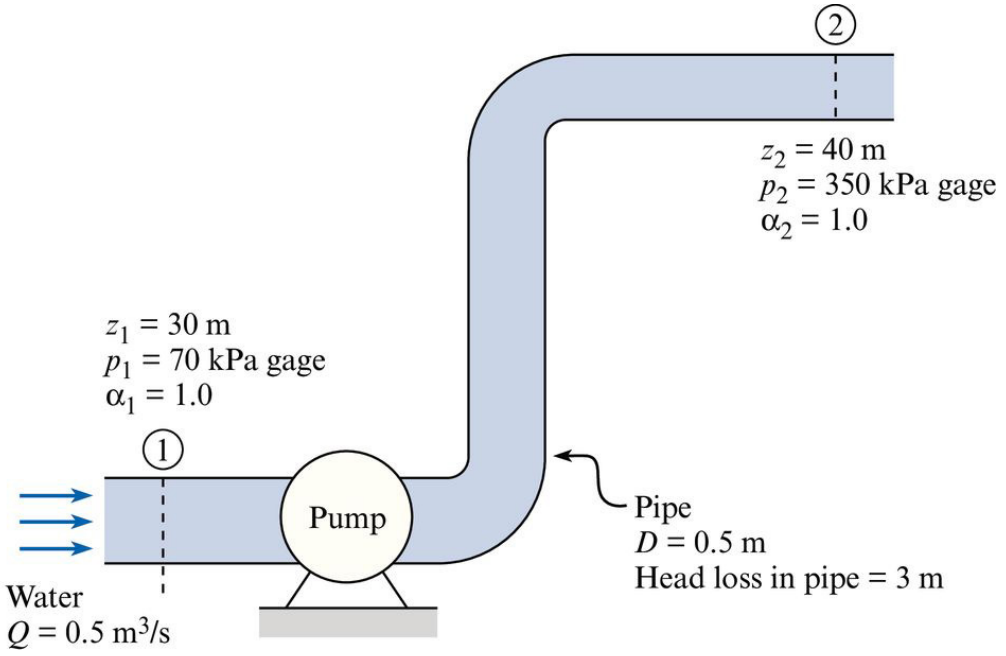
12 – Energilikningen 2

TPS200 – Fluidmekanikk 1: Innføring

07-03-2021 – Endre Joachim Lerheim Mossige, Universitetslektor

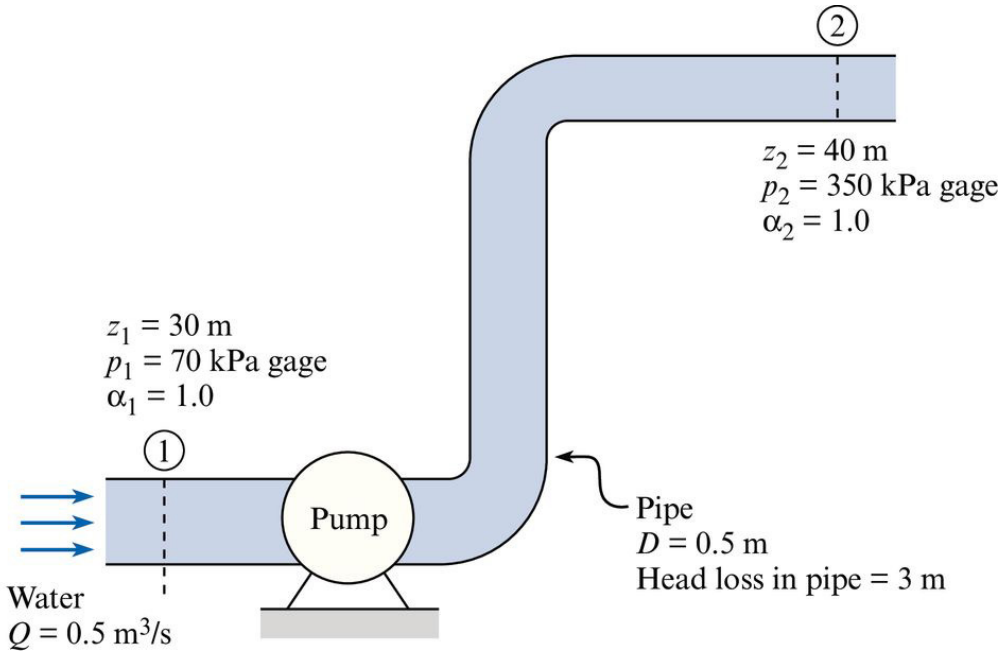
Agenda

- Pumpeeffekt (EFM 7.4)
- Effekt og virkningsgrad (EFM 7.5)
- Energilikningen vs. Bernoullis likning (7.6)
- Energitap ved brå utvidelse (7.7)
- Energilinje og trykklinje (7.8)



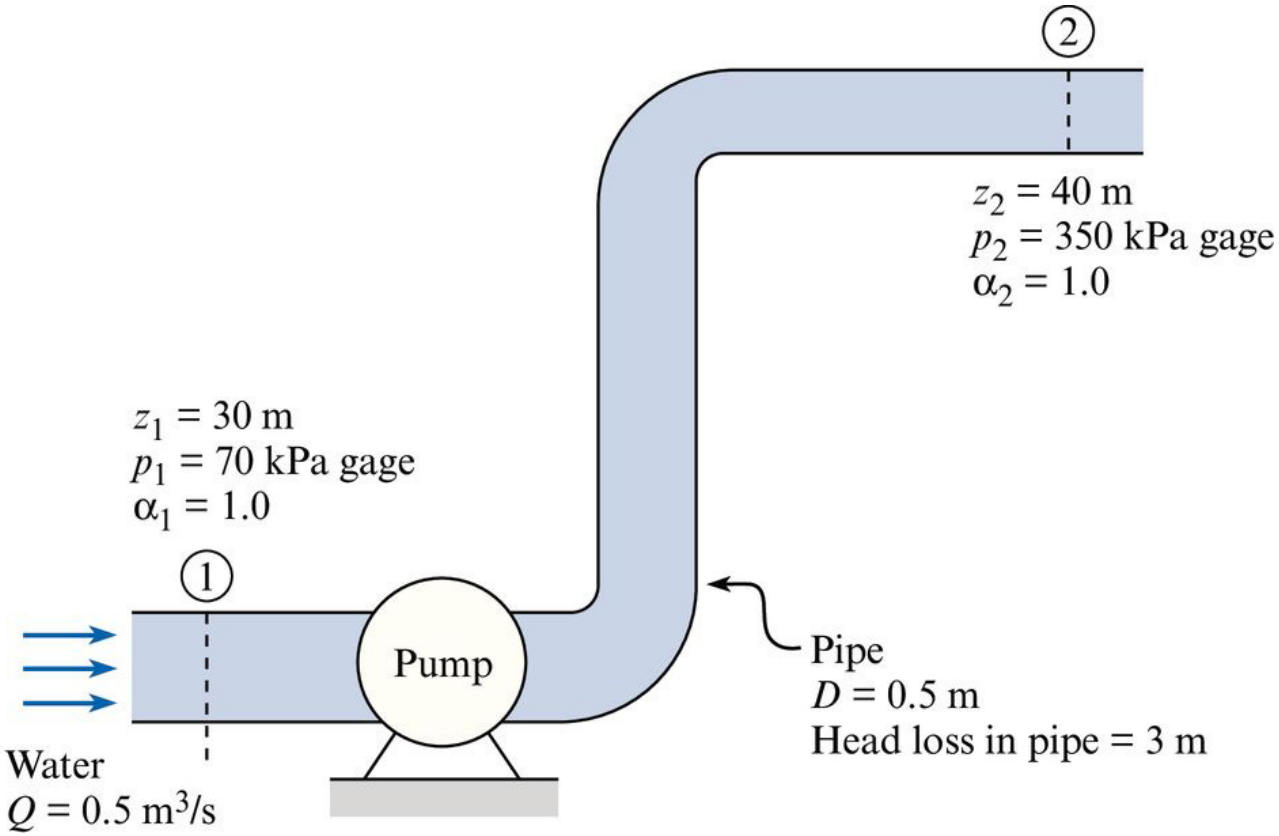
EFM 7.3 - Pumpeeffekt

- $Pumpeeffekt$: $\dot{W}_p = \rho g Q h_p = \dot{m} g h_p$
  - der h_p er energihøyden til pumpa
- $Turbineeffekt$: $\dot{W}_t = \rho g Q h_t = \dot{m} g h_t$
  - der h_t er energihøyden til turbinen
- Energihøyder h:
  - Energi per vektenhet til fluidiet (mgh/mg=h)
  - Energien som passerer gjennom et tverrsnitt per tidsenhet



EFM Eksempel 7.3

- Hvilken effekt må pumpen levere til strømningen?
- Tallverdier som vist i figur:
- $h_L = 3m, D = 0.5m, Q = 0.5m^3/s,$
- $z_1 = 30m, z_2 = 40m, p_1 = 70kPa$ (overtrykk), $p_2 = 350\ kPa$ (overtrykk),
- $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$
- Vann med $\gamma = 9810\ \mathrm{N/m^3}$
- **Sett opp et uttrykk for h_p**
- **Sett inn tallverdier for h_p**



Energilikningen:

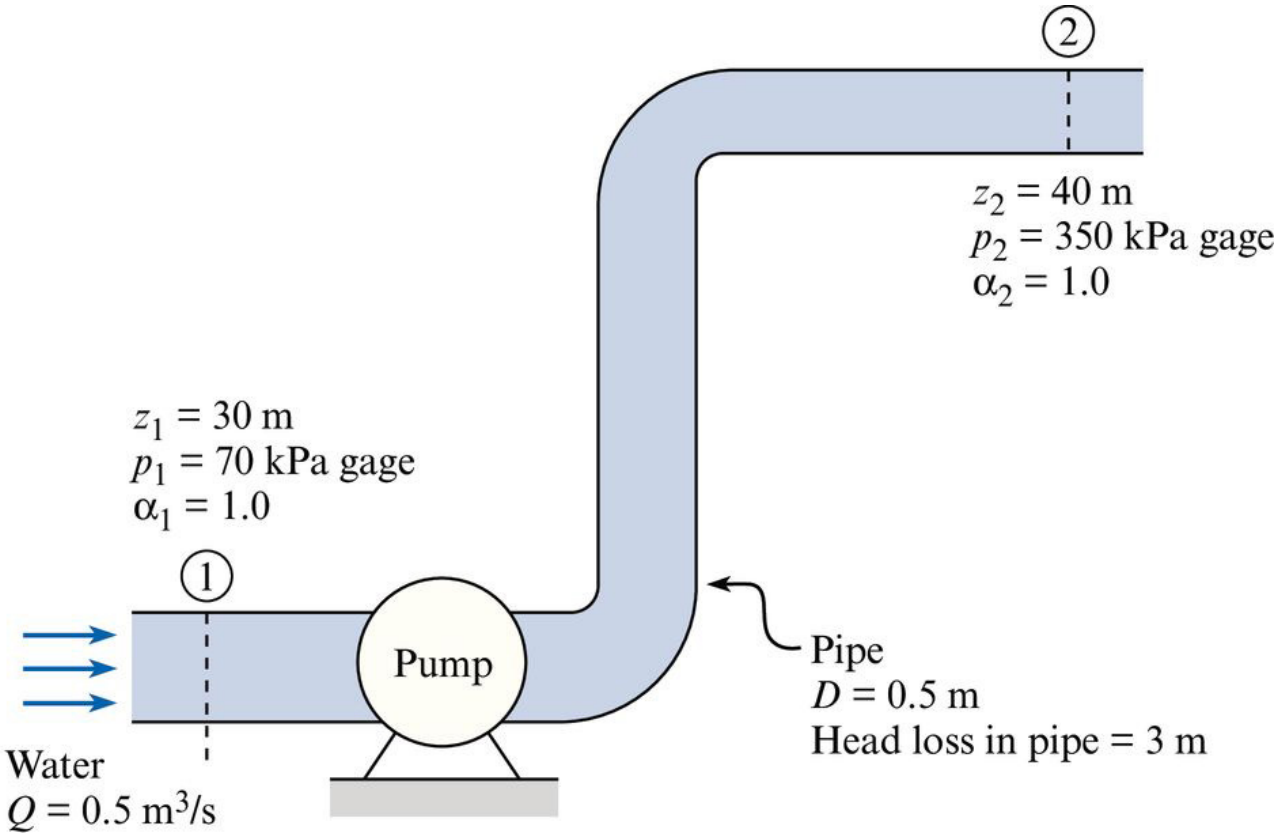
$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{\overline{V_1^2}}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{\overline{V_2^2}}{2g} + z_2 + h_t + h_L$$

$$Pumpeeffekt: \dot{W}_p = \rho g Q h_p = \dot{m} g h_p$$

Løsning: Uttrykk for h_p

- Hastighetsleddene kansellerer fordi $V_1 = V_2$
- $h_t = 0$ (ingen turbiner)

- $\rightarrow h_p = \left(\frac{p_2 - p_1}{\gamma}\right) + (z_2 - z_1) + h_L$
- $h_p = \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) + h_L$



Energilikningen:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{\overline{V_1^2}}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{\overline{V_2^2}}{2g} + z_2 + h_t + h_L$$

$$Pumpeeffekt: \dot{W}_p = \rho g Q h_p = \dot{m} g h_p$$

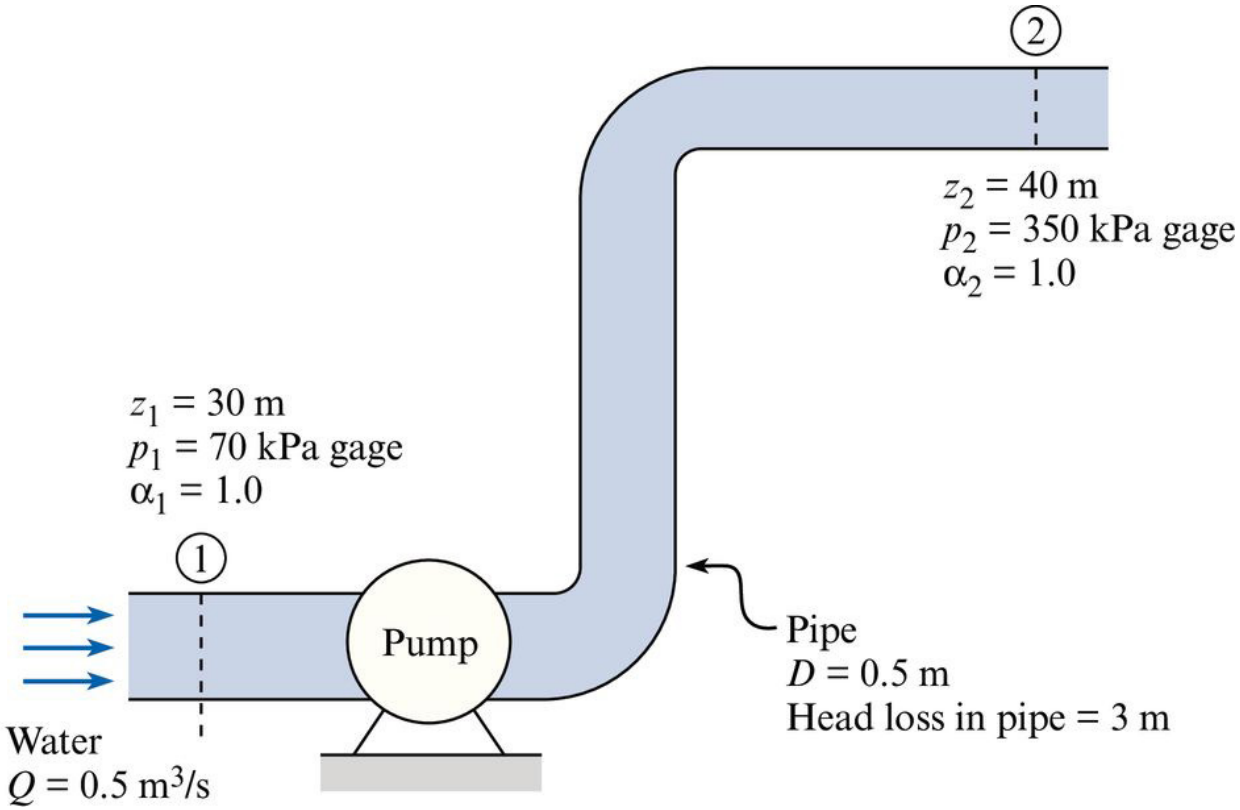
Løsning: Uttrykk for h_p

- Hastighetsleddene kansellerer fordi $V_1 = V_2$
- $h_t = 0$ (ingen turbiner)
- $\rightarrow h_p = \left(\frac{p_2 - p_1}{\gamma}\right) + (z_2 - z_1) + h_L$

$$h_p = \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) + h_L$$

- Setter inn kjente tall:

$$h_p = \left(\frac{350000}{9810} + 40\right)\text{m} - \left(\frac{70000}{9810} + 30\right)\text{m} + 3\text{ m}$$
$$= \mathbf{41.5\ m}$$



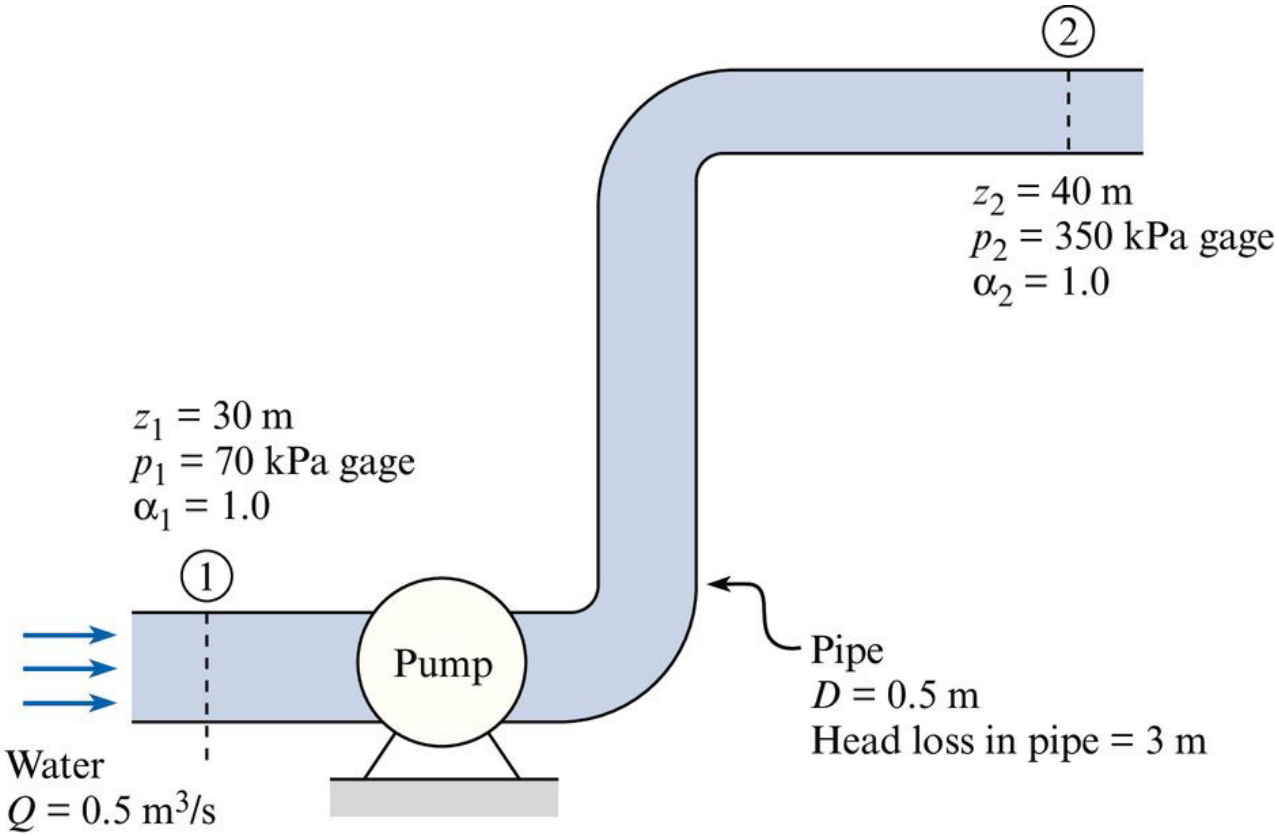
Energiligningen:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{\overline{V_1^2}}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{\overline{V_2^2}}{2g} + z_2 + h_t + h_L$$

$$Pumpeeffekt: \dot{W}_p = \rho g Q h_p = \dot{m} g h_p$$

Hvilken effekt må pumpen levere til strømningen?

- $\rightarrow h_p = \left(\frac{p_2 - p_1}{\gamma}\right) + (z_2 - z_1) + h_L$
- Tallverdier som vist i figur:
- $h_L = 3m$, $D = 0.5m$, $Q = 0.5m^3/s$,
- $z_1 = 30m$, $z_2 = 40m$, $p_1 = 70kPa$ (overtrykk), $p_2 = 350\ kPa$ (overtrykk),
- $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$
- Vann med $\gamma = 9810\ \mathrm{N/m^3}$



Energilikningen:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{\overline{V_1^2}}{2g} + z_1 + h_p = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{\overline{V_2^2}}{2g} + z_2 + h_t + h_L$$

$$Pumpeeffekt: \dot{W}_p = \rho g Q h_p = \dot{m} g h_p$$

EFM Eksempel 7.3

- Hvilken effekt må pumpen levere til strømningen?
- Løst mhp. løftehøyden til pumpen

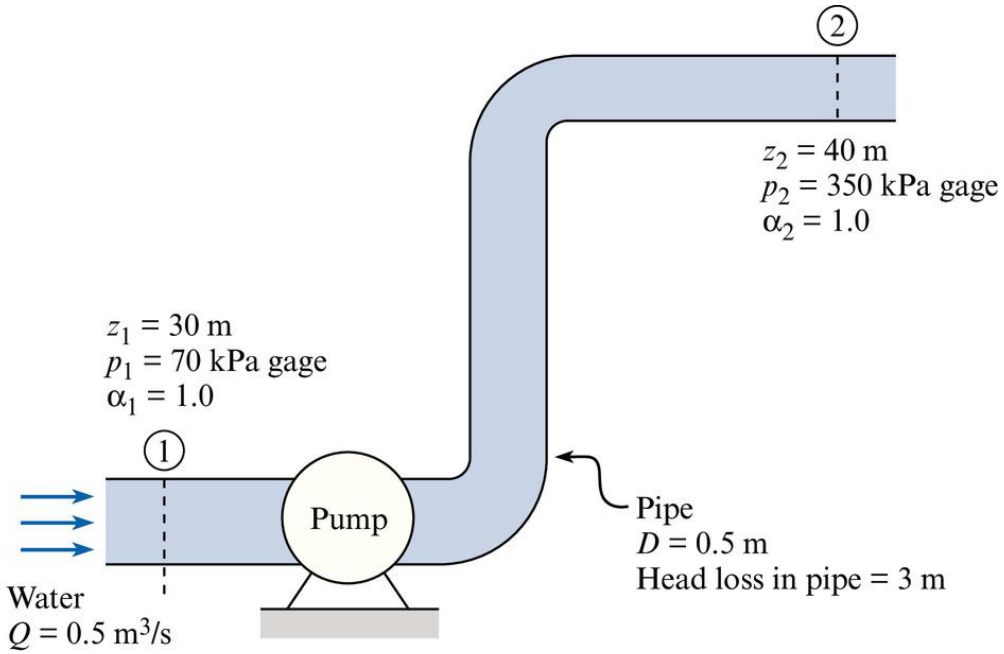
$$h_p = \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right) - \left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) + h_L$$

- Setter inn kjente tall:

$$h_p = \left(\frac{350000}{9810} + 40\right)\text{m} - \left(\frac{70000}{9810} + 30\right)\text{m} + 3\text{ m}$$
$$= 41.5\text{ m}$$

- Nødvendig pumpeeffekt

$$\boldsymbol{P} = \gamma Q h_p = 9810 \cdot 0.5 \cdot 41.5\text{ W} = \mathbf{203.8\ kW}$$



Virkningsgrad

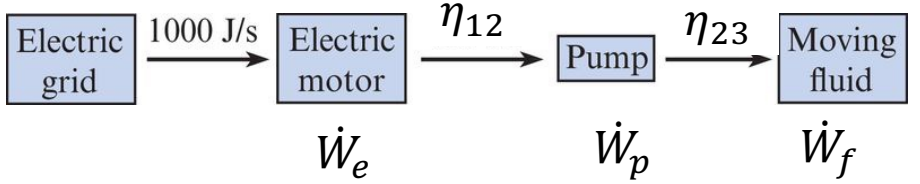
- (Mekanisk) virkningsgrad η:

$$\eta = \frac{\text{Uttak av effekt}}{\text{Tilførsel av effekt}} = \frac{P_{\text{ut}}}{P_{\text{inn}}}$$

- For en pumpe er tilført effekt den elektriske effekten og uttatt effekt er hydraulisk effekt
- For en turbin er tilført effekt den hydrauliske effekten og uttatt effekt er elektrisk effekt
- Kan dele opp samlet virkningsgrad i flere underkomponenter
- Mer om dette i TPS210!

$$\eta_{\text{pumpe}} = \frac{\text{Hydraulisk effekt}}{\text{Akseleffekt}}$$

$$\eta_{\text{turbin}} = \frac{\text{Akseleffekt}}{\text{Hydraulisk effekt}}$$



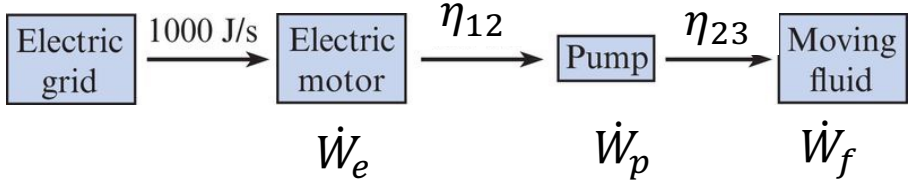
$$\dot{W}_p = \eta_{12}\dot{W}_e \qquad \dot{W}_f = \eta_{23}\dot{W}_p$$

Virkningsgrad - oppgave

- Pumpen i eksempel 7.3 drives av en elektrisk motor (effekt $\dot{W}_e$)
- 75% av den elektriske energien går til å drive pumpen, dvs. $\eta_{12} = 75\%$.
- 50% av pumpens effekt går til å pumpe fluidet, dvs. $\eta_{23} = 50\%$.
- Hvilken effekt må el-nettet levere for at pumpen skal yte $\dot{W}_p = 204kW$?

$$\eta_{\text{pumpe}} = \frac{\text{Hydraulisk effekt}}{\text{Akseleffekt}}$$

$$\eta_{\text{turbin}} = \frac{\text{Akseleffekt}}{\text{Hydraulisk effekt}}$$



$$\dot{W}_p = \eta_{12}\dot{W}_e \qquad \dot{W}_f = \eta_{23}\dot{W}_p$$

(Mekanisk) virkningsgrad η:

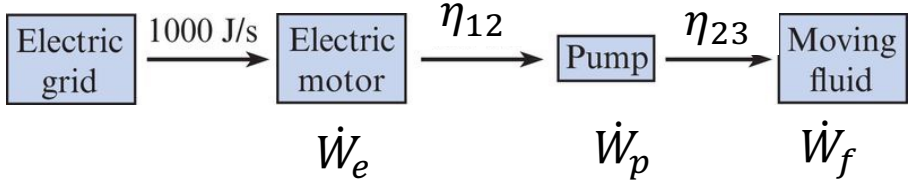
$$\eta = \frac{\text{Uttak av effekt}}{\text{Tilførsel av effekt}} = \frac{P_{\text{ut}}}{P_{\text{inn}}}$$

Virkningsgrad - svar

- Pumpen i eksempel 7.3 drives av en elektrisk motor (effekt $\dot{W}_e$)
- 75% av den elektriske energien går til å drive pumpen, dvs. $\eta_{12} = 75\%$.
- 50% av pumpens effekt går til å pumpe fluidet, dvs. $\eta_{23} = 50\%$.
- Hvilken effekt må el-nettet levere for at pumpen skal yte $\dot{W}_p = 204kW$?
- $\boldsymbol{\dot{W}_e = \frac{\dot{W}_e}{\eta_{12}} = \frac{204kW}{0.75} = 272kW}$

$$\eta_{\text{pumpe}} = \frac{\text{Hydraulisk effekt}}{\text{Akseleffekt}}$$

$$\eta_{\text{turbin}} = \frac{\text{Akseleffekt}}{\text{Hydraulisk effekt}}$$



$$\dot{W}_p = \eta_{12}\dot{W}_e \qquad \dot{W}_f = \eta_{23}\dot{W}_p$$

(Mekanisk) virkningsgrad η:

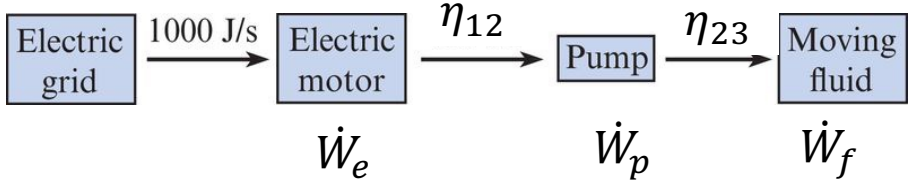
$$\eta = \frac{\text{Uttak av effekt}}{\text{Tilførsel av effekt}} = \frac{P_{\text{ut}}}{P_{\text{inn}}}$$

Virkningsgrad – oppgave 2

- Pumpen i eksempel 7.3 drives av en elektrisk motor (effekt $\dot{W}_e$)
- 50% av pumpens effekt går til å pumpe fluidet, dvs. $\eta_{23} = 50\%$.
- $\dot{W}_p = 204kW, h_p = 41.5m,$
- $\rho = 1000kg/m^3, Q = 0.5\, m^3/s$
- **Hvilken volumstrøm kan vi forvente at pumpen leverer?**

$$\eta_{\text{pumpe}} = \frac{\text{Hydraulisk effekt}}{\text{Akseleffekt}}$$

$$\eta_{\text{turbin}} = \frac{\text{Akseleffekt}}{\text{Hydraulisk effekt}}$$



$$\dot{W}_p = \eta_{12}\dot{W}_e \qquad \dot{W}_f = \eta_{23}\dot{W}_p$$

(Mekanisk) virkningsgrad η:

$$\eta = \frac{\text{Uttak av effekt}}{\text{Tilførsel av effekt}} = \frac{P_{\text{ut}}}{P_{\text{inn}}}$$

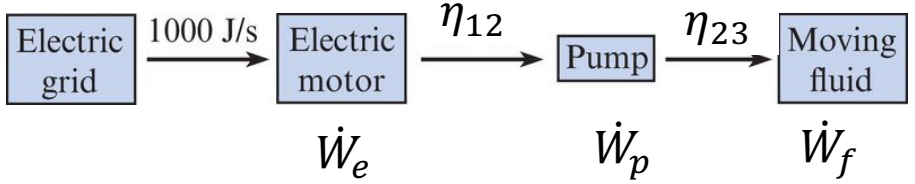
$$Pumpeeffekt\text{: } \dot{W}_p = \rho g Q h_p = \dot{m} g h_p$$

Virkningsgrad – oppgave 2 (svar)

$$\eta_{\text{pumpe}} = \frac{\text{Hydraulisk effekt}}{\text{Akseleffekt}}$$

$$\eta_{\text{turbin}} = \frac{\text{Akseleffekt}}{\text{Hydraulisk effekt}}$$

- Pumpen i eksempel 7.3 drives av en elektrisk motor (effekt $\dot{W}_e$)
- 50% av pumpens effekt går til å pumpe fluidet, dvs. $\eta_{23} = 50\%$.
- $\dot{W}_p = 204kW, h_p = 41.5m,$
- $\rho = 1000kg/m^3, Q = 0.5\, m^3/s$
- Hvilken volumstrøm kan vi forvente at pumpen leverer?
- $\dot{W}_f = 0.5 \cdot \dot{W}_p = 0.5 \cdot 204kW = 102kW$
- $102kW = \gamma Q h_p \rightarrow \boldsymbol{Q = 0.25 m^3/s}$



$$\dot{W}_p = \eta_{12}\dot{W}_e \qquad \boxed{\dot{W}_f = \eta_{23}\dot{W}_p}$$

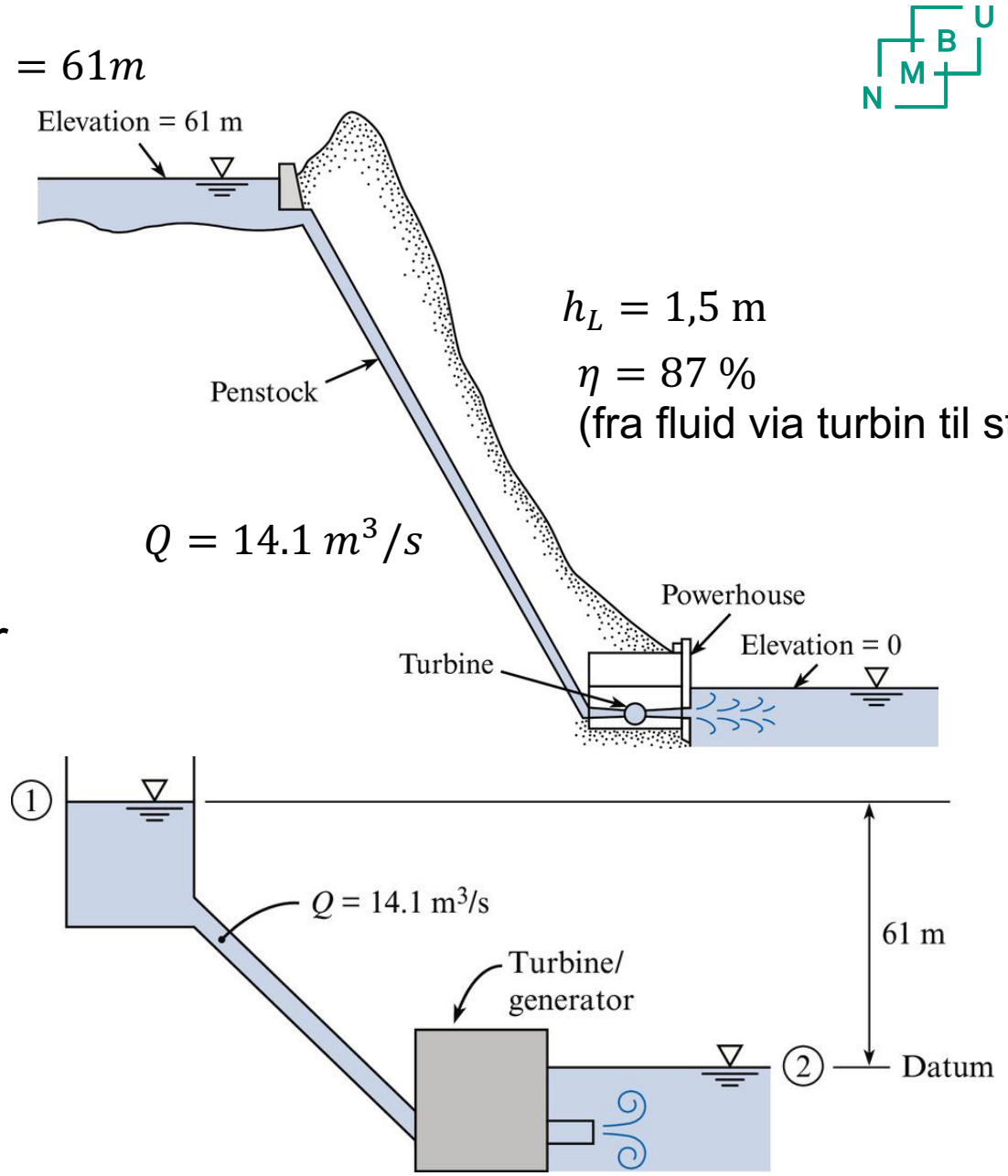
(Mekanisk) virkningsgrad η:

$$\eta = \frac{\text{Uttak av effekt}}{\text{Tilførsel av effekt}} = \frac{P_{\text{ut}}}{P_{\text{inn}}}$$

$$Pumpeeffekt: \dot{W}_p = \rho g Q h_p = \dot{m} g h_p$$

EFM Eksempel 7.4 - Oppgave

- Et vannkraftverk fører $Q = 14.1\ \mathrm{m}^3/s$ ved maksimal produksjon
- Totalt tap fra reservoaret til undervannet er $h_L = 1{,}5\ \mathrm{m}$
- Samlet virkningsgrad for turbin og generator er $\eta = 87\ \%$
- $V_1 \approx 0, V_2 \approx 0$
  - a) Uttrykk fallhøyden h_t
  - b) Regn ut h_t ved å sette inn kjente tall
  - c) Hvor mye effekt yter turbinen
  - d) Hvilken effekt leveres til strømnettet?



EFM Eksempel 7.4 – Løsning

- Hvilken effekt leveres til strømnettet?
- Energilikningen:

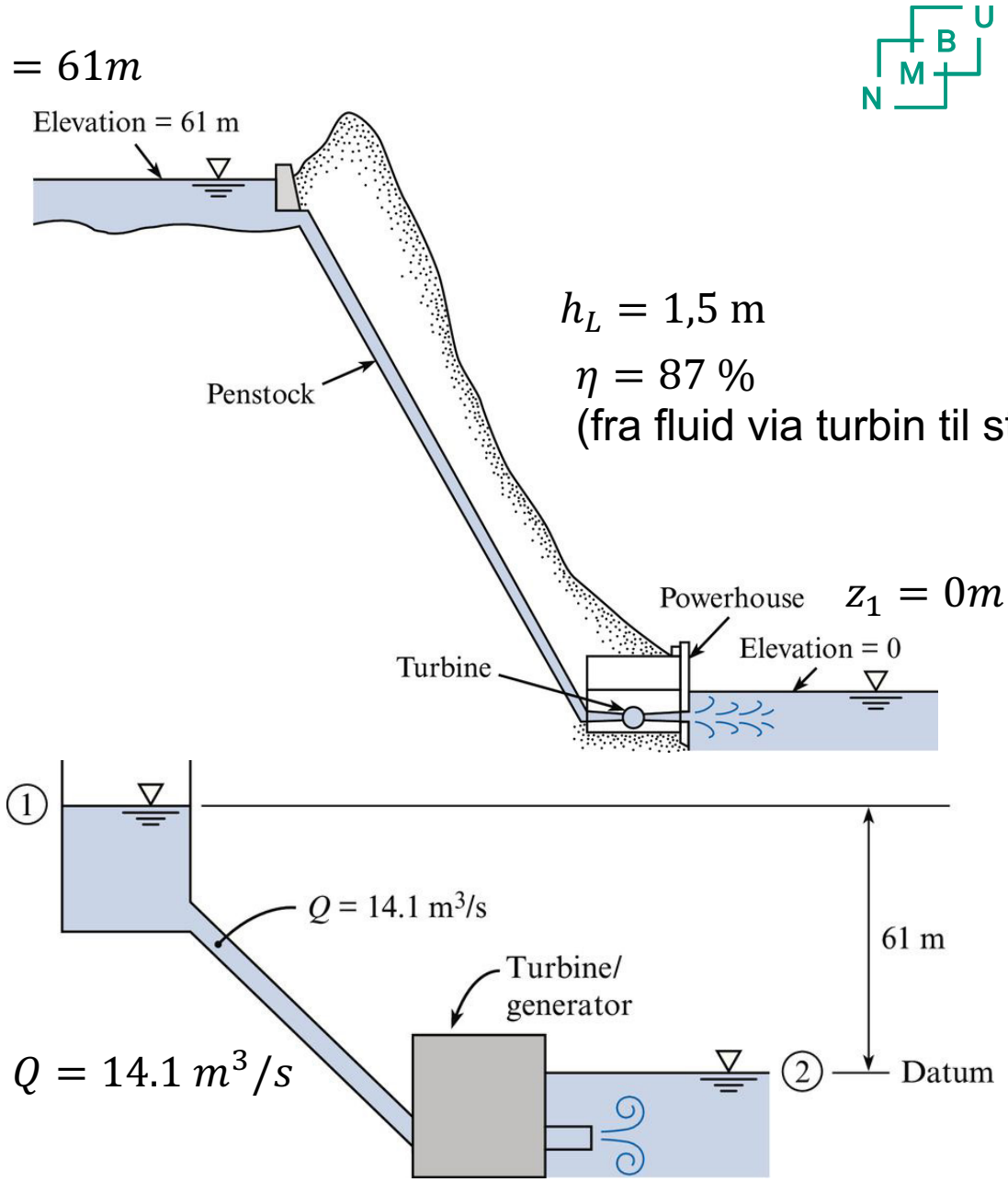
$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

- Forenklet

$$z_1 = z_2 + h_t + h_L$$

- Løst mhp. turbinens såkalte fallhøyde

$$h_t = z_1 - z_2 - h_L = 61\ \text{m} - 1.5\ \text{m} = 59.5\ \text{m}$$



EFM Eksempel 7.4 – Løsning

- Hvilken effekt leveres til strømnettet?
- Energilikningen:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

- Forenklet

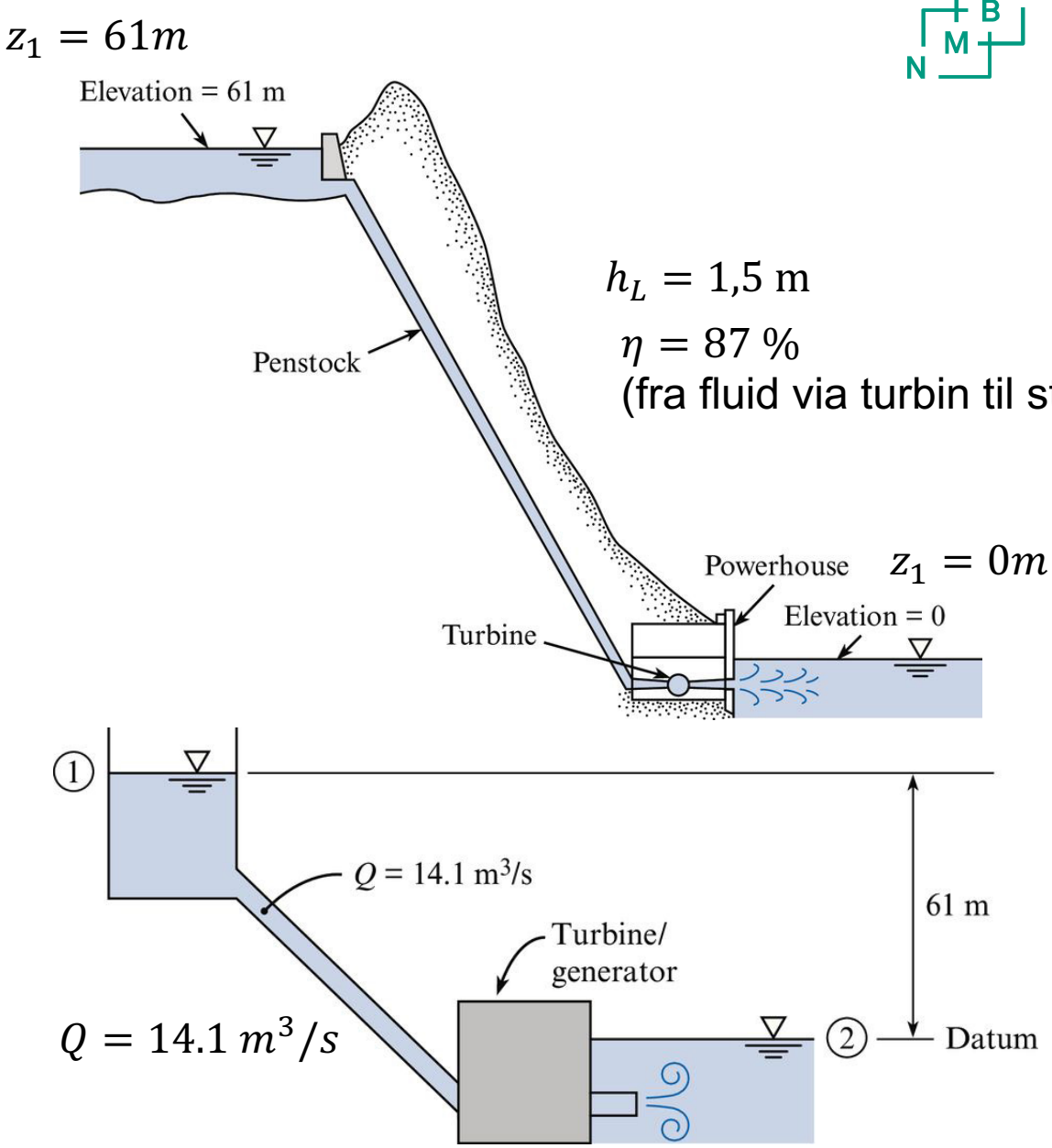
$$z_1 = z_2 + h_t + h_L$$

- Løst mhp. turbinens såkalte fallhøyde

$$h_t = z_1 - z_2 - h_L = 61\ \text{m} - 1.5\ \text{m} = 59.5\ \text{m}$$

- Hydraulisk effekt levert til turbin

$$P_h = \gamma Q h_t = 9810 \cdot 14.1 \cdot 59.5\ \text{W} = 8.23\ \text{MW}$$



EFM Eksempel 7.4

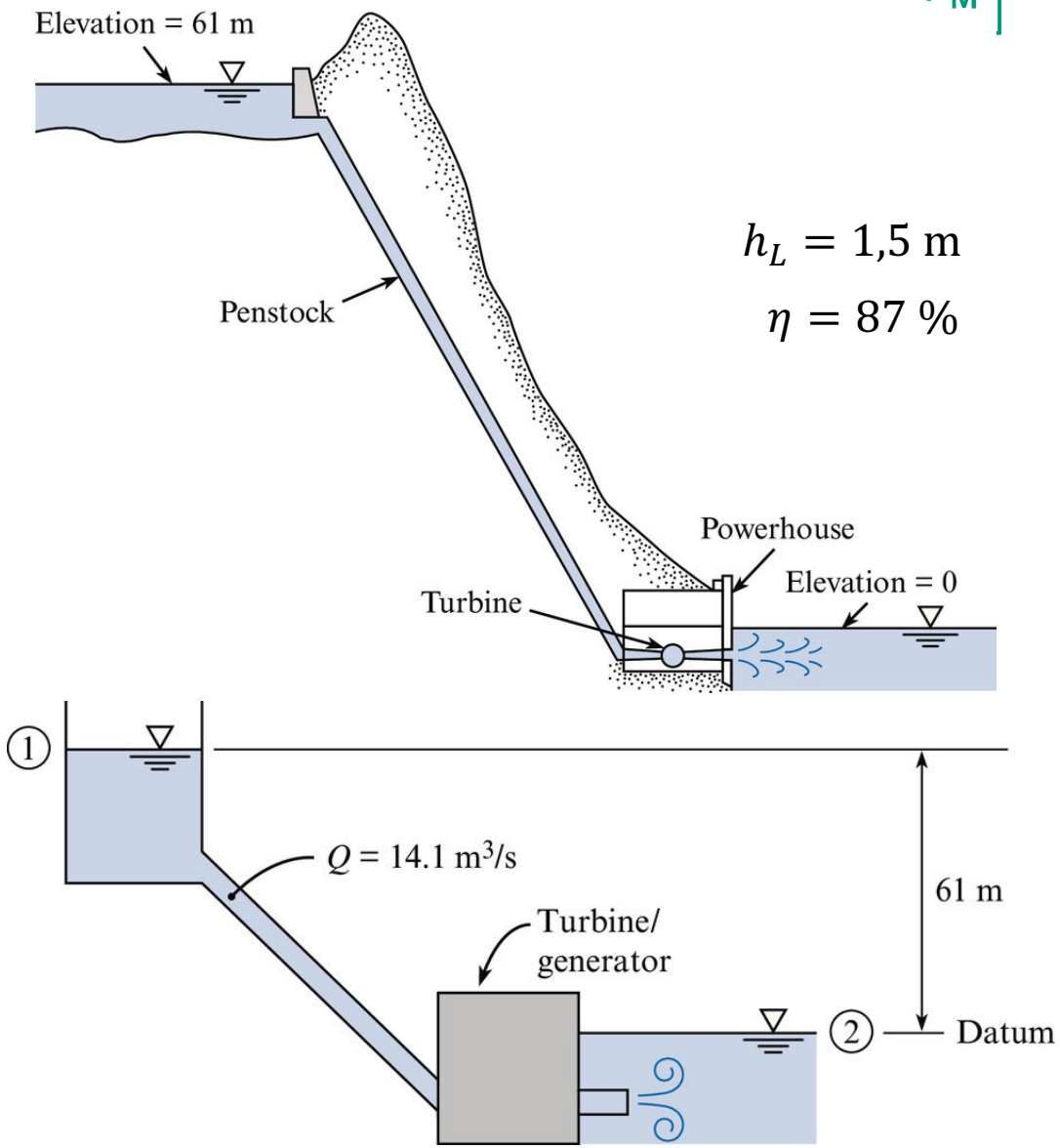
- Hvilken effekt leveres til strømnettet?
- Hydraulisk effekt levert til turbin

  $P_h = \gamma Q h_t = 9810 \cdot 14.1 \cdot 59.5\ \text{W} = 8.23\ \text{MW}$

- Virkningsgrad (i denne oppgaven)

$$\eta = \frac{\text{Elektrisk effekt}}{\text{Hydraulisk effekt}} = \frac{P_e}{P_h}$$

$$\boldsymbol{P_e = \eta P_h = 0.87 \cdot 8.23\ \text{MW} = 7.16\ \text{MW}}$$



$h_L = 1{,}5\ \text{m}$

$\eta = 87\ \%$

Agenda

- Energilikningen vs. Bernoullis likning
- Effekt og virkningsgrad
- Energitap ved brå utvidelse
- Energilinje og trykklinje



Energilikningen – bevaring av energi

- Termodynamikkens 1. lov + transport-teoremet ga oss energilikningen:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

Energihøyde i snitt 1 (innløp) av kontrollflaten

Energihøyde i snitt 2 (utløp) av kontrollflaten

Energihøyde tilført kontrollvolumet av pumpe

Energihøyde tatt ut av kontrollvolumet av turbin

Energihøyde tapt til termisk energi pga. friksjon (viskøse tap)

- Alle ledd har dimensjon lengde og kan tolkes som energi per tyngdeenhet fluid

Trykkhøyde: $\frac{p}{\rho g} = \frac{p}{\gamma}$

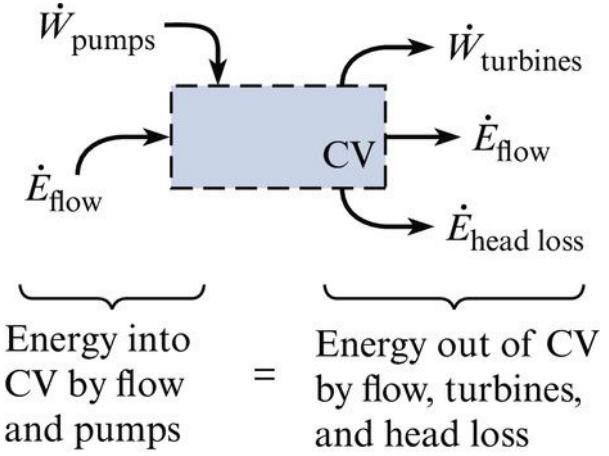
Stedshøyde: z

Hastighetshøyde: $\alpha \frac{\bar{V}^2}{2g}$

Middelhastighet: $\bar{V} = Q/A$

Korreksjonsfaktor for hastighetshøyde:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{V}{\bar{V}} \right)^3 dA$$



Energilikningen vs. Bernoullis likning: Ulike fysiske lover

- Kommer fra ulike fysiske lover:
  - Bernoullis likning kommer fra Eulers likning integrert langs en strømlinje. Kun trykkarbeid og mekanisk energi.
  - Energilikningen kommer fra termodynamikkens 1. lov der tap til er termisk energi pga. viskøse krefter er inkludert. Trykkarbeid, maskinarbeid, mekanisk energi og indre energi.

- Energilikningen:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

- Bernoullis likning:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

I hvilke tilfeller kan vi bruke Bernoulli istedenfor energilikningen?

Energilikningen vs. Bernoullis likning: Generalitet

- Vi kan komme til Bernoullis likning fra energilikningen, men ikke motsatt
  - Ingen viskøse tap
  - Ingen pumpe/turbin
  - La kontrollvolumet være et uendelig tynt rør, dvs. en strømlinje (middelverdier for energihøydene blir da punktverdier på strømlinjen)

- Energilikningen:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

- Bernoullis likning:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

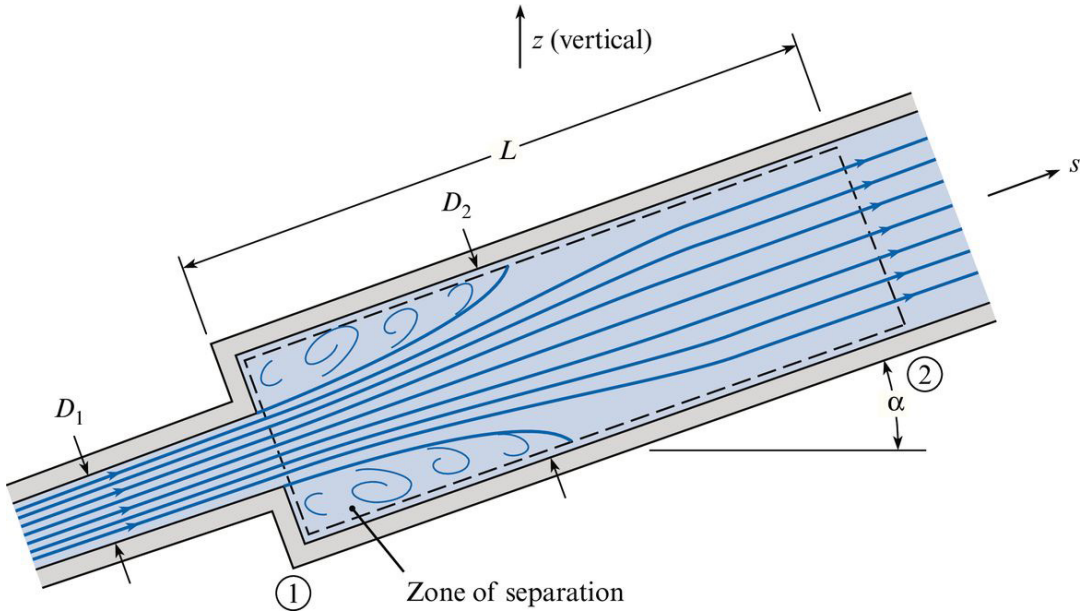
Agenda

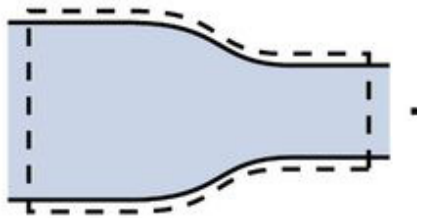
- Energilikningen vs. Bernoullis likning
- Effekt og virkningsgrad
- Energitap ved brå utvidelse
- Energilinje og trykklinje



Tap ved utvidelser og innsnevringer

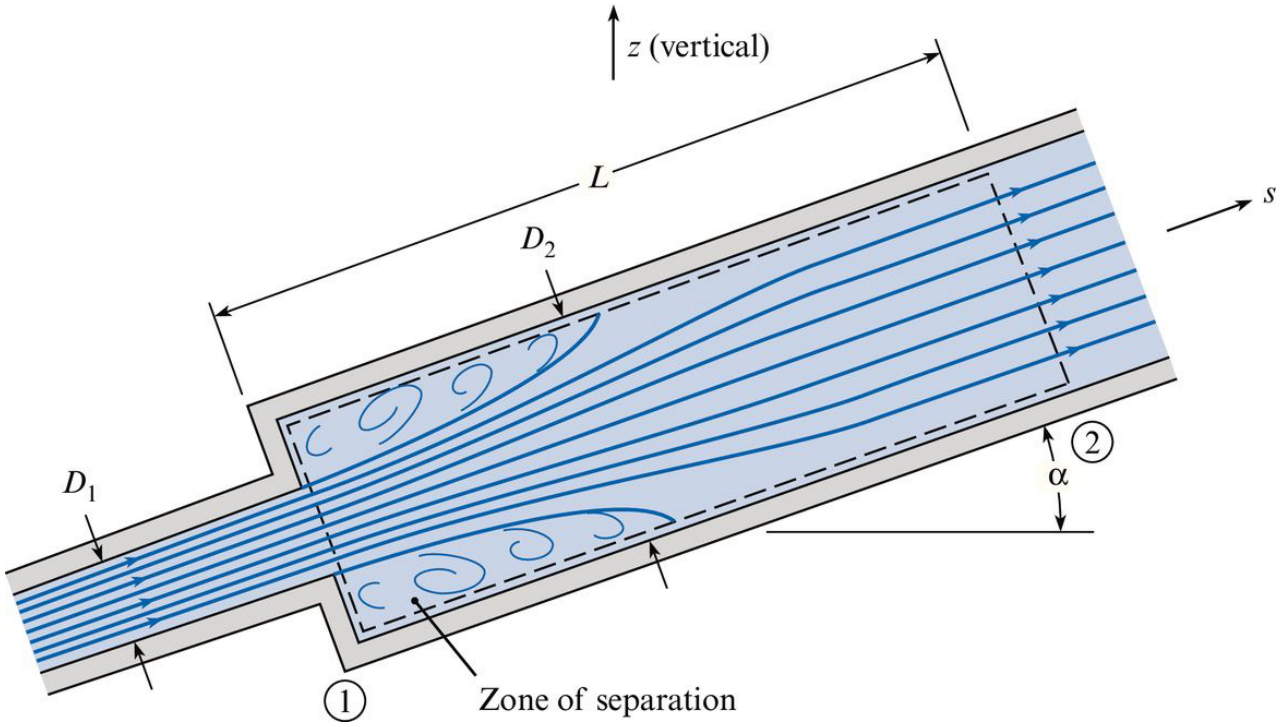
- Eksempler på det som kalles *singulærtap*: Tap som oppstår lokalt i motsetning til tap som skjer kontinuerlig langs røret
- Vanligvis på formen: $h_s = k\frac{V^2}{2g}$
  - k er en (empirisk bestemt) koeffisient som avhenger av geometrien og V er vanligvis den største hastigheten som inngår
- Tap er vanligvis betydelig større ved utvidelser (økt turbulens pga. separasjon) enn ved innsnevringer





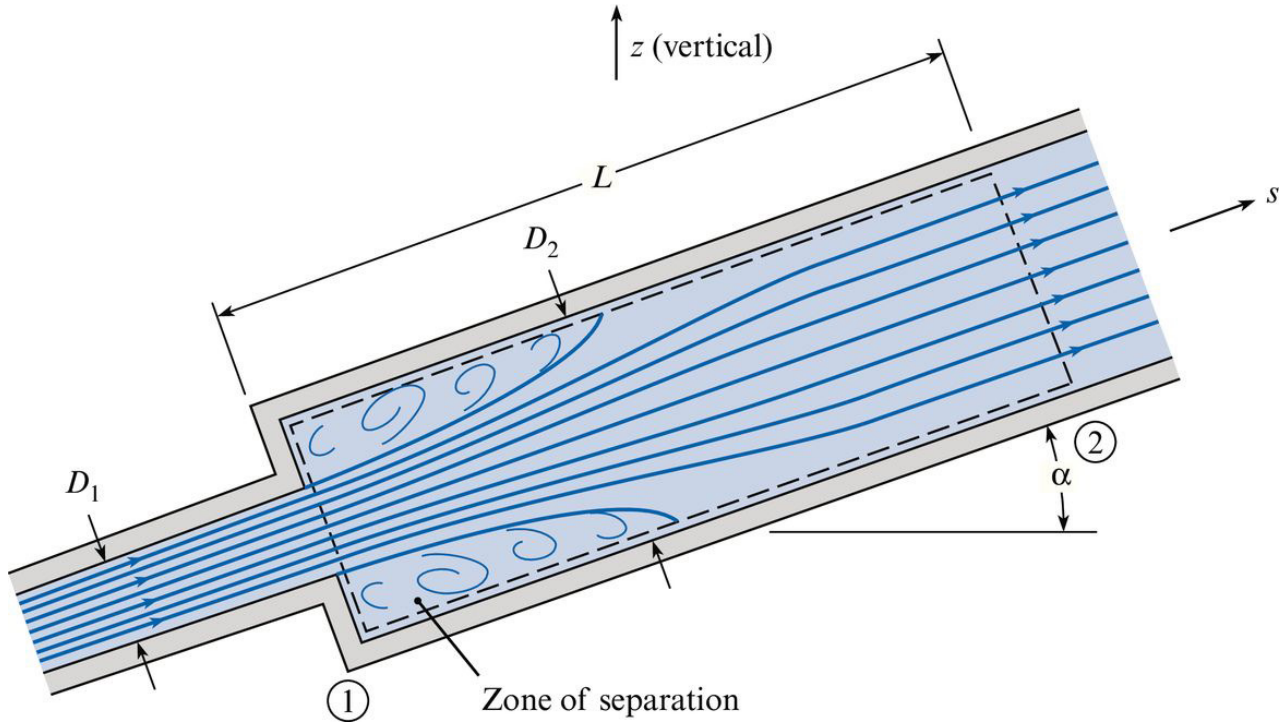
Tap ved brå utvidelse – Oppgave

- Vi vil utlede bruke energilikningen til å utlede en teoretisk formel for energitapet fra 1 til 2
- Bruk et kontrollvolum som vist
  - Snitt 1 rett etter utvidelsen
  - Snitt 2 er langt nok unna utvidelsen til at strømningen har stabilisert seg
- Anta inkompressibel strømning, konstant trykk over tverrsnitt 1 og se bort fra skjærkrefter på kontrollvolumet over den korte avstanden



Tap ved brå utvidelse – Oppgave

- Vi vil utlede bruke energilikningen til å utlede en teoretisk formel for energitapet fra 1 til 2
- Bruk et kontrollvolum som vist
  - Snitt 1 rett etter utvidelsen
  - Snitt 2 er langt nok unna utvidelsen til at strømningen har stabilisert seg
- Anta inkompressibel strømning, konstant trykk over tverrsnitt 1 og se bort fra skjærkrefter på kontrollvolumet over den korte avstanden ($\alpha = 0$)



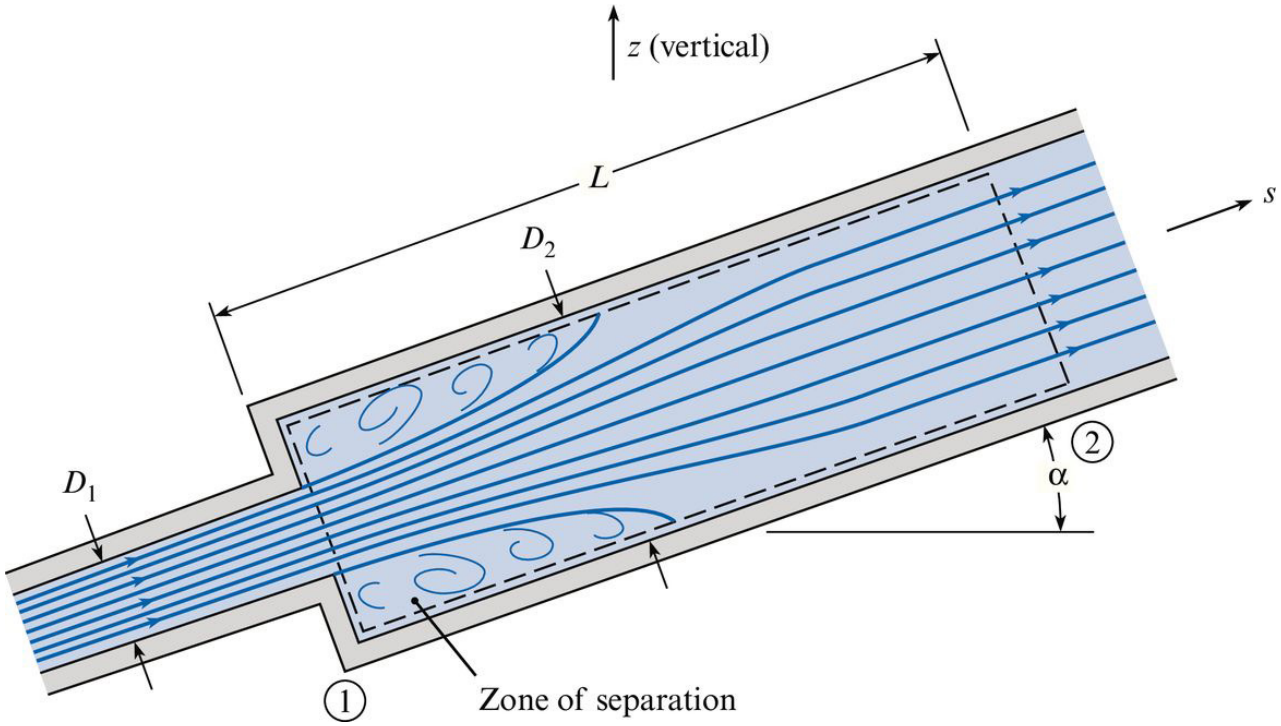
$$\sum F_x = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 = \int_A (-p)n_x = -p_2A_2 + p_1A_1$$

Bruk impulslikningen til å uttrykke $-\Delta p = \frac{p_1 - p_2}{\rho}$ ved V2, V1, A1,A2

Tap ved brå utvidelse – Løsning trykkforskjell

- Vi vil utlede bruke energilikningen til å utlede en teoretisk formel for energitapet fra 1 til 2
- $\sum F_x = p_1 A_2 - p_2 A_2 = \rho(V_2^2 A_2 - V_1^2 A_1)$ (1)
- Deler (1) på A_2

$$\frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) = V_2^2 - V_1^2 \frac{A_1}{A_2}$$



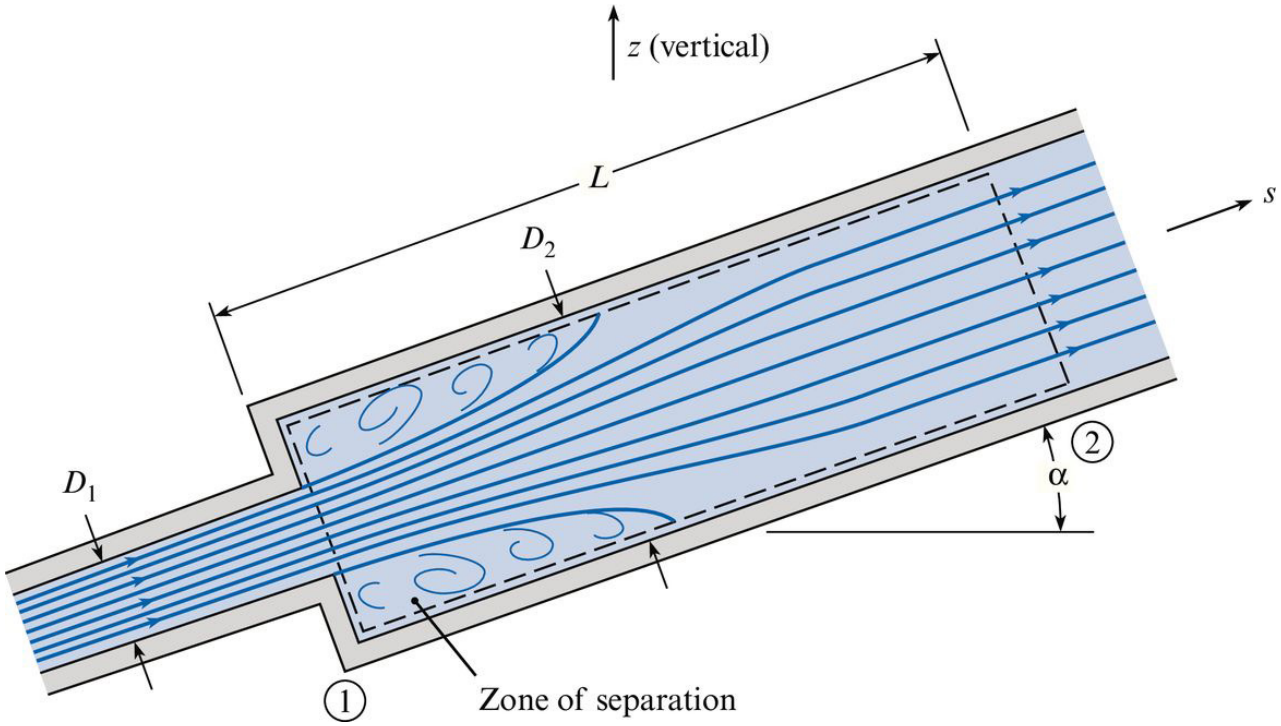
$$\sum F_x = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 = \int_A (-p)n_x = -p_2 A_2 + p_1 A_1$$

Bruk impulslikningen til å uttrykke $-\Delta p = \frac{p_1 - p_2}{\rho}$ ved V2, V1, A1,A2

Tap ved brå utvidelse – Oppgave: Finn tapshøyden h_L

- Vi vil utlede bruke energilikningen til å utlede en teoretisk formel for energitapet fra 1 til 2
- $\sum F_x = p_1 A_2 - p_2 A_2 = \rho(V_2^2 A_2 - V_1^2 A_1)$ (1)
- Deler (1) på A_2

$$\frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) = V_2^2 - V_1^2 \frac{A_1}{A_2}$$



$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

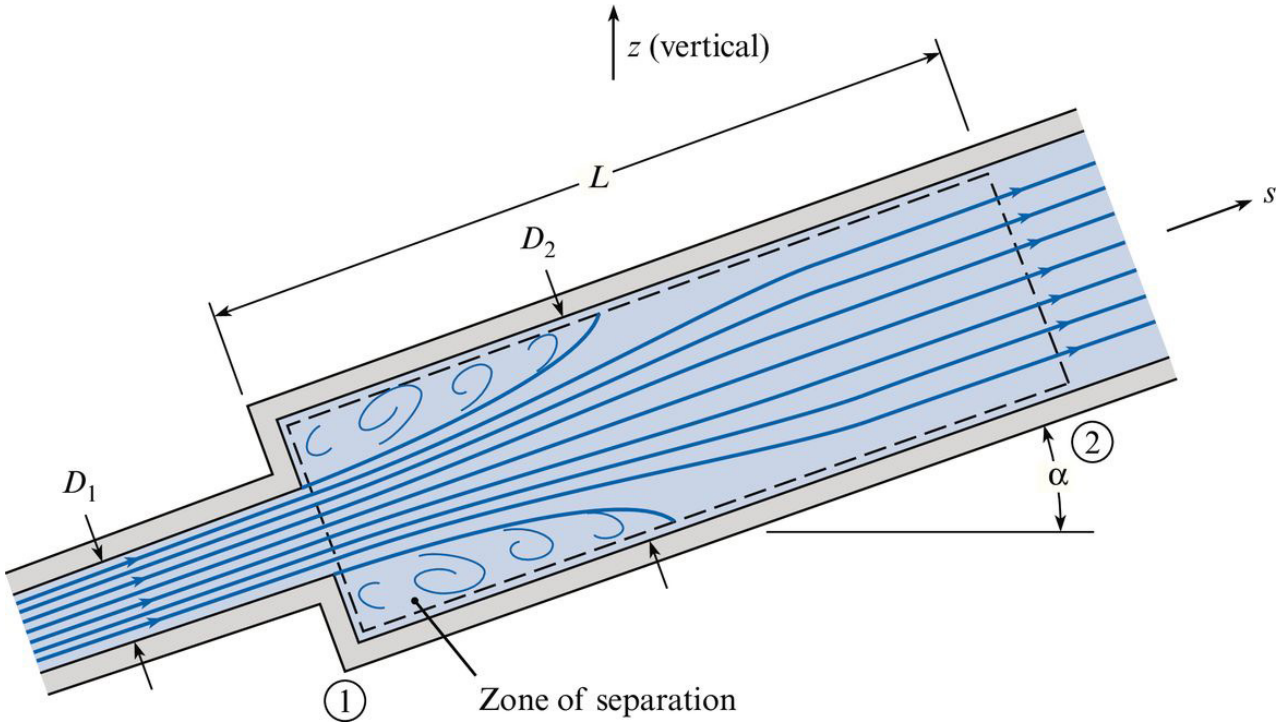
Bruk energilikningen og kontinuitetslikningen til å uttrykke tapshøyden h_L

Tap ved brå utvidelse – Løsning

- Vi vil utlede bruke energilikningen til å utlede en teoretisk formel for energitapet fra 1 til 2
- $\sum F_x = p_1 A_2 - p_2 A_2 = \rho(V_2^2 A_2 - V_1^2 A_1)$ (1)
- Deler (1) på A_2

$$\frac{1}{\rho}(p_1 - p_2) = V_2^2 - V_1^2 \frac{A_1}{A_2}$$

- Kontinuitet: $V_1\, A_1 \;=\; V_2\, A_2$
- Løser for h_L: $h_L = \frac{1}{2g}(V_1 - V_2)^2$



$$\sum F_x = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 = \int_A (-p)n_x = -p_2 A_2 + p_1 A_1$$

Bruk energilikningen og kontinuitetslikningen til å uttrykke tapshøyden h_L

4. Brå utvidelse – bruk kontinuitetslikningen

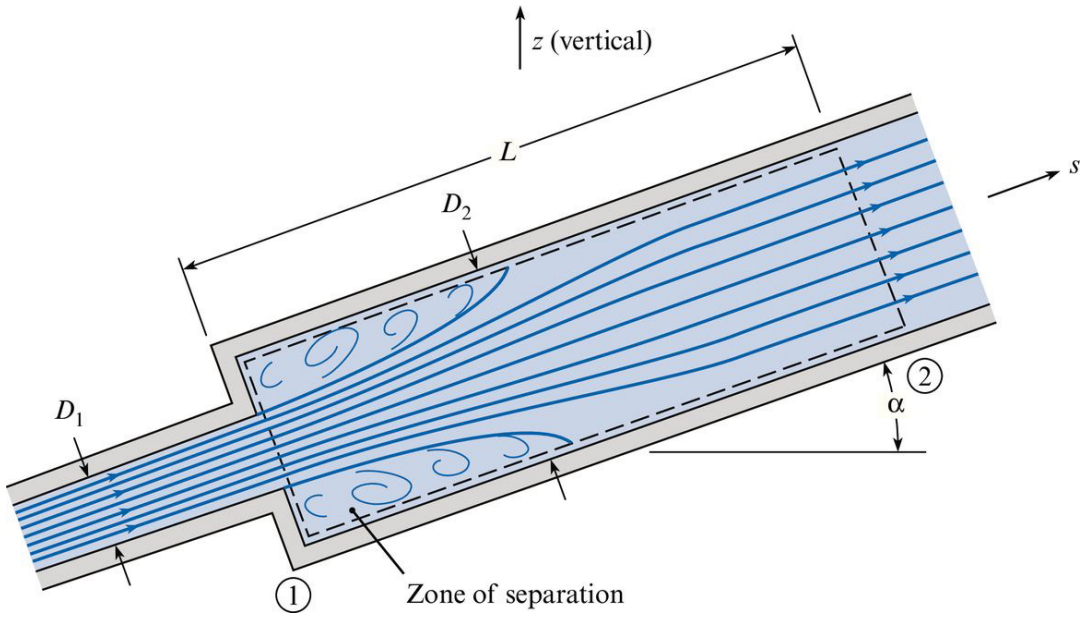
$$h_L = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - 2\frac{V_1^2}{2g}\frac{A_1}{A_2}$$

- Bruk kontinuitetslikningen:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \Longrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$h_L = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - 2\frac{V_1^2}{2g}\frac{A_1}{A_2} = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} - 2\frac{V_1^2}{2g}\frac{V_2}{V_1}$$

$$= \frac{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2}{2g} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$



- Kan også skrives

$$h_L = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g} \equiv k\frac{V_1^2}{2g}$$

Singulærtapskoeffisient for brå utvidelse (her er V_1 referansehastigheten)

$$k = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right)^2$$

Brå utvidelse – ekstremtilfellet med stort kar

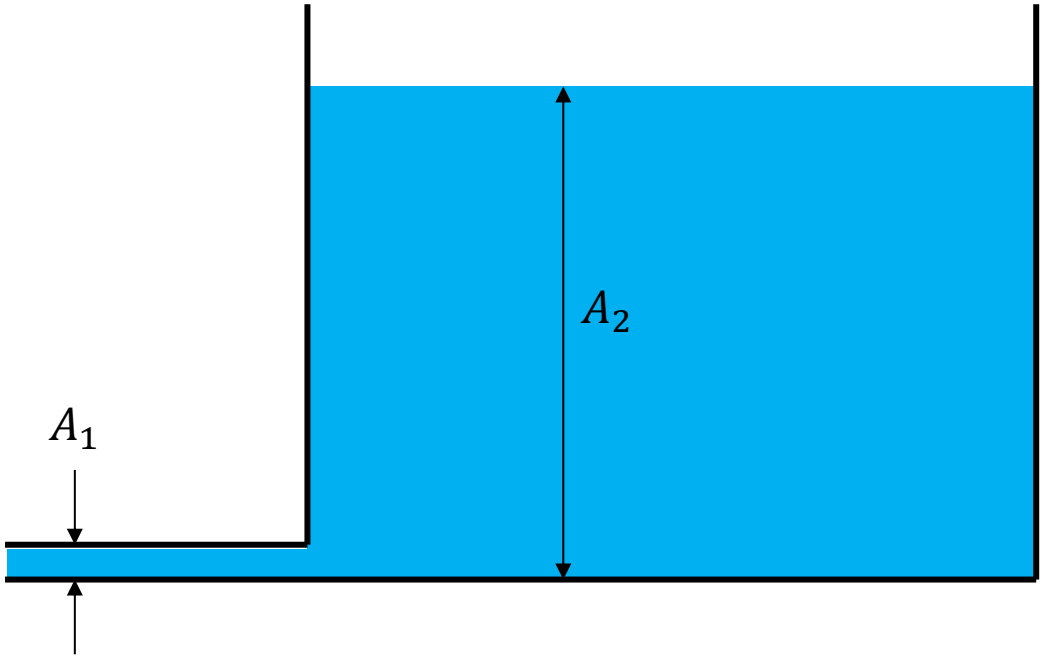
- Tap ved brå utvidelse er altså:

$$h_L = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g} \equiv k\frac{V_1^2}{2g}$$

- For overgang fra et rør til et stort reservoar der $V_2 \approx 0$ får vi

$$h_L = \frac{V_1^2}{2g}$$

  - Vi taper hele hastighetshøyden, altså er tapskoeffisienten $k = 1$
  - Strengt tatt taper vi $\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g}$, altså er tapskoeffisienten α_1
  - All kinetisk energi går over i termisk energi i reservoaret

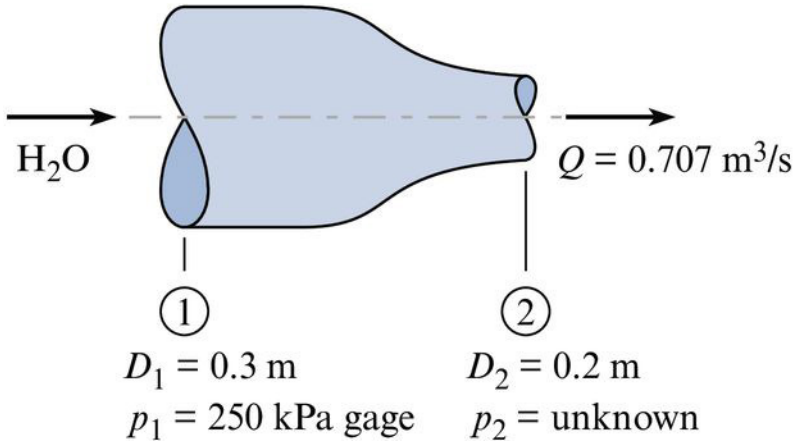


EFM Eksempel 7.5

- Vann strømmer gjennom en innsnevring i et rør med oppgitte verdier som vist
- Tap i innsnevringen gitt ved

$$h_L = 0{,}1\frac{V_2^2}{2g}$$

- Hvilken kraft må virke på innsnevringen for å holde den på plass?
- Anta $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$



EFM Eksempel 7.5

- Hvilken kraft må virke på innsnevringen for å holde den på plass?
- Impulslikningen:

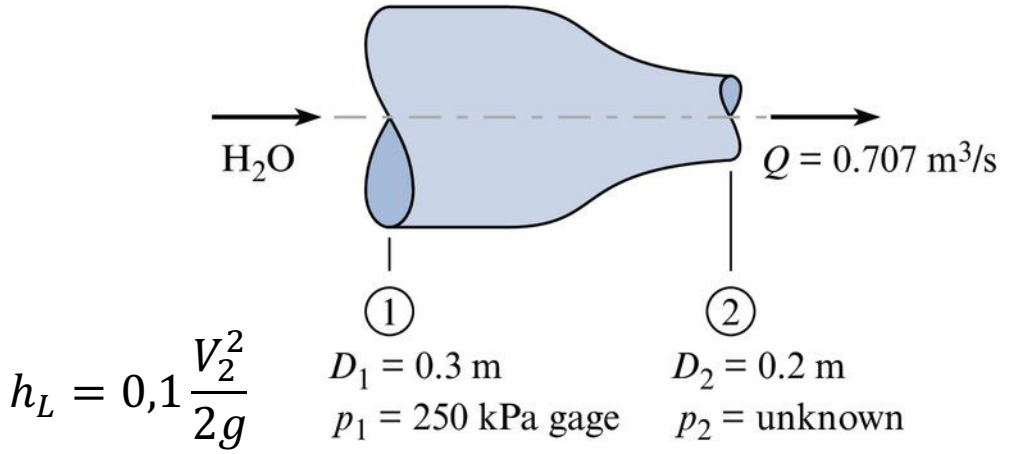
$$p_1 A_1 - p_2 A_2 + F_x = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1$$

- Hastighetene finner vi fra $V = Q/A$

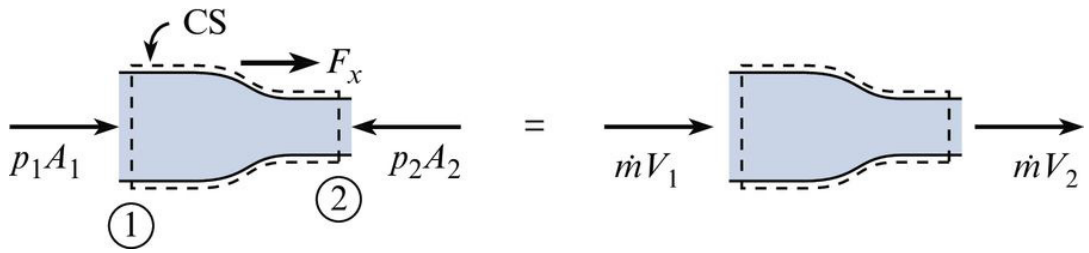
$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = 10.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}; V_2 = \frac{Q}{A_2} = 22.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Trykket p_2 finner vi fra energilikningen

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + 0.1 \frac{V_2^2}{2g} \Longrightarrow p_2 = 21.5 \text{ kPa}$$



$$h_L = 0{,}1 \frac{V_2^2}{2g}$$



EFM Eksempel 7.5

- Hvilken kraft må virke på innsnevringen for å holde den på plass?
- Impulslikningen:

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 + F_x = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1$$

$$V_1 = 10.0\,\mathrm{m/s}\,; V_2 = 22.5\,\mathrm{m/s}$$

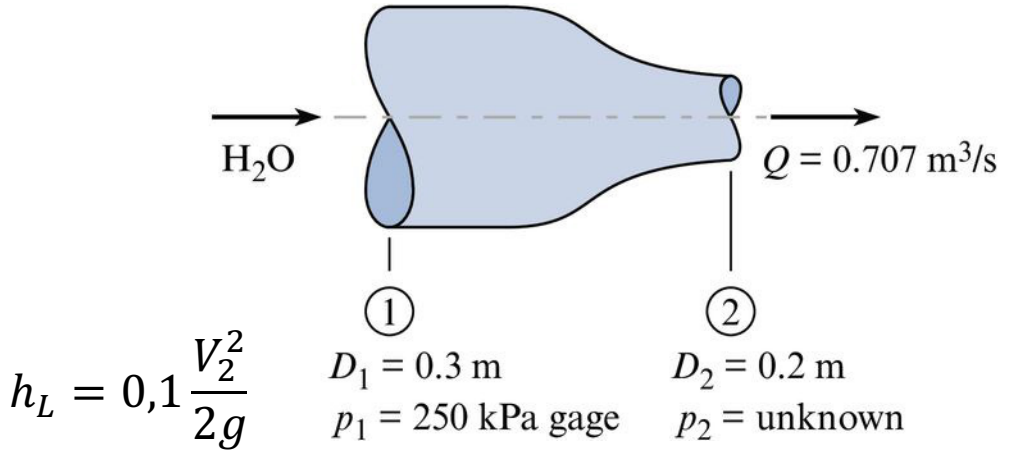
$$p_2 = 21.5\,\mathrm{kPa}$$

- Vi får

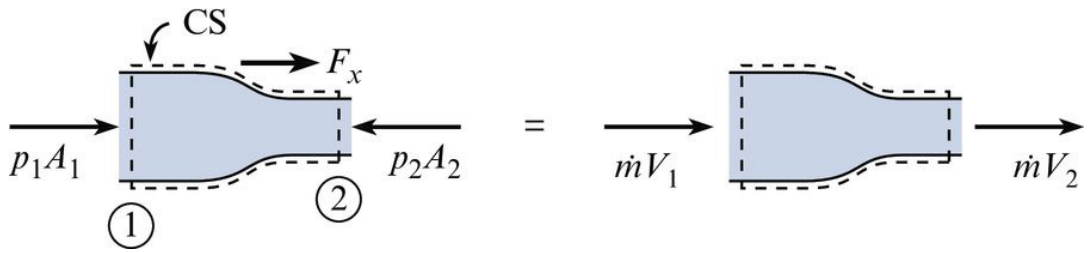
$$F_x = p_2 A_2 - p_1 A_1 + \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1$$

$$= -8.16\,\mathrm{kN}$$

- Kraften virker mot venstre



$$h_L = 0{,}1\frac{V_2^2}{2g}$$



Agenda

- Energilikningen vs. Bernoullis likning
- Effekt og virkningsgrad
- Energitap ved brå utvidelse
- Energilinje og trykklinje



$$\mathrm{EGL} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

$$\mathrm{HGL} = z + \frac{p}{\gamma}$$

Energilinje og trykklinje

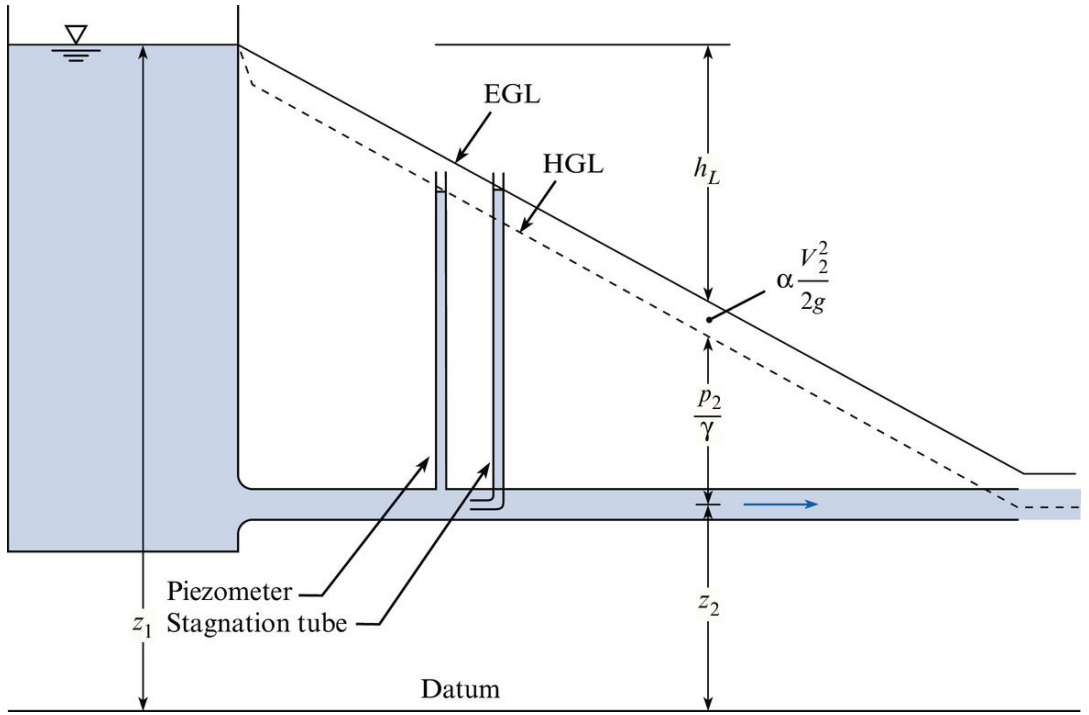
$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

- Meget nyttige grafiske verktøy for å illustrere hvordan energihøydene i energilikningen varierer langs et rør eller en kanal
- Energilinje (energy grade line; EGL) – summen av alle de tre energihøydene

$$\mathrm{EGL} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

- Trykklinje (hydraulic grade line; HGL) – summen av stedshøyde og trykkhøyde

$$\mathrm{HGL} = z + \frac{p}{\gamma}$$



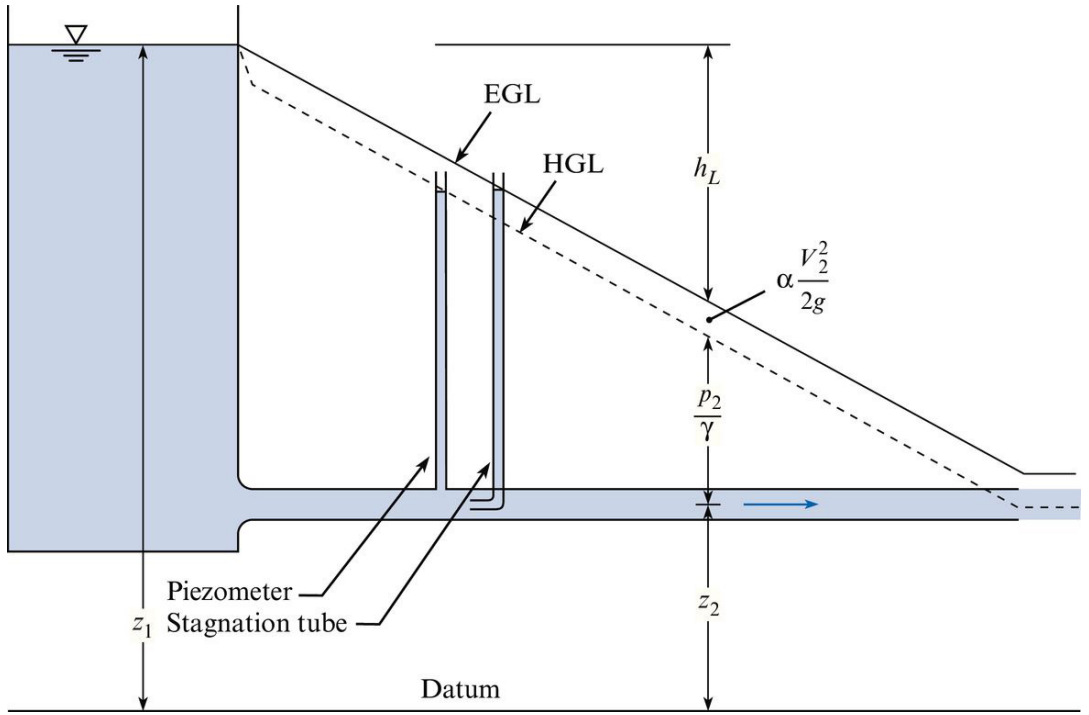
$$\mathrm{EGL} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

$$\mathrm{HGL} = z + \frac{p}{\gamma}$$

Energilinje og trykklinje – regler

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

1. Stort reservoar: EGL og HGL er like og i overflaten
2. En pumpe hever HGL og EGL i et punkt
3. Stasjonær strømning i rør med konstant diameter og ruhet: Helningen på EGL er konstant
4. $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL} = \alpha V^2/2g$
5. $\mathrm{HGL} - z = p/\gamma$
6. EGL synker i strømningsretningen med mindre en pumpe er tilstede
7. En turbin senker HGL og EGL i et punkt
8. Ved en rørende til fri atmosfære er $\mathrm{HGL} = z$
9. En endring i diameter leder til (1) endring i differansen $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL}$ og (2) endring i helningen til EGL
10. Hvis HGL faller under ledningen, har vi trykk lavere enn atmosfæretrykket



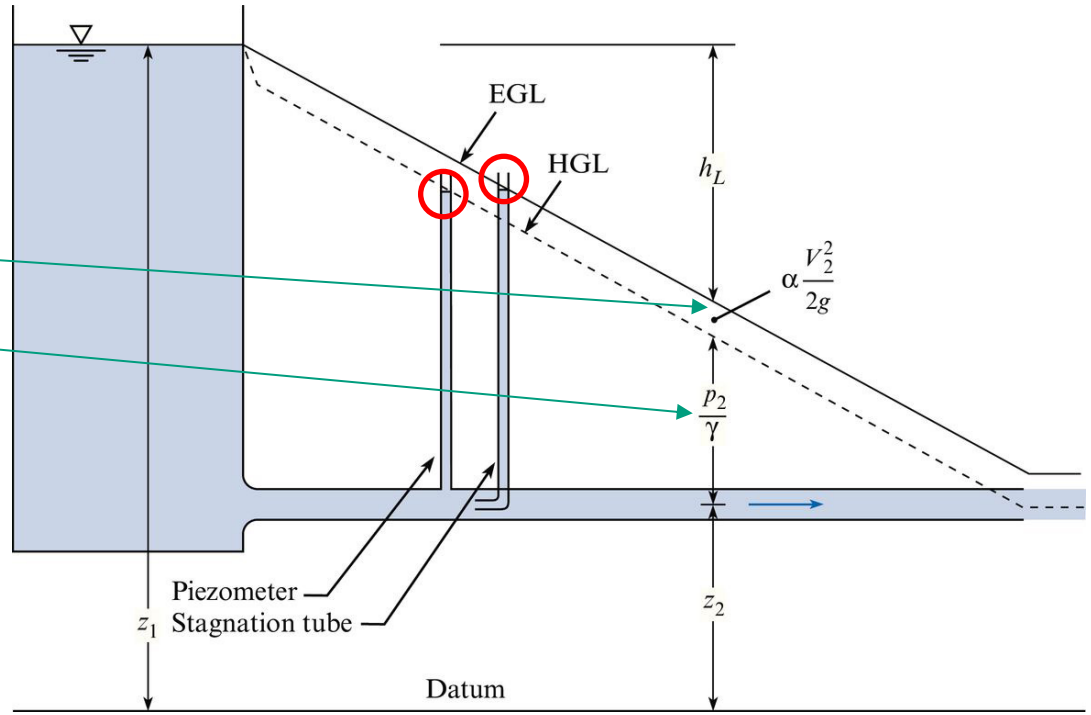
$$\mathrm{EGL} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

$$\mathrm{HGL} = z + \frac{p}{\gamma}$$

Energilinje og trykklinje – regler

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

1. Stort reservoar: EGL og HGL er like og i overflaten
2. En pumpe hever HGL og EGL i et punkt
3. Stasjonær strømning i rør med konstant diameter og ruhet: Helningen på EGL er konstant
4. $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL} = \alpha V^2/2g$
5. $\mathrm{HGL} - z = p/\gamma$
6. EGL synker i strømningsretningen med mindre en pumpe er tilstede
7. En turbin senker HGL og EGL i et punkt
8. Ved en rørende til fri atmosfære er $\mathrm{HGL} = z$
9. En endring i diameter leder til (1) endring i differansen $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL}$ og (2) endring i helningen til EGL
10. Hvis HGL faller under ledningen, har vi trykk lavere enn atmosfæretrykket



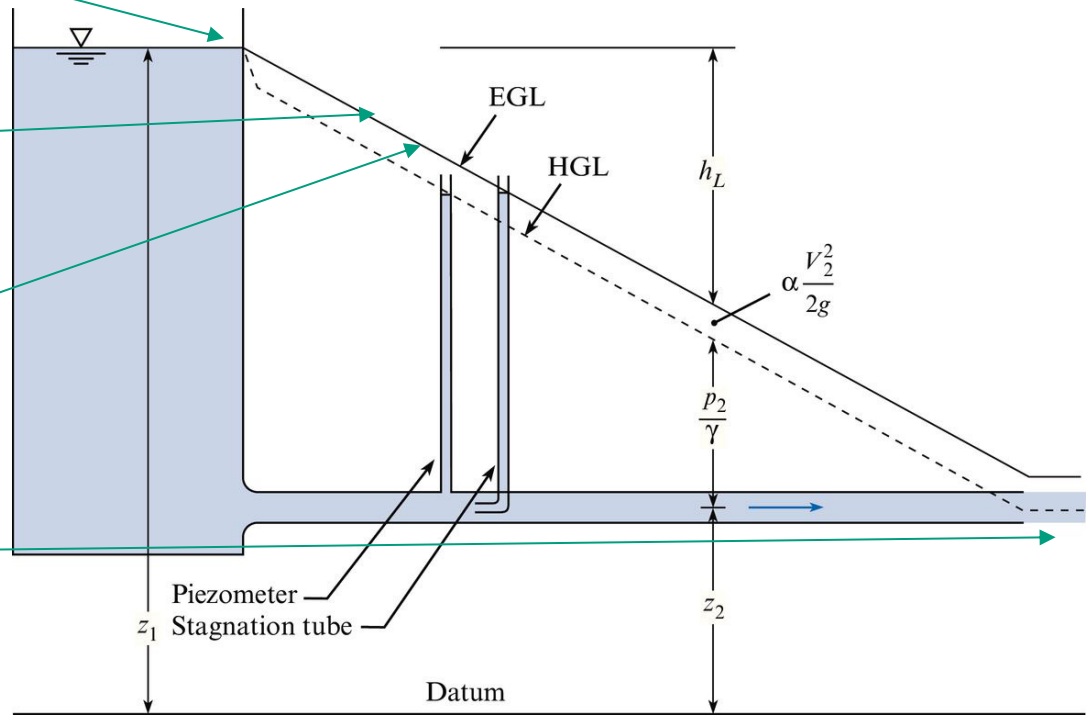
$$\mathrm{EGL} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

$$\mathrm{HGL} = z + \frac{p}{\gamma}$$

Energilinje og trykklinje – regler

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

1. Stort reservoar: EGL og HGL er like og i overflaten
2. En pumpe hever HGL og EGL i et punkt
3. Stasjonær strømning i rør med konstant diameter og ruhet: Helningen på EGL er konstant
4. $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL} = \alpha V^2/2g$
5. $\mathrm{HGL} - z = p/\gamma$
6. EGL synker i strømningsretningen med mindre en pumpe er tilstede
7. En turbin senker HGL og EGL i et punkt
8. Ved en rørende til fri atmosfære er $\mathrm{HGL} = z$
9. En endring i diameter leder til (1) endring i differansen $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL}$ og (2) endring i helningen til EGL
10. Hvis HGL faller under ledningen, har vi trykk lavere enn atmosfæretrykket



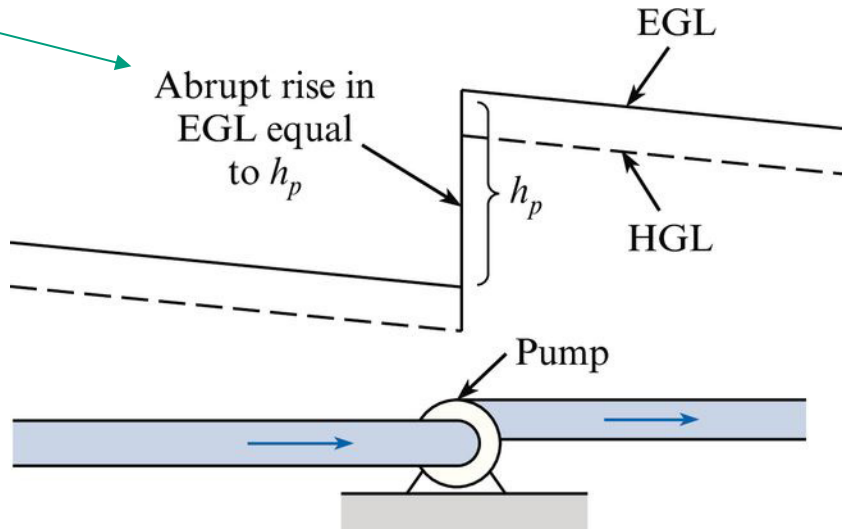
$$\mathrm{EGL} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

$$\mathrm{HGL} = z + \frac{p}{\gamma}$$

Energilinje og trykklinje – regler

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

1. Stort reservoar: EGL og HGL er like og i overflaten
2. En pumpe hever HGL og EGL i et punkt
3. Stasjonær strømning i rør med konstant diameter og ruhet: Helningen på EGL er konstant
4. $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL} = \alpha V^2/2g$
5. $\mathrm{HGL} - z = p/\gamma$
6. EGL synker i strømningsretningen med mindre en pumpe er tilstede
7. En turbin senker HGL og EGL i et punkt
8. Ved en rørende til fri atmosfære er $\mathrm{HGL} = z$
9. En endring i diameter leder til (1) endring i differansen $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL}$ og (2) endring i helningen til EGL
10. Hvis HGL faller under ledningen, har vi trykk lavere enn atmosfæretrykket



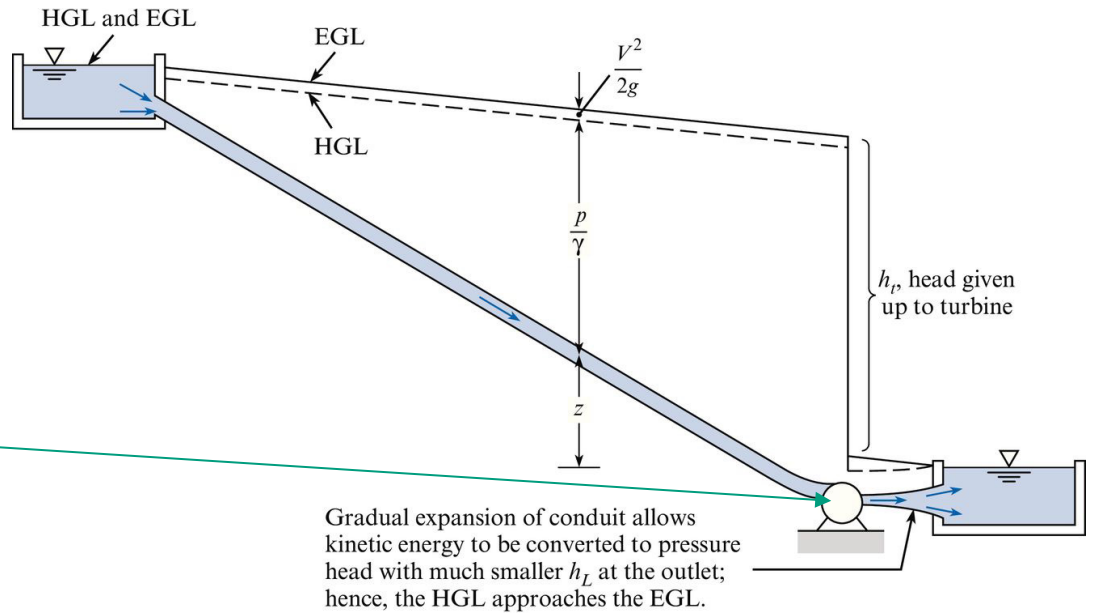
Energilinje og trykklinje – regler

$$\mathrm{EGL} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

$$\mathrm{HGL} = z + \frac{p}{\gamma}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

1. Stort reservoar: EGL og HGL er like og i overflaten
2. En pumpe hever HGL og EGL i et punkt
3. Stasjonær strømning i rør med konstant diameter og ruhet: Helningen på EGL er konstant
4. $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL} = \alpha V^2/2g$
5. $\mathrm{HGL} - z = p/\gamma$
6. EGL synker i strømningsretningen med mindre en pumpe er tilstede
7. En turbin senker HGL og EGL i et punkt
8. Ved en rørende til fri atmosfære er $\mathrm{HGL} = z$
9. En endring i diameter leder til (1) endring i differansen $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL}$ og (2) endring i helningen til EGL
10. Hvis HGL faller under ledningen, har vi trykk lavere enn atmosfæretrykket



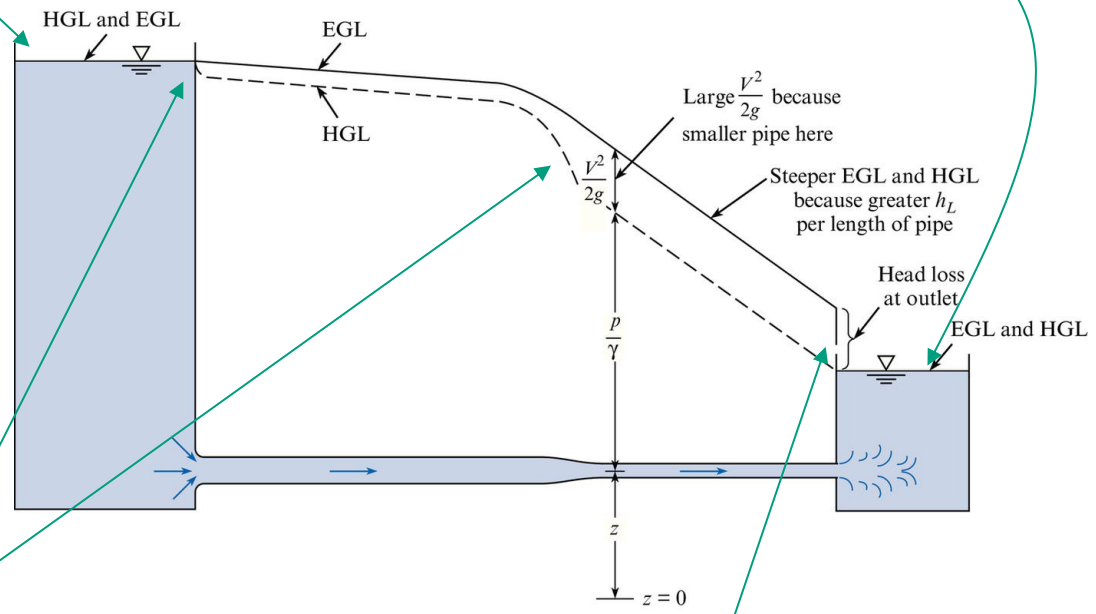
Energilinje og trykklinje – regler

$$\mathrm{EGL} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

$$\mathrm{HGL} = z + \frac{p}{\gamma}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

1. Stort reservoar: EGL og HGL er like og i overflaten
2. En pumpe hever HGL og EGL i et punkt
3. Stasjonær strømning i rør med konstant diameter og ruhet: Helningen på EGL er konstant
4. $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL} = \alpha V^2/2g$
5. $\mathrm{HGL} - z = p/\gamma$
6. EGL synker i strømningsretningen med mindre en pumpe er tilstede
7. En turbin senker HGL og EGL i et punkt
8. Ved en rørende til fri atmosfære er $\mathrm{HGL} = z$
9. En endring i diameter leder til (1) endring i differansen $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL}$ og (2) endring i helningen til EGL
10. Hvis HGL faller under ledningen, har vi trykk lavere enn atmosfæretrykket



For overgang fra et rør til et stort reservoar der $V_2 = 0$ får vi

$$h_L = \frac{V^2}{2g}$$

Vi taper hele hastighetshøyden!

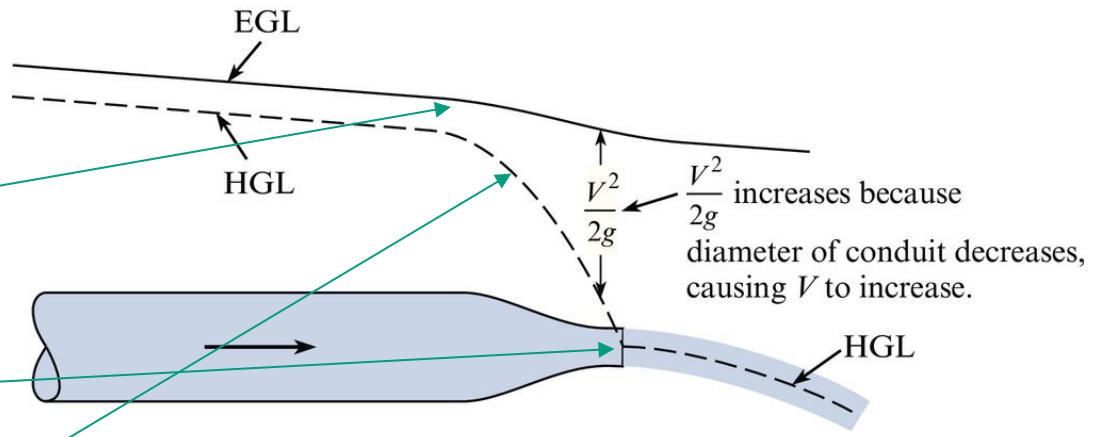
$$\mathrm{EGL} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

$$\mathrm{HGL} = z + \frac{p}{\gamma}$$

Energilinje og trykklinje – regler

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

1. Stort reservoar: EGL og HGL er like og i overflaten
2. En pumpe hever HGL og EGL i et punkt
3. Stasjonær strømning i rør med konstant diameter og ruhet: Helningen på EGL er konstant
4. $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL} = \alpha V^2/2g$
5. $\mathrm{HGL} - z = p/\gamma$
6. EGL synker i strømningsretningen med mindre en pumpe er tilstede
7. En turbin senker HGL og EGL i et punkt
8. Ved en rørende til fri atmosfære er $\mathrm{HGL} = z$
9. En endring i diameter leder til (1) endring i differansen $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL}$ og (2) endring i helningen til EGL
10. Hvis HGL faller under ledningen, har vi trykk lavere enn atmosfæretrykket



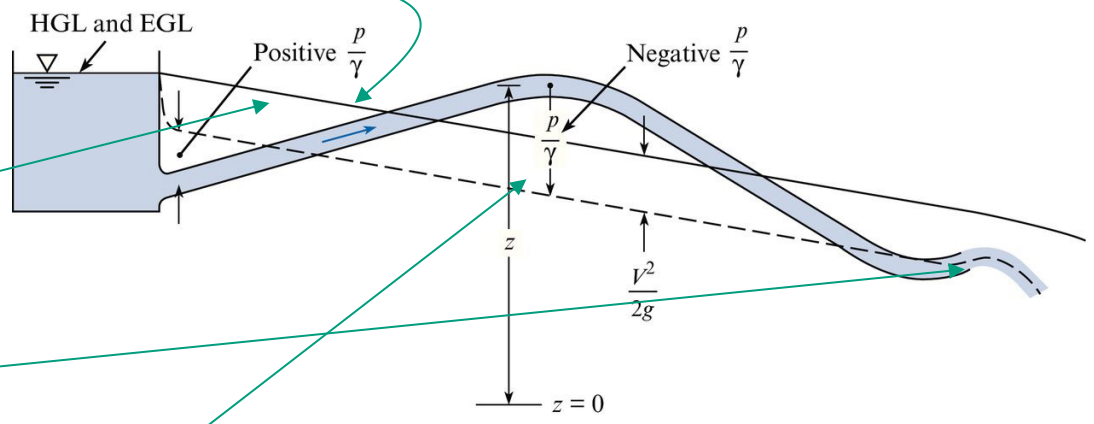
$$\mathrm{EGL} = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

$$\mathrm{HGL} = z + \frac{p}{\gamma}$$

Energilinje og trykklinje – regler

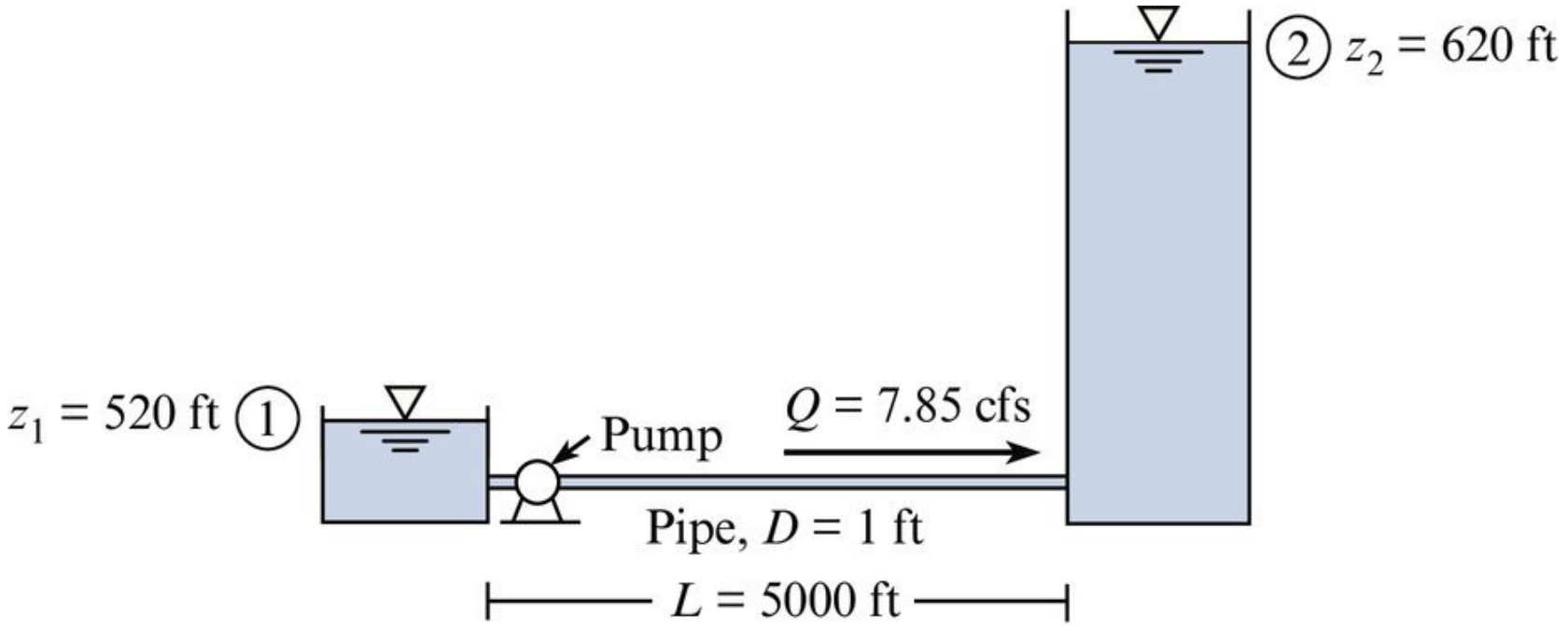
$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1\frac{V_1^2}{2g} + h_p = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2\frac{V_2^2}{2g} + h_t + h_L$$

1. Stort reservoar: EGL og HGL er like og i overflaten
2. En pumpe hever HGL og EGL i et punkt
3. Stasjonær strømning i rør med konstant diameter og ruhet: Helningen på EGL er konstant
4. $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL} = \alpha V^2/2g$
5. $\mathrm{HGL} - z = p/\gamma$
6. EGL synker i strømningsretningen med mindre en pumpe er tilstede
7. En turbin senker HGL og EGL i et punkt
8. Ved en rørende til fri atmosfære er $\mathrm{HGL} = z$
9. En endring i diameter leder til (1) endring i differansen $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL}$ og (2) endring i helningen til EGL
10. Hvis HGL faller under ledningen, har vi trykk lavere enn atmosfæretrykket



EFM Eksempel 7.6

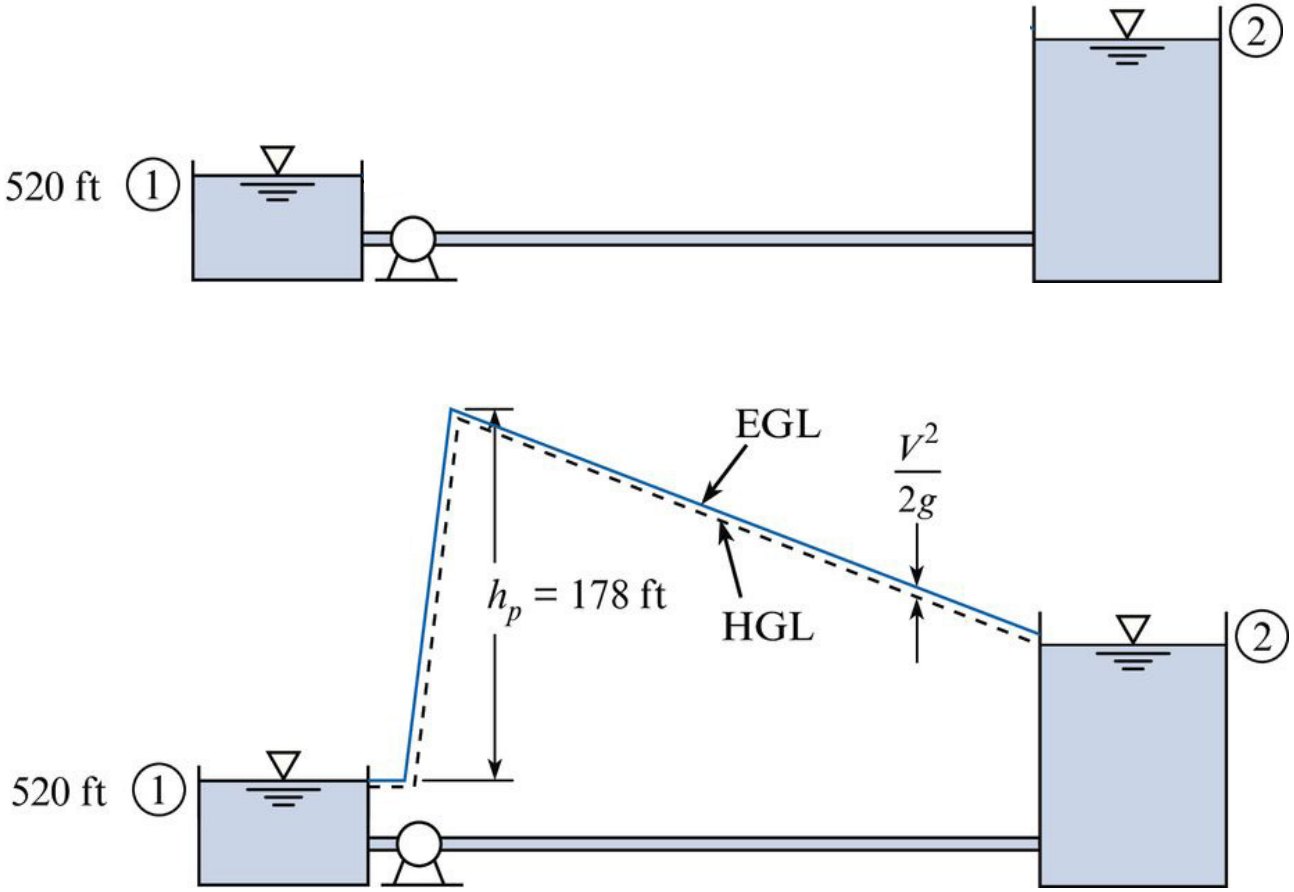
- Skisser kvalitativt trykklinjen og energilinjen for det viste systemet



EFM Eksempel 7.6

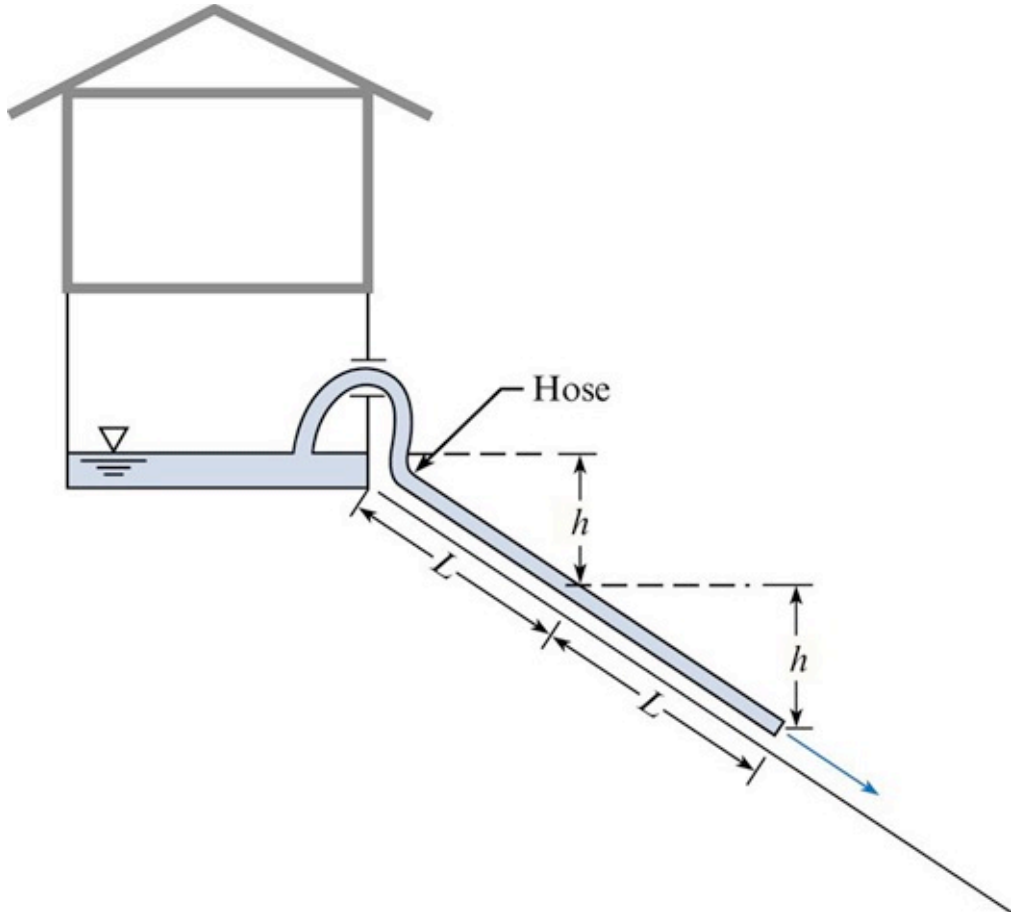
- Skisser kvalitativt trykklinjen og energilinjen for det viste systemet

1. Stort reservoar: EGL og HGL er like og i overflaten
2. En pumpe hever HGL og EGL i et punkt
3. Stasjonær strømning i rør med konstant diameter og ruhet: Helningen på EGL er konstant
4. $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL} = \alpha V^2/2g$
5. $\mathrm{HGL} - z = p/\gamma$
6. EGL synker i strømningsretningen med mindre en pumpe er tilstede
7. En turbin senker HGL og EGL i et punkt
8. Ved en rørende til fri atmosfære er $\mathrm{HGL} = z$
9. En endring i diameter leder til (1) endring i differansen $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL}$ og (2) endring i helningen til EGL
10. Hvis HGL faller under ledningen, har vi trykk lavere enn atmosfæretrykket



Obligatorisk oppgave 2019 – Oppgave 4

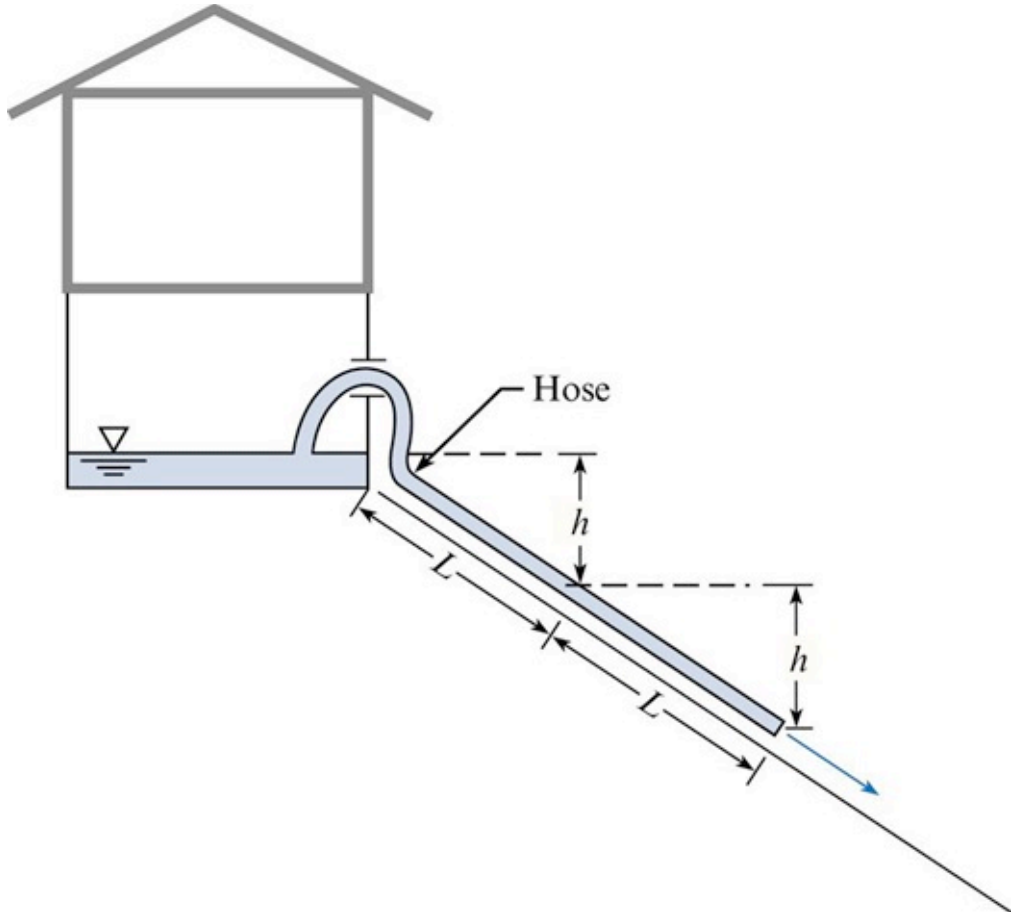
- Skisser kvalitativt trykklinjen og energilinjen for det viste systemet for to ulike situasjoner
    1. Uten å ta hensyn til tap
    2. Ved å ta hensyn til tap



Obligatorisk oppgave 2019 – Oppgave 4

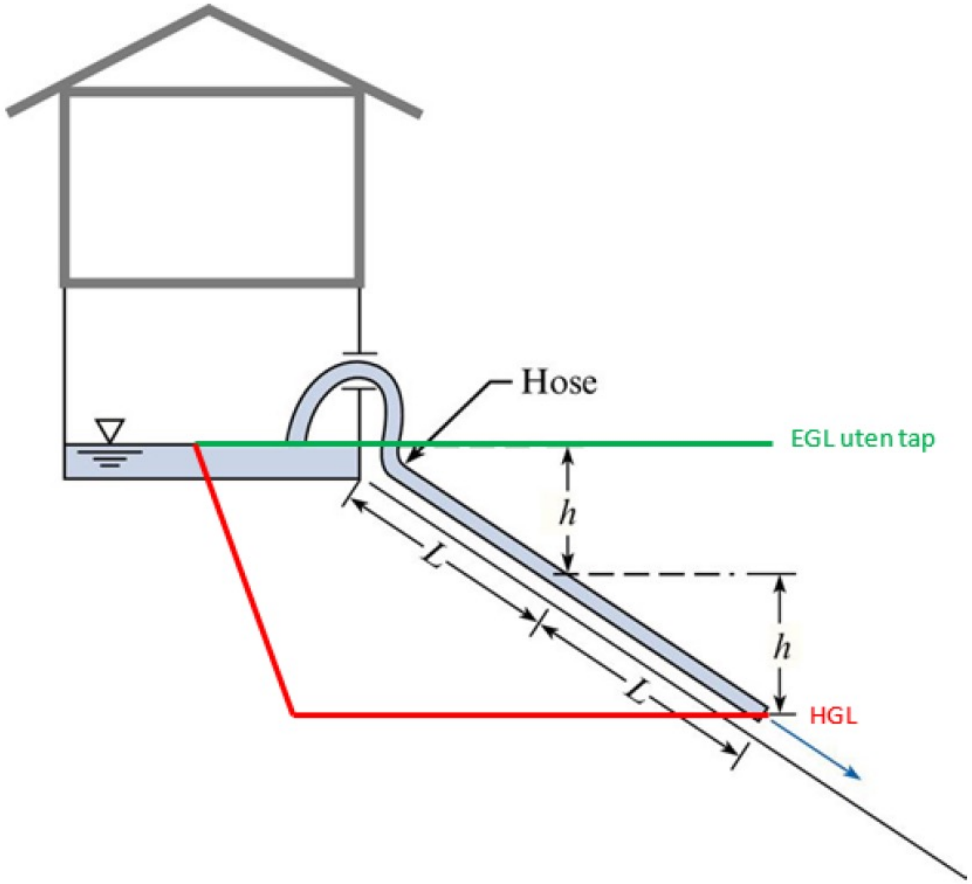
- Skisser kvalitativt trykklinjen og energilinjen for det viste systemet for to ulike situasjoner

1. Stort reservoar: EGL og HGL er like og i overflaten
2. En pumpe hever HGL og EGL i et punkt
3. Stasjonær strømning i rør med konstant diameter og ruhet: Helningen på EGL er konstant
4. $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL} = \alpha V^2/2g$
5. $\mathrm{HGL} - z = p/\gamma$
6. EGL synker i strømningsretningen med mindre en pumpe er tilstede
7. En turbin senker HGL og EGL i et punkt
8. Ved en rørende til fri atmosfære er $\mathrm{HGL} = z$
9. En endring i diameter leder til (1) endring i differansen $\mathrm{EGL} - \mathrm{HGL}$ og (2) endring i helningen til EGL
10. Hvis HGL faller under ledningen, har vi trykk lavere enn atmosfæretrykket



Obligatorisk oppgave 2019 – Oppgave 4

- Skisser kvalitativt trykklinjen og energilinjen for det viste systemet for to ulike situasjoner
  1. Uten å ta hensyn til tap
  2. Ved å ta hensyn til tap



Obligatorisk oppgave 2019 – Oppgave 4

- Skisser kvalitativt trykklinjen og energilinjen for det viste systemet for to ulike situasjoner
    1. Uten å ta hensyn til tap
    2. Ved å ta hensyn til tap

