{m}$?
- Energilikningen fra snitt 1 til snitt 2

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

- Fjerner ledd som ≈ 0; $\alpha_2 = 1$:

$$z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_L$$



EFM Eksempel 7.2

$$z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_L$$

- Setter inn tapshøyden og kaller middelhastigheten i røret $V (= \bar{V}_2)$

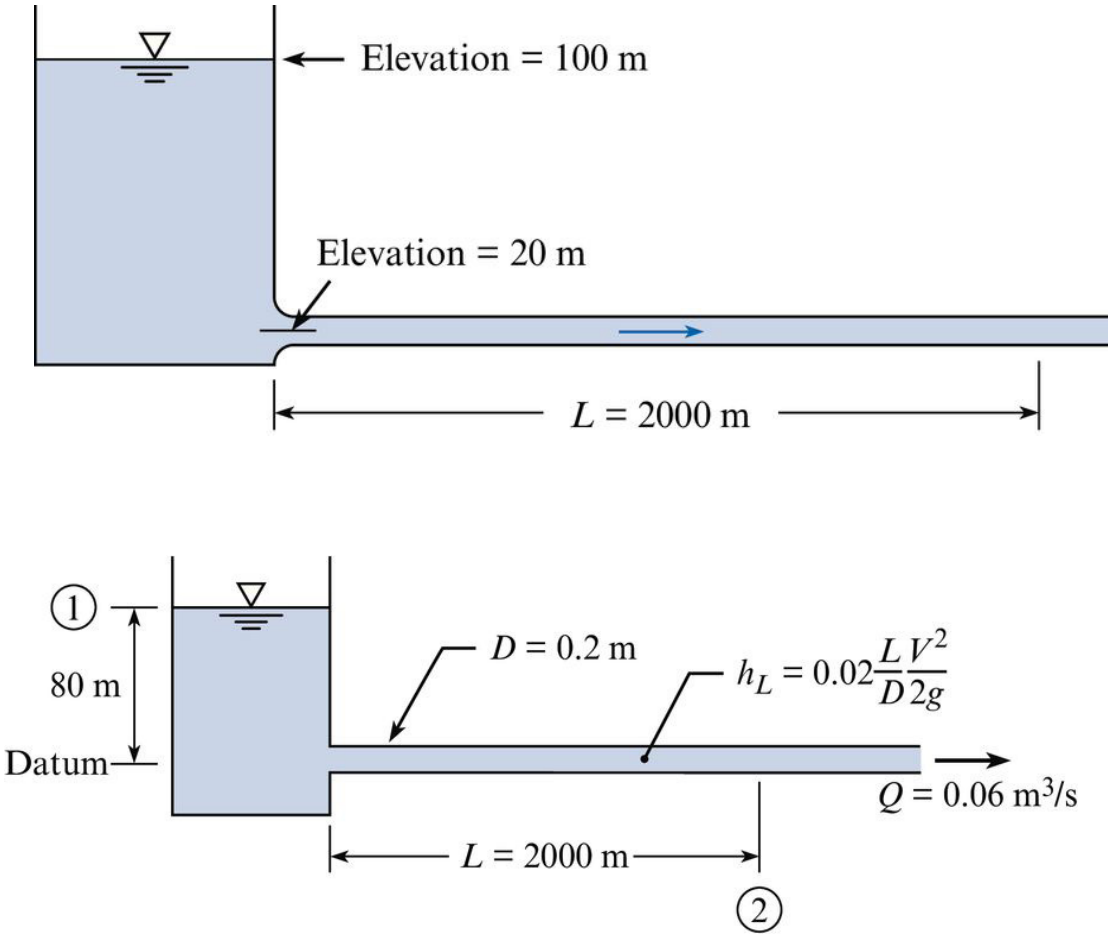
$$z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V^2}{2g} + 0.02\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

- Løser mhp. trykkhøyden

$$\frac{p_2}{\rho g} = z_1 - z_2 - \left(1 + 0.02\frac{L}{D}\right)\frac{V^2}{2g}$$

- Bruker kontinuitetslikningen

$$Q = AV = \text{konst.}$$



EFM Eksempel 7.2

$$\frac{p_2}{\rho g} = z_1 - z_2 - \left(1 + 0.02\frac{L}{D}\right)\frac{V^2}{2g}$$

$$Q = AV = \text{konst.}$$

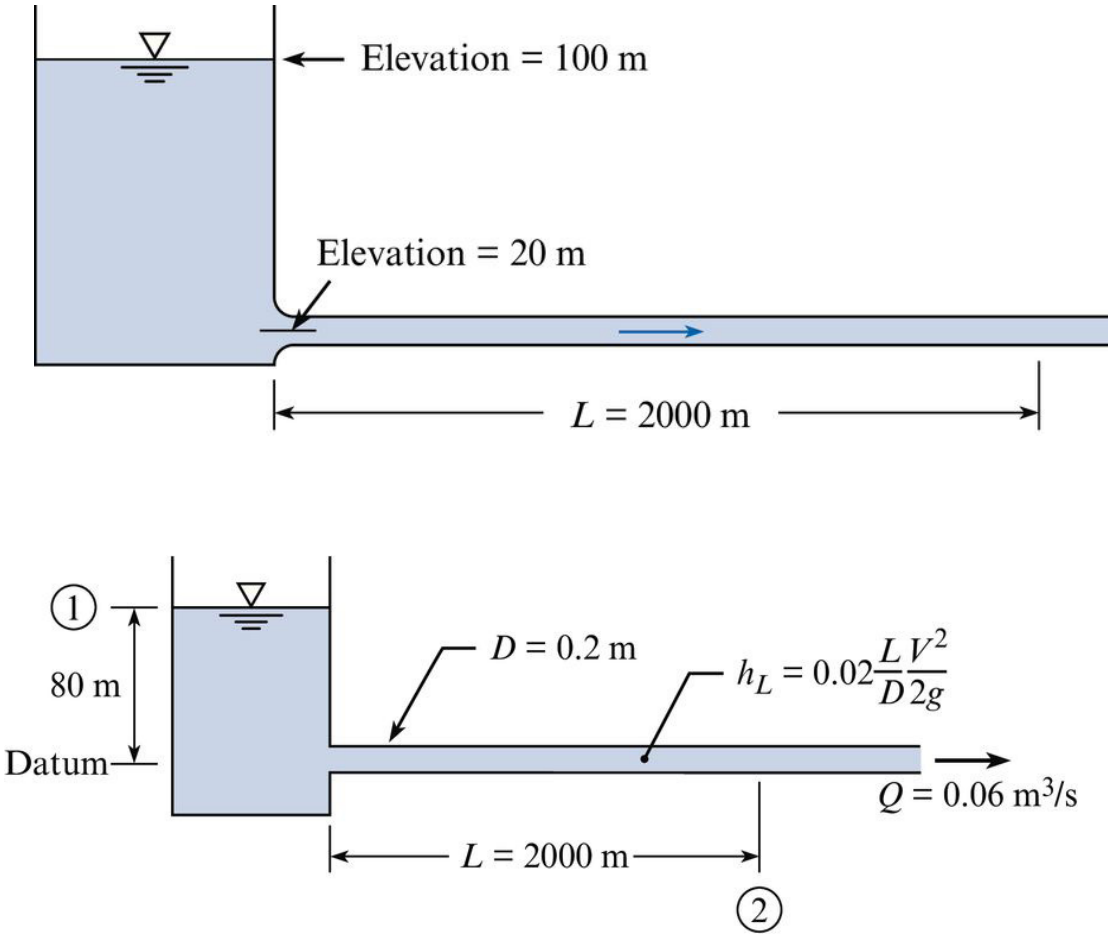
- Vi får $\frac{V^2}{2g} = \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{16Q^2}{2g\pi^2D^4} = \frac{8Q^2}{g\pi^2D^4}$

$$\frac{p_2}{\rho g} = z_1 - z_2 - \left(1 + 0.02\frac{L}{D}\right)\frac{8Q^2}{g\pi^2D^4}$$

$$= 80\text{ m} - \left(1 + 0.02 \cdot \frac{2000}{0.2}\right) \cdot \frac{8 \cdot 0.06^2}{9.81 \cdot \pi^2 \cdot 0.2^4}\text{ m}$$

$$= 80\text{ m} - 37.37\text{ m} = 42.6\text{ m}$$

$$p_2 = \rho g \cdot \frac{p_2}{\rho g} = 9810 \cdot 42.6\text{ Pa} = 418\text{ kPa}$$



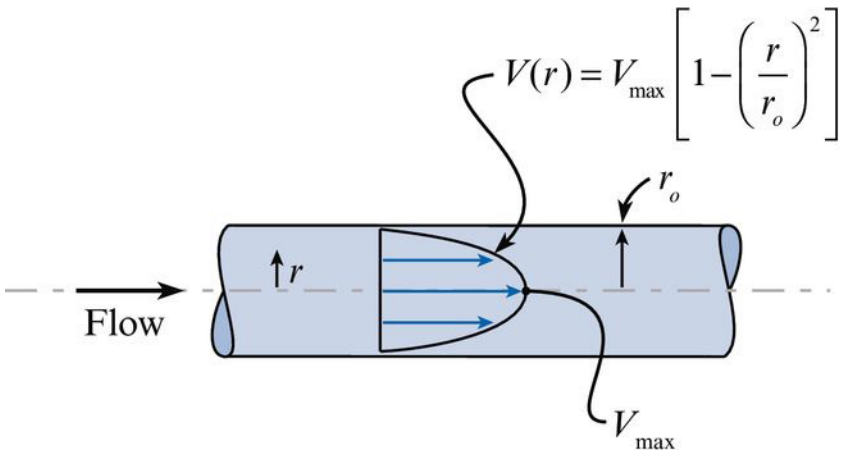
EFM Eksempel 7.1

- Hastighetsfordelingen ved laminær strømning i et sirkulært rør er gitt ved

$$V(r) = V_{\max}\left[1 - \left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right]$$

- Bestem α

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{V}{\overline{V}}\right)^3 dA$$



EFM Eksempel 7.1

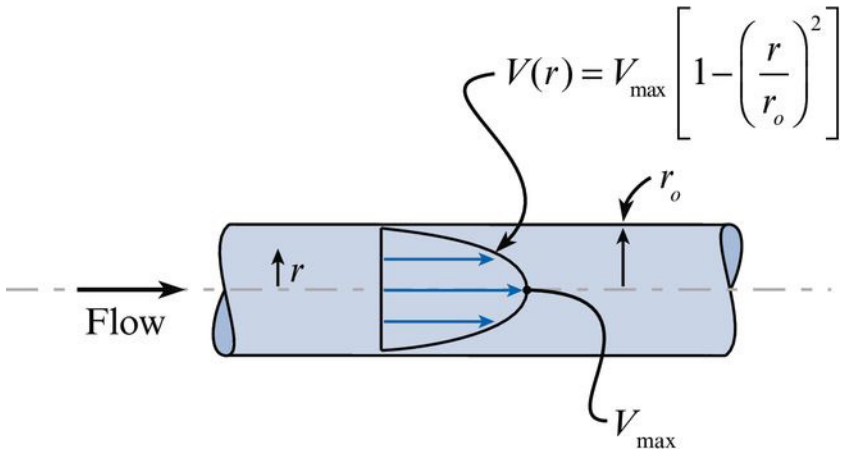
- Bestem α – en integrasjonsøvelse

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{V}{\bar{V}}\right)^3 dA$$

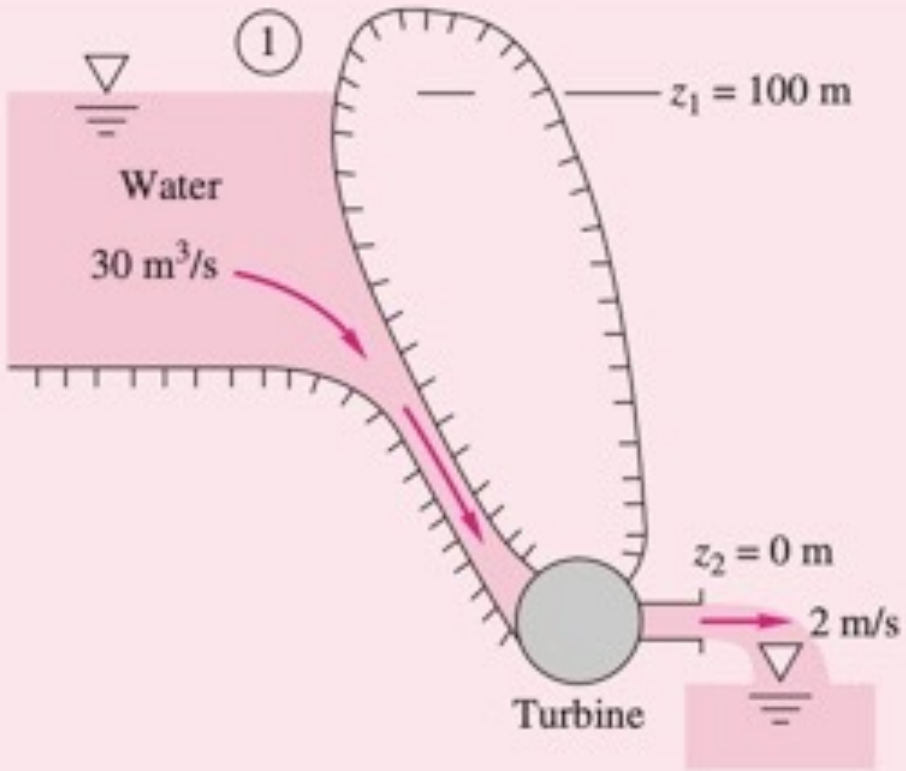
- Bestemmer først middelhastigheten

$$\bar{V} = \frac{1}{A}\int_A V\, dA = \frac{V_{\max}}{A}\int_0^{r_0}\left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)2\pi r dr$$

$$= \frac{\pi r_0^2 V_{\max}}{A}\int_0^1 u\, du = \frac{V_{\max}}{2}[u^2]_0^1 = \frac{V_{\max}}{2}$$



Vannkraftanlegg



E3.23

The steady flow energy equation (3.75) becomes, in head form,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + z_2 + h_t + h_f$$

h_f=20m, α = 1.06

