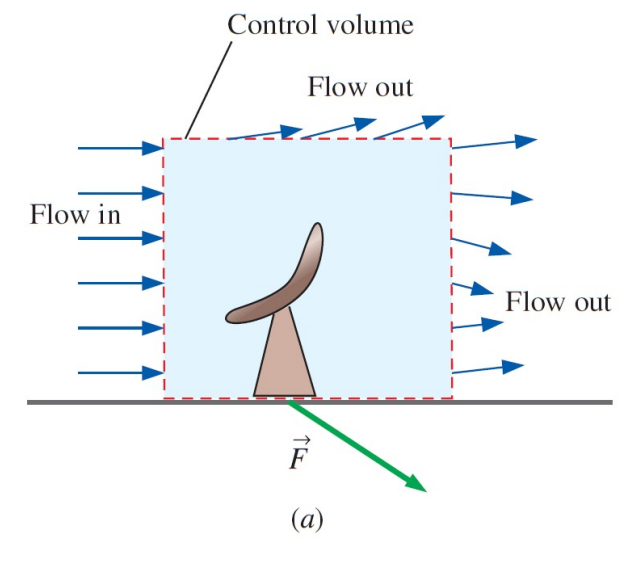
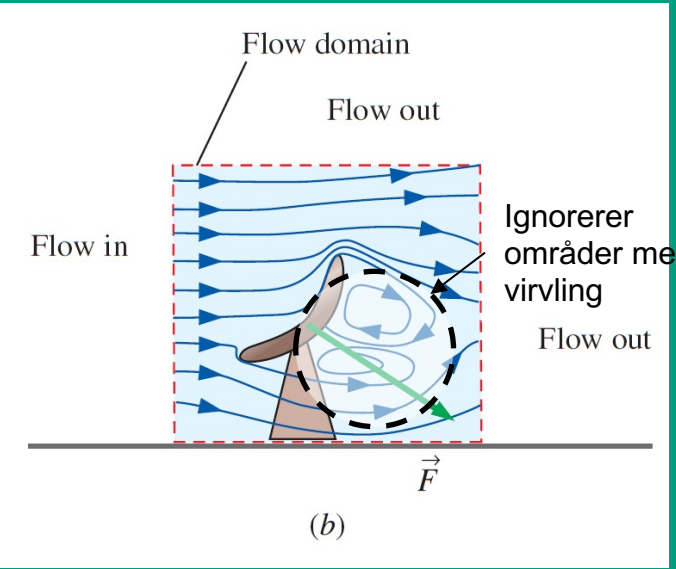
25 –Differensiell strømningsbeskrivelse: effekter av viskositet og Navier-Stokes likningene

TPS200 – Fluidmekanikk 1: Innføring

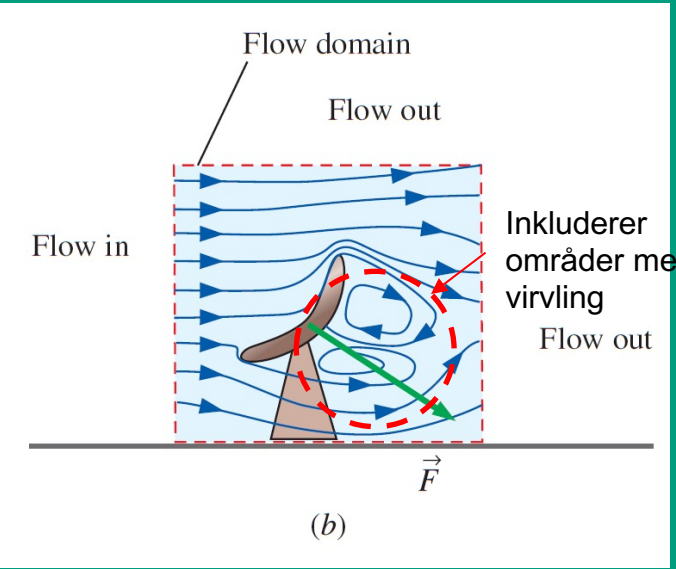
02-05-2022 EFM 16.4 – 16.7 + MFMo > Dynamics



Kontrollvolum: Bryr oss ikke om detaljer i strømningen



Differensiell tilnærming fra sist: Løser opp detaljer i strømningen, men ignorerer viskositetseffekter



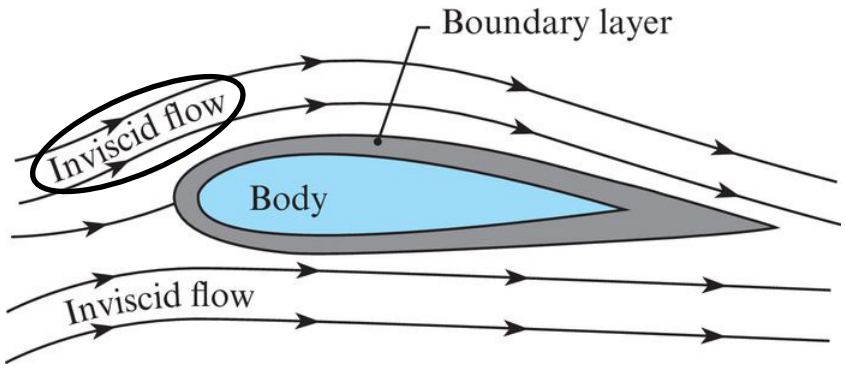
Differensiell tilnærming i dag: Løser opp detaljer i strømningen. Inkluderer viskositetseffekter

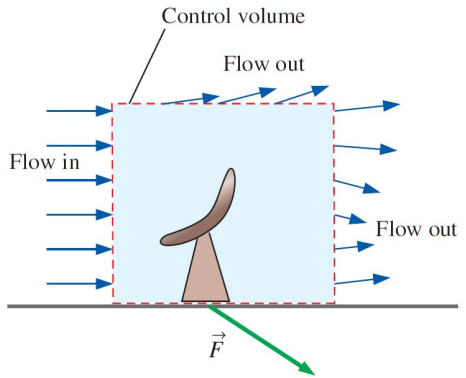
Mindre detaljert

Mer detaljert

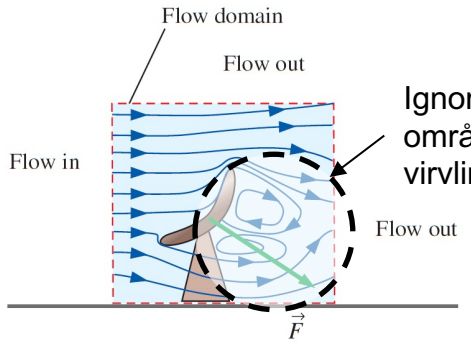
Fra sist: **Friksjonsfri strømning**

- Forenkle matematikken ved å anta *friksjonsfri* strømning – vi får da det som kalles *potensialstrømning*
- Hastighetsfelt fra Eulers likning + kontinuitetslikningen = Laplace likningen





(*a*)



(*b*)

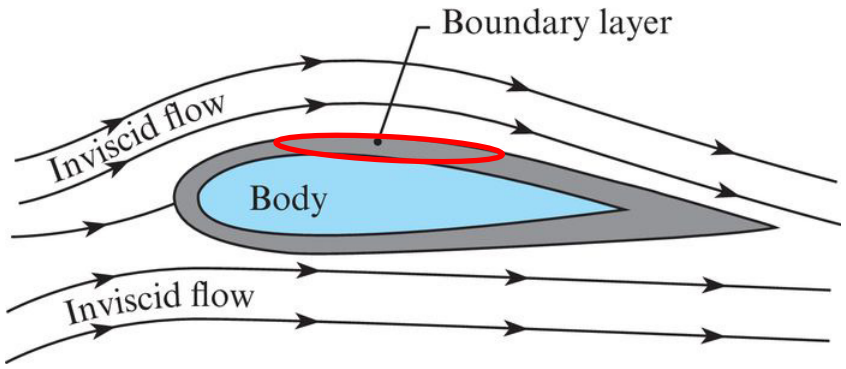
Ignorerer områder med virvling

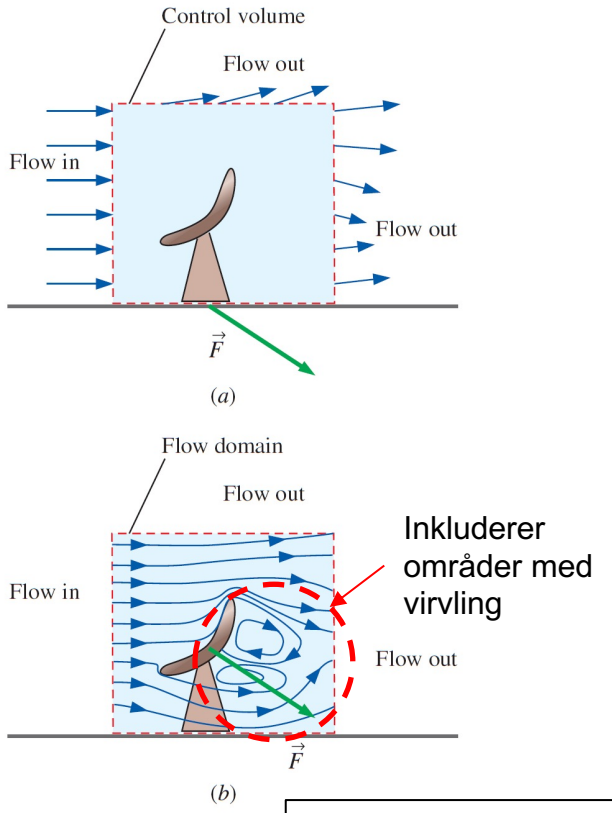
Cengel & Cimbala (2018)

FIGURE 9–1
(*a*) In control volume analysis, the interior of the control volume is treated like a black box, but (*b*) in differential analysis, *all* the details of the flow are solved at *every* point within the flow domain.

I dag: Regne ut hastighetsfelt til **strømning med friksjon**

- Friksjon skyldes hastighetsvariasjoner på tvers av hovedstrømningen (dvs. hastighetsgradienter).
- Hastighetsgradientene kommer av at fluidet har en endelig viskositet





Cengel & Cimbala (2018)

FIGURE 9–1
(*a*) In control volume analysis, the interior of the control volume is treated like a black box, but (*b*) in differential analysis, *all* the details of the flow are solved at *every* point within the flow domain.

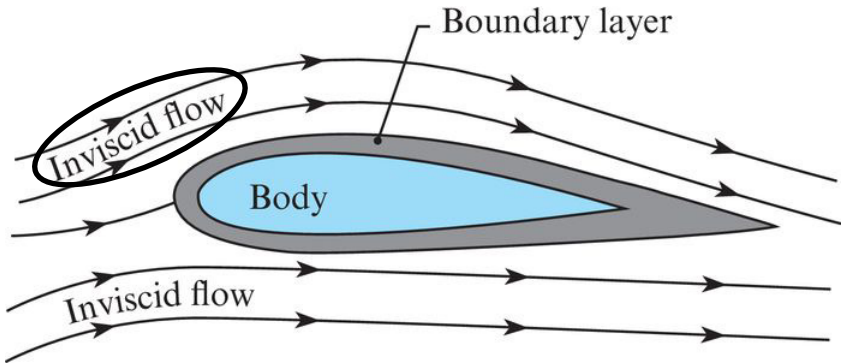
Fra sist: Hvis strømningen er friksjonsfri reduseres Newtons andre lov på differensialform til Eulers likning

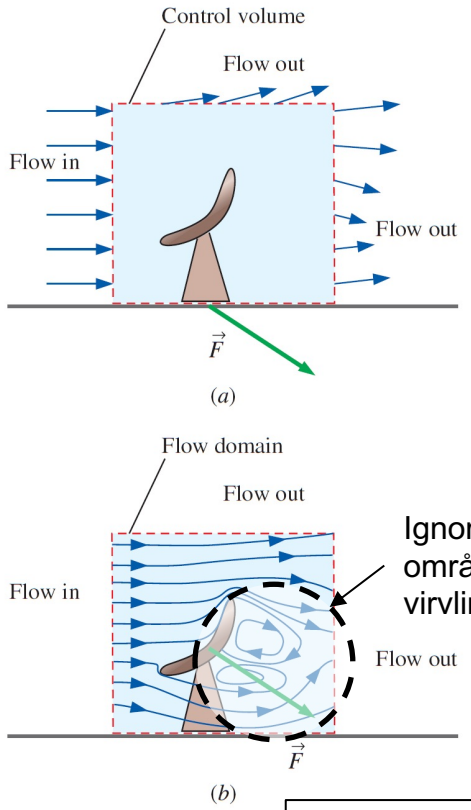
- Forenkle matematikken ved å anta *virvelfri* strømning – vi får da det som kalles *potensialstrømning*
- Newtons andre lov på differensialform:

$$\rho \boldsymbol{a} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u}$$

kan skrives som Eulers likning hvis strømningen er friksjonsfri eller virvelfri:

$$\boxed{\rho \boldsymbol{a} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}}$$





Cengel & Cimbala (2018)

FIGURE 9–1
(*a*) In control volume analysis, the interior of the control volume is treated like a black box, but (*b*) in differential analysis, *all* the details of the flow are solved at *every* point within the flow domain.

Fra sist: Hvis strømningen er friksjonsfri reduseres Newtons andre lov på differensialform til Eulers likning

- Forenkle matematikken ved å anta *virvelfri* strømning – vi får da det som kalles *potensialstrømning*
- Newtons andre lov på differensialform:

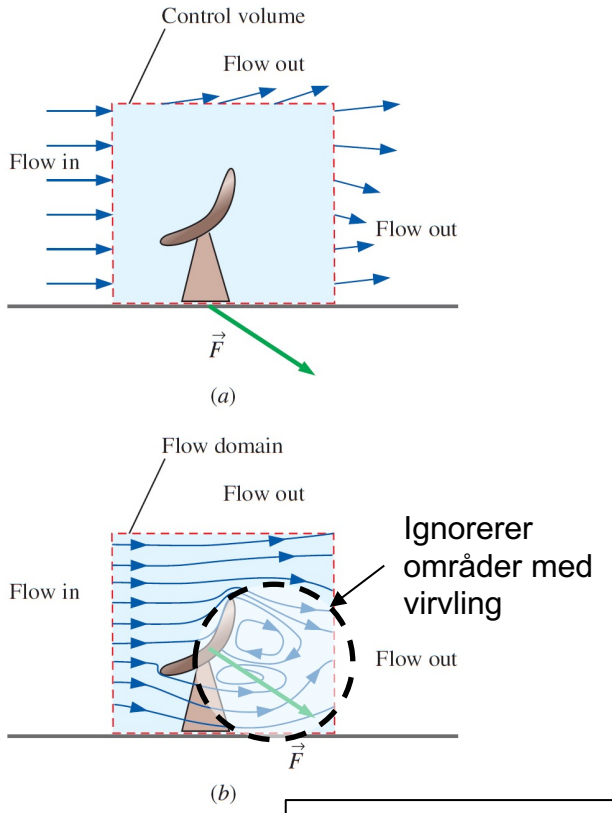
$$\rho \boldsymbol{a} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u}$$

kan skrives som Eulers likning hvis strømningen er friksjonsfri eller virvelfri:

$$\rho \boldsymbol{a} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$$

- Ved å kombinere Eulers likning med kontinuitetslikningen for inkompressiblel strømning (massbevaring) kan vi løse hastighetsfeltet:

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0}$$



Cengel & Cimbala (2018)

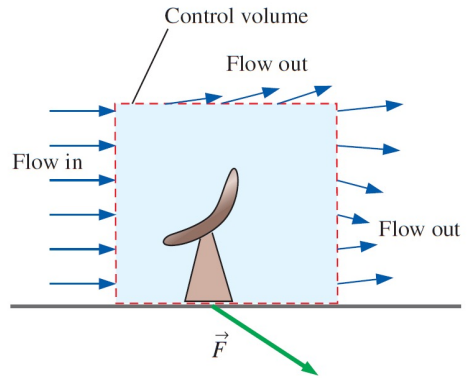
FIGURE 9–1
(*a*) In control volume analysis, the interior of the control volume is treated like a black box, but (*b*) in differential analysis, *all* the details of the flow are solved at *every* point within the flow domain.

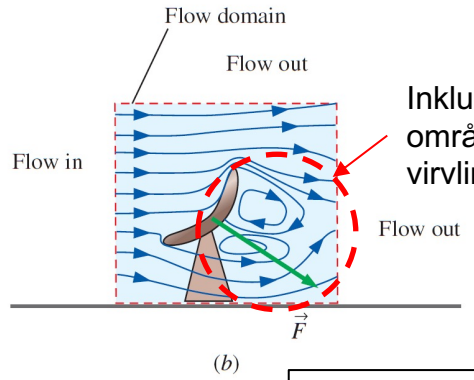
I dag: Hvis strømningen er har friksjon må vi inkludere viskositetsleddet i Newtons andre lov

- Newtons andre lov på differensialform:

$$\rho \boldsymbol{a} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u}$$

Viskøs skjærkraft per volumenhet

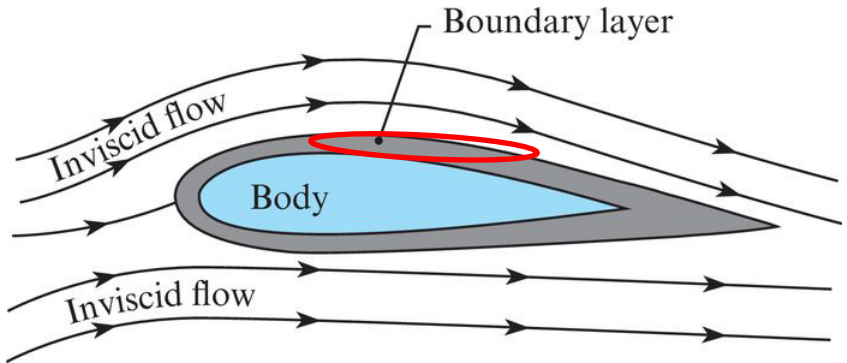




Inkluderer områder med virvling

Cengel & Cimbala (2018)

FIGURE 9–1
(*a*) In control volume analysis, the interior of the control volume is treated like a black box, but (*b*) in differential analysis, *all* the details of the flow are solved at *every* point within the flow domain.



I dag: Hvis strømningen er har friksjon må vi inkludere viskositetsleddet i Newtons andre lov

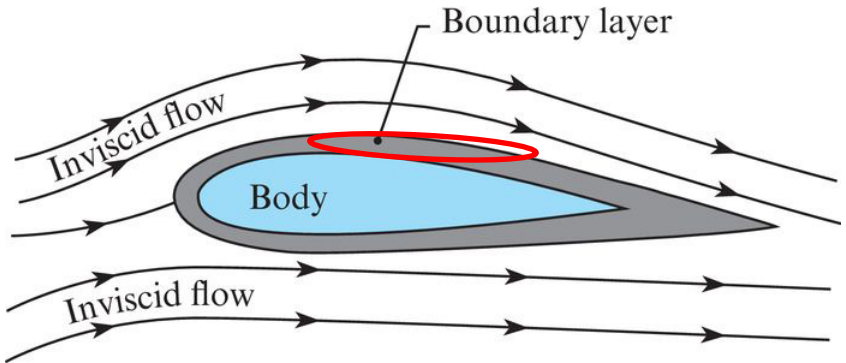
- Newtons andre lov på differensialform:

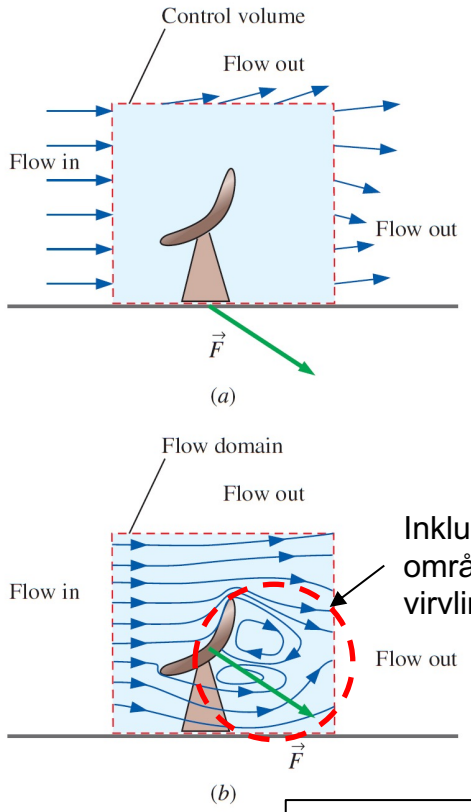
$$\rho \boldsymbol{a} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u}$$

Viskøs skjærkraft per volumenhet

- Vi kombinerer Newtons andre lov med kontinuitetslikningen for å regne ut hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0$$





Cengel & Cimbala (2018)

FIGURE 9–1
(*a*) In control volume analysis, the interior of the control volume is treated like a black box, but (*b*) in differential analysis, *all* the details of the flow are solved at *every* point within the flow domain.

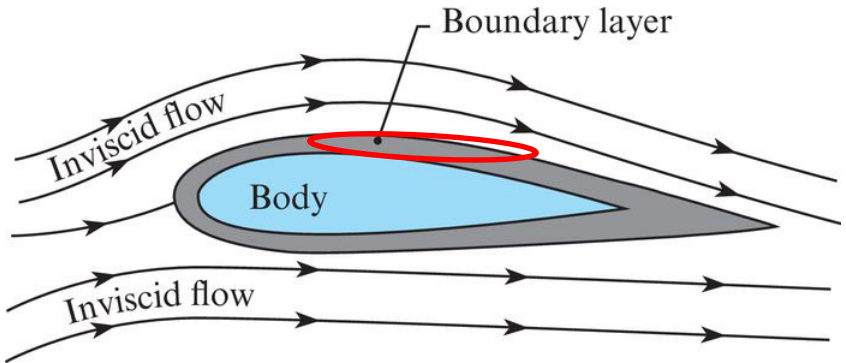
Newtons andre lov med friksjon pluss kontinuitetslikningen kalles Navers-Stokes' likninger

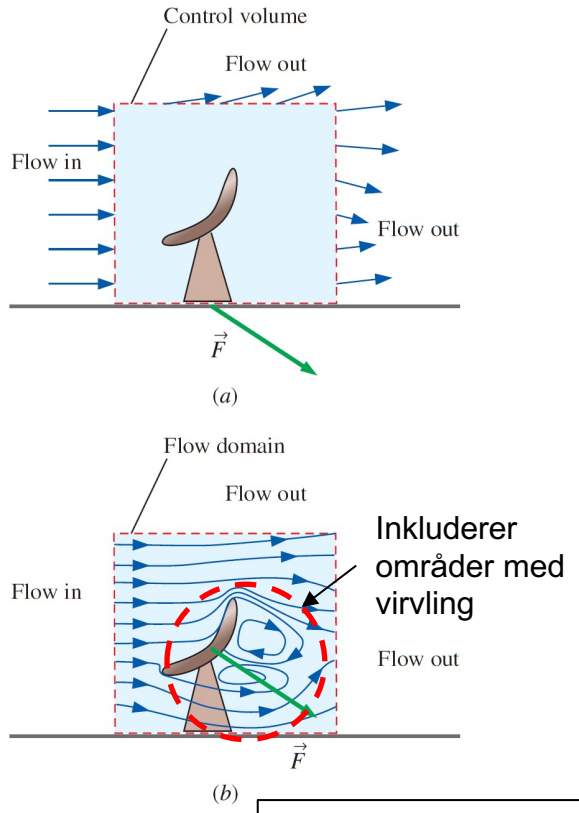
- Newtons andre lov på differensialform:

$$\rho \boldsymbol{a} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{u}$$

- Vi kombinerer Newtons andre lov med kontinuitetslikningen for å regne ut hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0$$



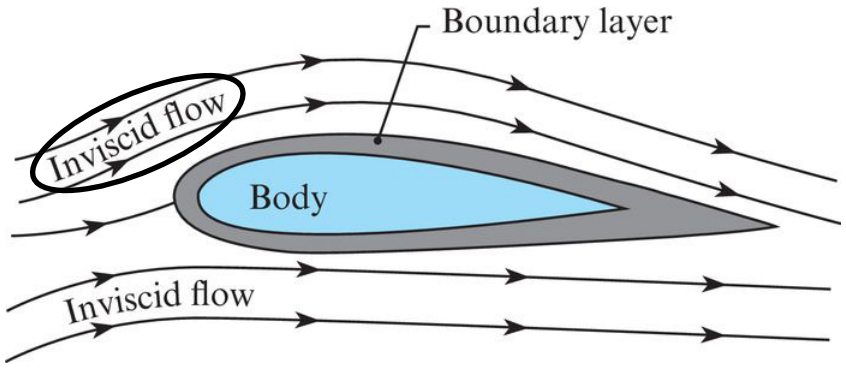


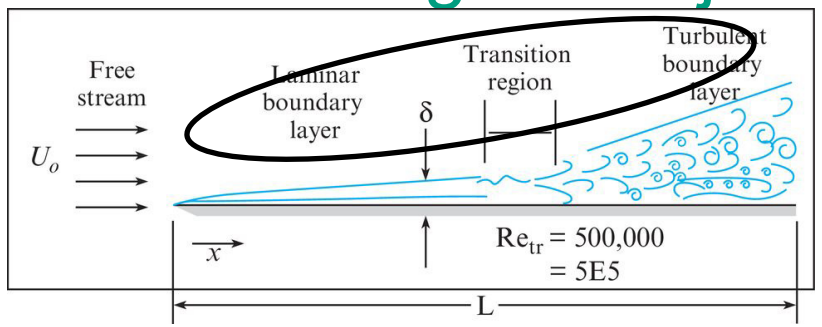
Cengel & Cimbala (2018)

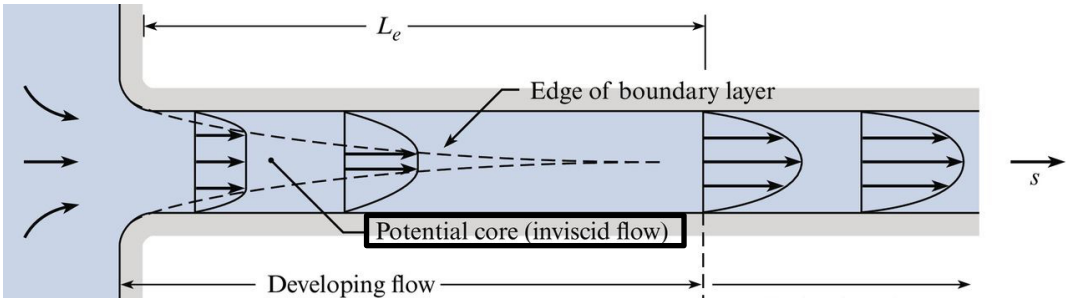
FIGURE 9–1
(*a*) In control volume analysis, the interior of the control volume is treated like a black box, but (*b*) in differential analysis, *all* the details of the flow are solved at *every* point within the flow domain.

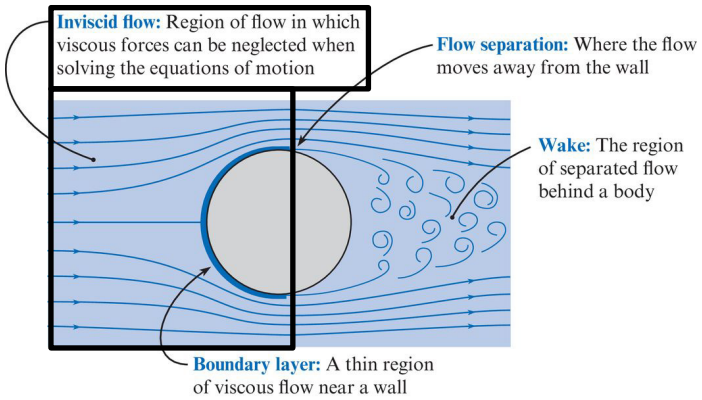
Fra sist: Når er strømningen friksjonsfri?
Strømningen er ofte friksjonsfri utenfor det viskøse grensesjiktet

- Når er strømningen virvelfri/friksjonsfri?
  - Sånn ca. når strømningen er friksjonsfri ($Re \ -> \infty$)
  - Utenfor grensesjiktet nær faste flater
  - God tilnærming i mange situasjoner, f.eks. flyvinger



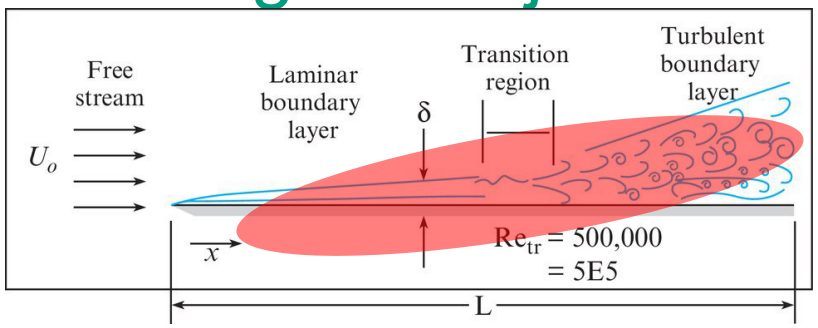


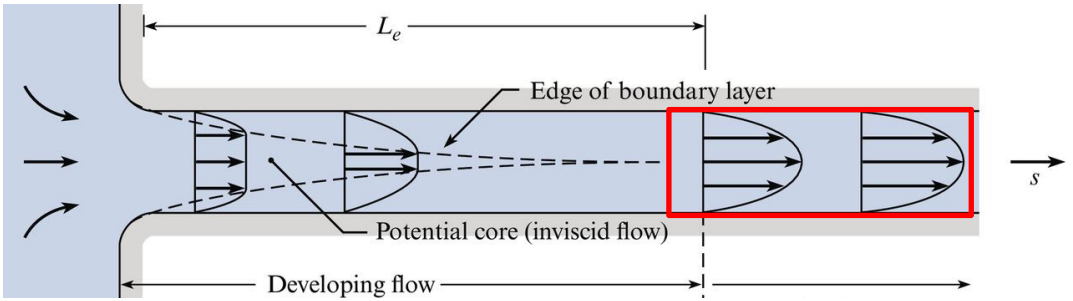


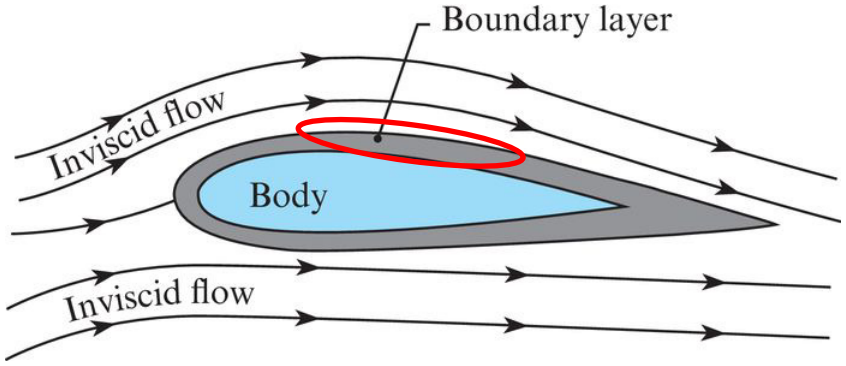


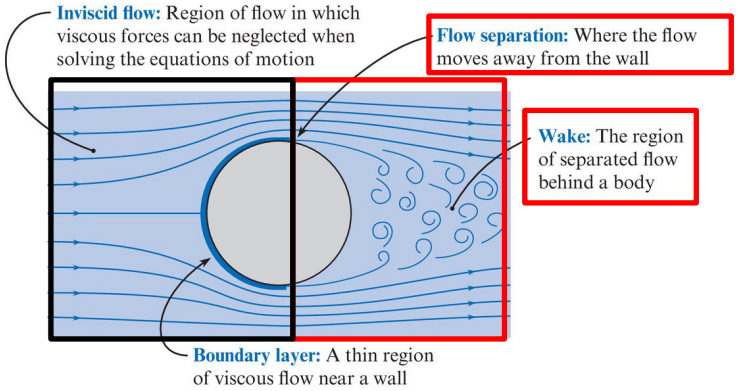
I dag: Når må vi inkludere effekter av viskositet?
Strømningen har friksjon innenfor det viskøse grensesjiktet

- Når er strømningen ikke virvelfri/friksjonsfri?
  - Ved endelig Re ($Re < \infty$)
  - Innenfor grensesjiktet nær faste flater
  - God tilnærming i mange situasjoner, f.eks. flyvinger









Bevaringslover oppsummert

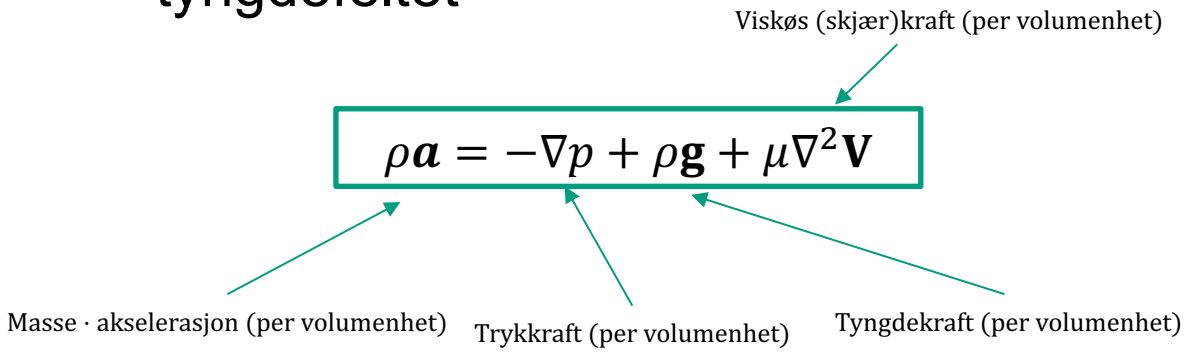
Fysisk lov	Generell integralform (kontrollvolumform)	Spesialtilfelle	Differensiell form
Newtons 2. lov (bevaring av bevegelsesmengde)	$(\sum \mathbf{F})_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} \mathbf{v}\rho dV + \int_{\text{cs}} \rho\mathbf{v}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA})$ (impulslikningen)	Ro og likevekt	$-\nabla p + \rho\mathbf{g} = 0$ (hydrostatisk grunnlikning)
		Friksjonsfri strømning ($\mu = 0$)	$-\nabla p + \rho\mathbf{g} = \rho\mathbf{a}$ (Eulers likning)
		Friksjonsfri og virvelfri strømning ($\nabla\times\mathbf{V} = 0$)	$-\nabla p + \rho\mathbf{g} = \rho\mathbf{a}$ (Eulers likning)
		Inkompressibelt og Newtonsk fluid ($\rho, \mu = \text{konstant}$)	$-\nabla p + \rho\mathbf{g} = \rho\mathbf{a} + \mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u}$
Bevaring av masse	$\frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} \rho dV + \int_{\text{cs}} \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA} = 0$ (kontinuitetslikningen)	Ingen (generell)	$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0$
		Inkompressibel strømning	$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$
Bevaring av energi	$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} e\rho dV + \int_{\text{cs}} e\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$ (energilikningen)	Ingen (generell)	Ikke i TPS200

I dag: Navier-Stokes likningene brukes til å regne ut hastighetsfelt og trykkfelt

Fysisk lov	Generell integralform (kontrollvolumform)	Spesialtilfelle	Differensiell form
Newtons 2. lov (bevaring av bevegelsesmengde)	$(\sum \mathbf{F})_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} \mathbf{v}\rho dV + \int_{\text{cs}} \rho\mathbf{v}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA})$ (impulslikningen)	Ro og likevekt	$-\nabla p + \rho\mathbf{g} = 0$ (hydrostatisk grunnlikning)
		Friksjonsfri strømning ($\mu = 0$)	$-\nabla p + \rho\mathbf{g} = \rho\mathbf{a}$ (Eulers likning)
		Friksjonsfri og virvelfri strømning ($\nabla\times\mathbf{V} = 0$)	$-\nabla p + \rho\mathbf{g} = \rho\mathbf{a}$ (Eulers likning)
		Inkompressibelt og Newtonsk fluid ($\rho, \mu = \text{konstant}$)	$-\nabla p + \rho\mathbf{g} = \rho\mathbf{a} + \mu\nabla^2\boldsymbol{u}$
Bevaring av masse	$\frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} \rho dV + \int_{\text{cs}} \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA} = 0$ (kontinuitetslikningen)	Ingen (generell)	$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0$
		Inkompressibel strømning	$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$
Bevaring av energi	$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} e\rho dV + \int_{\text{cs}} e\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$ (energilikningen)	Ingen (generell)	Ikke i TPS200

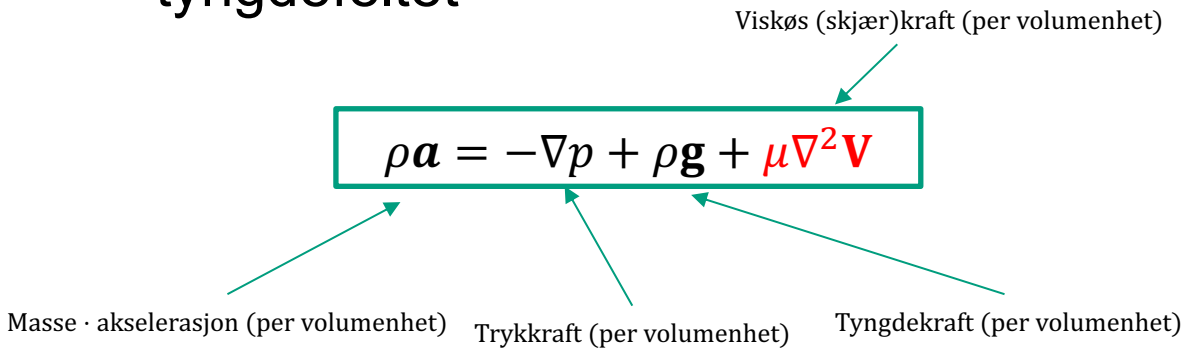
Navier-Stokes bevegelseslikning

- Navier-Stokes bevegelseslikning er Newtons 2. lov for et *Newtonsk* fluid i tyngdefeltet



Navier-Stokes bevegelseslikning

- Navier-Stokes bevegelseslikning er Newtons 2. lov for et *Newtonsk* fluid i tyngdefeltet



- Leddet $\mu \nabla^2 \mathbf{V}$ er som vist til høyre

- En vektorlikning – består av tre skalare likninger

$$\rho a_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho a_y = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho a_z = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Matematisk uttrykk for akselerasjon (kartesiske koordinater)

- Vi har altså:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{du}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv}{dt}\mathbf{j} + \frac{dw}{dt}\mathbf{k}$$

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Matematisk uttrykk for akselerasjon (kartesiske koordinater)

- Vi har altså:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{du}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv}{dt}\mathbf{j} + \frac{dw}{dt}\mathbf{k}$$

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

- Kan skrives på kompakt vektorform:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\right)$$

Navier-Stokes likninger for inkompressibel strømning skrevet ut i kartesiske koordinater (x, y, z)

- Ukjente variabler i rødt (tyngdekraften antatt å virke i negativ z-retning)

Bevegelseslikningen (N's 2. lov)

$$\rho a_x = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

x-retn.:

Navier-Stokes likninger for inkompressibel strømning skrevet ut i kartesiske koordinater (x, y, z)

- Ukjente variabler i rødt (tyngdekraften antatt å virke i negativ z-retning)

Bevegelseslikningen (N's 2. lov)

$$\rho a_x = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \text{x-retn.:}$$

$$\rho a_y = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad \text{y-retn.:}$$

$$\rho a_z = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad \text{z-retn.:}$$

Navier-Stokes likninger for inkompressibel strømning skrevet ut i kartesiske koordinater (x, y, z)

- Ukjente variabler i rødt (tyngdekraften antatt å virke i negativ z-retning)

Bevegelseslikningen (N's 2. lov)

$$\rho a_x = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \text{x-retn.:}$$

$$\rho a_y = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad \text{y-retn.:}$$

$$\rho a_z = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad \text{z-retn.:}$$

Kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Navier-Stokes likninger for inkompressibel strømning skrevet ut i kartesiske koordinater (x, y, z)

- Ukjente variabler i rødt (tyngdekraften antatt å virke i negativ z-retning)

Bevegelseslikningen (N's 2. lov)

$$\rho a_x = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \text{x-retn.:}$$

$$\rho a_y = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad \text{y-retn.:}$$

$$\rho a_z = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad \text{z-retn.:}$$

Kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- Komplisert å løse pga. ikke-lineære akselerasjonsledd (produkter av ukjente)

Navier-Stokes likningene kan ofte løses eksakt når akselerasjonen er null!

- Ukjente variabler i rødt (tyngdekraften antatt å virke i negativ z-retning)

Bevegelseslikningen (N's 2. lov)

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \text{x-retn.:}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad \text{y-retn.:}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad \text{z-retn.:}$$

Kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- Komplisert å løse pga. ikke-lineære akselerasjonsledd (produkter av ukjente)
- **Men kan ofte løses analytisk når akselerasjonen er null**

Oppgave: Hvor mange grensebetingelser (f.eks. null hastighet på veggen) må vi ha for å løse Navier-Stokes likningene?

- Ukjente variabler i rødt (tyngdekraften antatt å virke i negativ z-retning)

Bevegelseslikningen (N's 2. lov)

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \text{x-retn.:}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad \text{y-retn.:}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad \text{z-retn.:}$$

Kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

- Komplisert å løse pga. ikke-lineære akselerasjonsledd (produkter av ukjente)
- Men kan ofte løses analytisk når akselerasjonen er null

Løsning: Vi trenger to grensebetingelser (f.eks. null hastighet på veggen) fordi Navier-Stokes likningene er av andre orden?

- Ukjente variabler i rødt (tyngdekraften antatt å virke i negativ z-retning)

Bevegelseslikningen (N's 2. lov)

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \text{x-retn.:}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad \text{y-retn.:}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad \text{z-retn.:}$$

Kontinuitetslikningen

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

Agenda

- Navier-Stokes likninger
  - Oppgave 1: Regne ut hastighetsfeltet mellom to plater der den ene beveger seg
  - Oppgave 2: Regne ut hastighetsfeltet i trykkdrevet strømning mellom to plater
  - Eksempel: Hagen-Poiseuille for laminær rørstrømning utledet fra Navier-Stokes (utvidelse av eksempel 2)

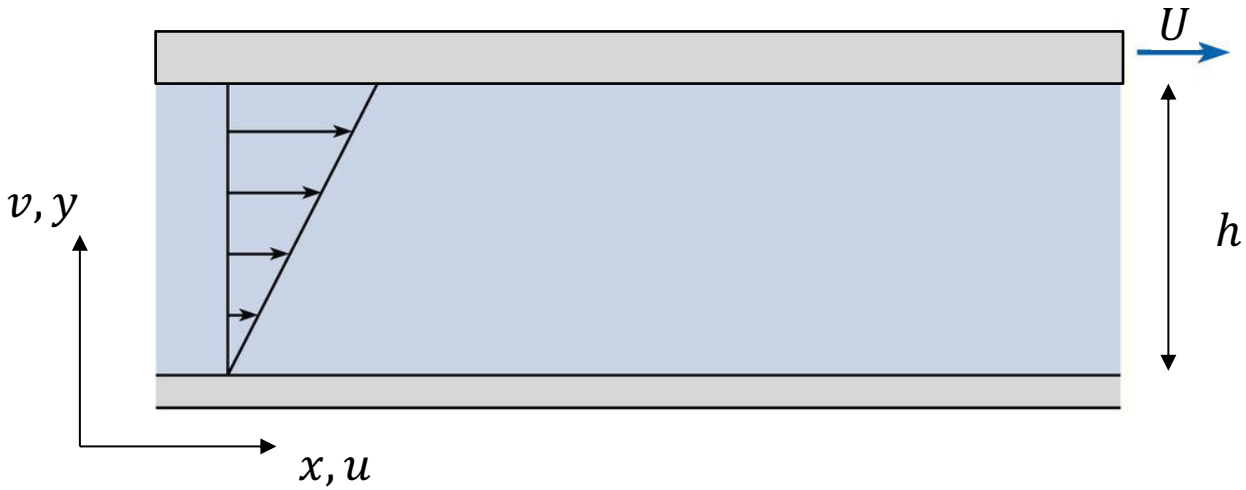


Oppgave: Regne ut hastighetsfeltet til 2D-strømning mellom to plater der den øvre platen beveger seg med konstant hastighet U

- Den øvre platen beveger seg med konstant hastighet **V** = <U,0>.
- Hastighetsfeltet er todimensjonalt og stasjonært:
  - $V(x,y) = < u, v >$.
  - z-hastigheten er null, $w = 0$.
- Avstanden mellom platene er h.
- Stasjonær strømning
- Vi vil vise at hastighetsfeltet i x-retn. er gitt ved

$$\mathrm{u} = U \cdot \frac{y}{h}.$$

- Først: Hva er de to grensebetingelsene?

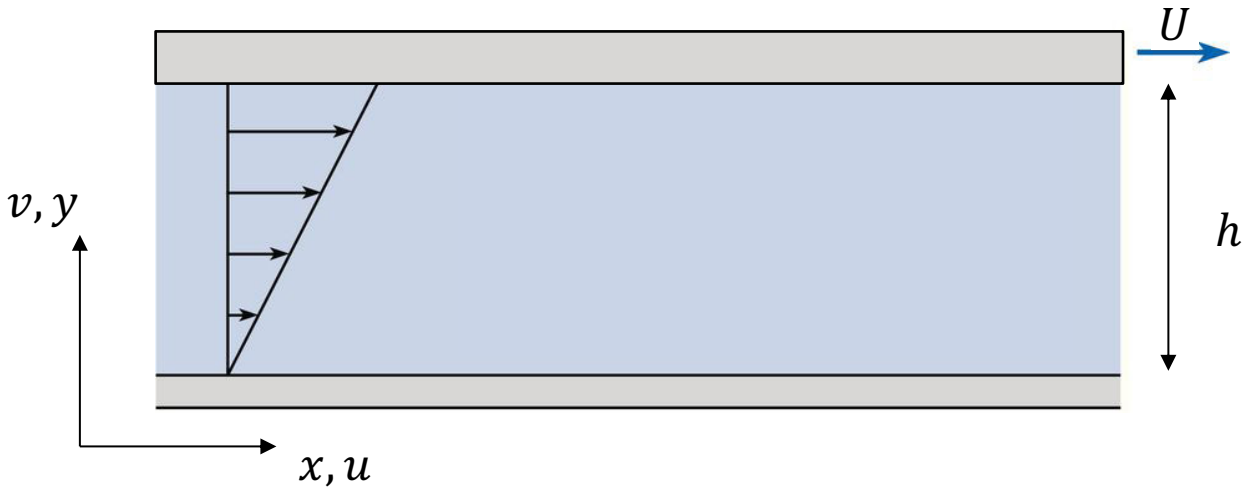


Løsning: Grense(heft)betingelse nederst ved y = 0: u(0)=0, grense(heft)betingelse øverst ved y=h: u(h) = U.

- Den øvre platen beveger seg med konstant hastighet **V** = <U,0>.
- Hastighetsfeltet er todimensjonalt og stasjonært:
  - $V(x,y) = < u, v >$.
  - z-hastigheten er null, $w = 0$.
- Avstanden mellom platene er h.
- Stasjonær strømning
- Vi vil vise at hastighetsfeltet i x-retn. er gitt ved

$$\mathrm{u} = U \cdot \frac{y}{h}.$$

- Først: Hva er de to grensebetingelsene?

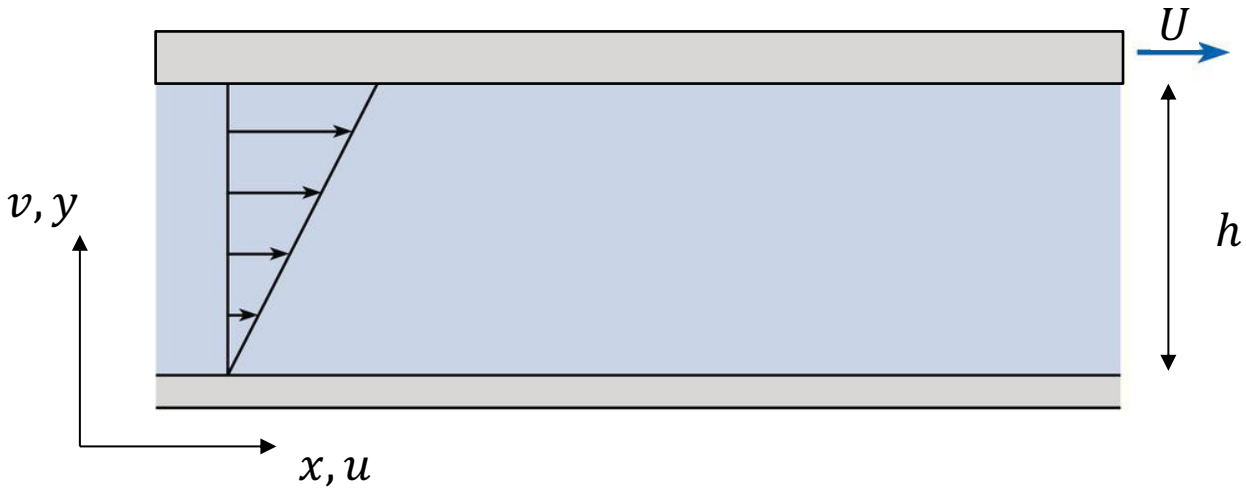


Oppgave: Hva er grensebetingelsene uttrykt ved dimensjonsløs lengde og hastighet?

- Den øvre platen beveger seg med konstant hastighet **V** = <U,0>.
- Hastighetsfeltet er todimensjonalt og stasjonært:
  - $V(x,y) = < u, v >$.
  - z-hastigheten er null, $w = 0$.
- Avstanden mellom platene er h.
- Stasjonær strømning
- Vi vil vise at hastighetsfeltet i x-retn. er gitt ved

$$u = U \cdot \frac{y}{h}.$$

- Først: Hva er de to grensebetingelsene?



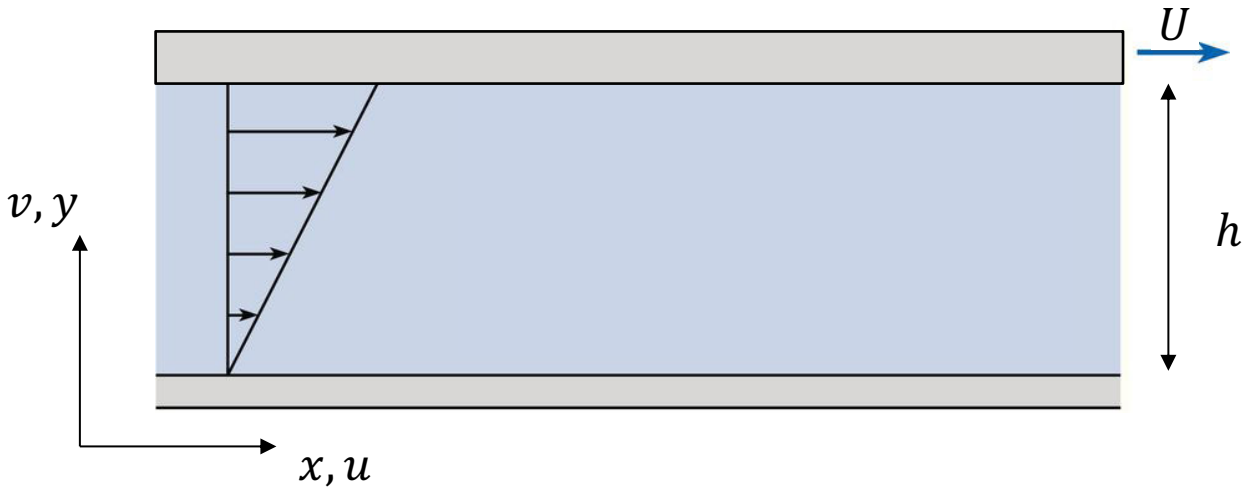
Grensebetingelser med dimensjonale størrelser:
Grense(heft)betingelse nederst ved y = 0: u(0)=0,
grense(heft)betingelse øverst ved y=h: u(h) = U.

Løsning: Grensebetingelse nederst: $\bar{u}(0) = 0$, øverst: $\bar{u}(1) = 1$.

- Den øvre platen beveger seg med konstant hastighet **V** = <U,0>.
- Hastighetsfeltet er todimensjonalt og stasjonært:
  - $V(x, y) = < u, v >$.
  - z-hastigheten er null, $w = 0$.
- Avstanden mellom platene er h.
- Stasjonær strømning
- Vi vil vise at hastighetsfeltet i x-retn. er gitt ved

$$\mathrm{u} = U \cdot \frac{y}{h}.$$

- Først: Hva er de to grensebetingelsene?



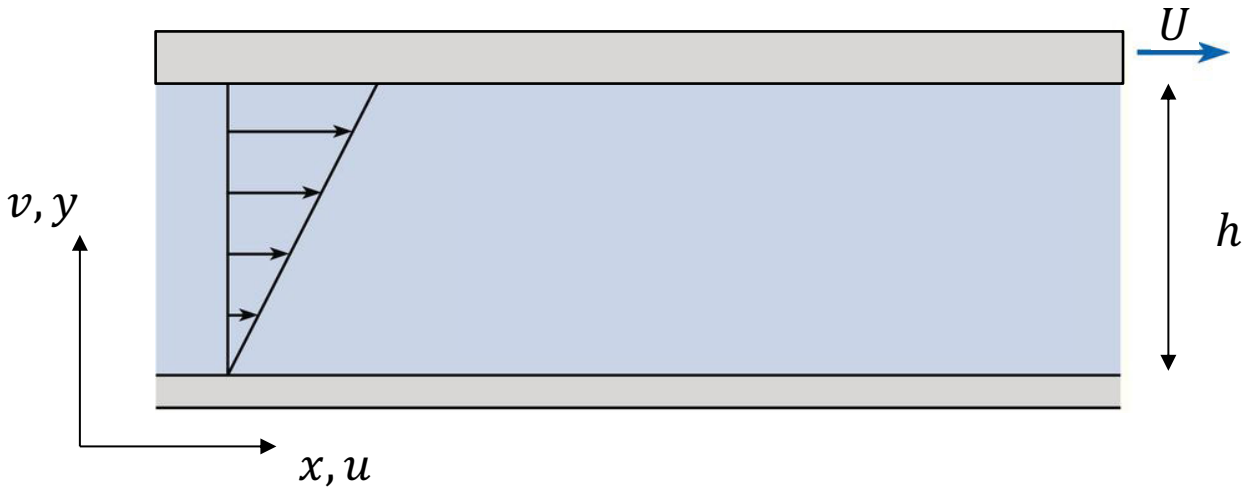
Innfører dimesjonsløs hastighet: $\bar{u}$=u/U og dimesjonsløs y-koordinat: $\bar{y}$= y/h.

Dermed $\bar{u}$(y/h) = u/U, som innsatt gir $\bar{u}$(1) = 1.

Oppgave: Vi vil regne ut hastighetsfeltet ved N-S likningene. Er det noen av likningene vi kan stryke?

- Den øvre platen beveger seg med konstant hastighet **V** = <U,0>.
- Hastighetsfeltet er todimensjonalt og stasjonært:
  - $V(x,y) = < u, v >$.
  - z-hastigheten er null, $w = 0$.
- Avstanden mellom platene er h.
- Stasjonær strømning
- Vi vil vise at hastighetsfeltet i x-retn. er gitt ved

$$\mathrm{u} = U \cdot \frac{y}{h}.$$



Navier-Stokes likningene (N-S) på neste side!

Oppgave: Vi vil regne ut hastighetsfeltet ved N-S likningene. Vi treneger bare én av hastighetslikningene, hvilken?

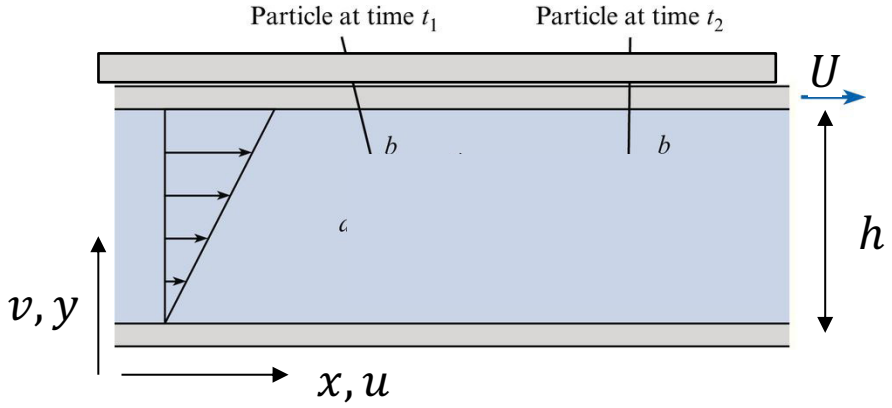
- Ukjente variabler i rødt (tyngdekraften antatt å virke i negativ z-retning)

Hastighet i x:
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i y:
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:
$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitet:
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$



Løsning: Vi trenger bare likning for hastighet i x fordi y og z hastighet er null.

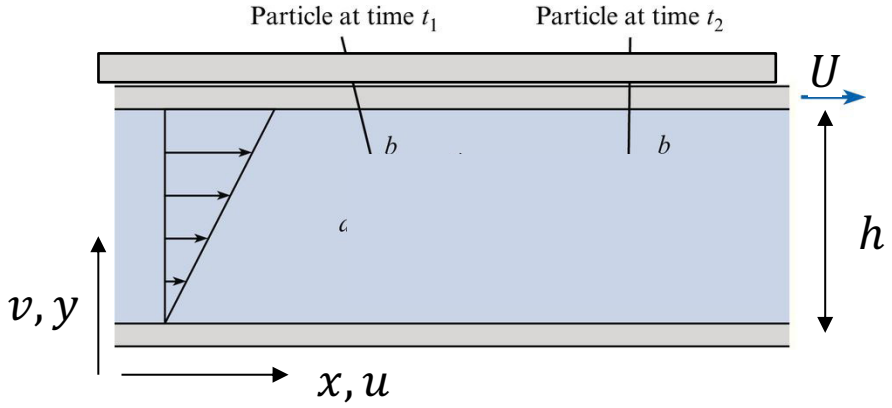
- Ukjente variabler i rødt (tyngdekraften antatt å virke i negativ z-retning)

Hastighet i x:
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i y:
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:
$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitet:
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$



Oppgave: Bruk kontinuitetslikningen, at u ikke varierer i z-retn., at v og w er null, og at strømningen er stasjonær og at $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ ...

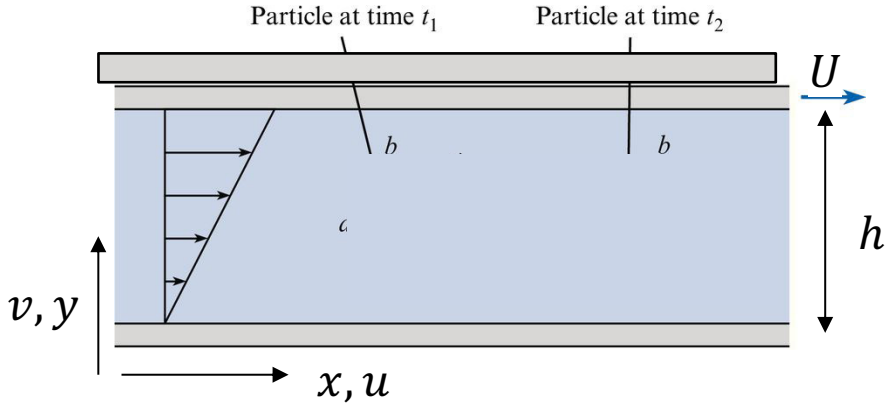
- til å sette opp en enkel likning for hastigheten i x.

Hastighet i x: $$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i y: $$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z: $$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitet: $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



Løsning: Steg 1: Fra kontinuitet ser vi at strømningen ikke akselererer i x-retning.

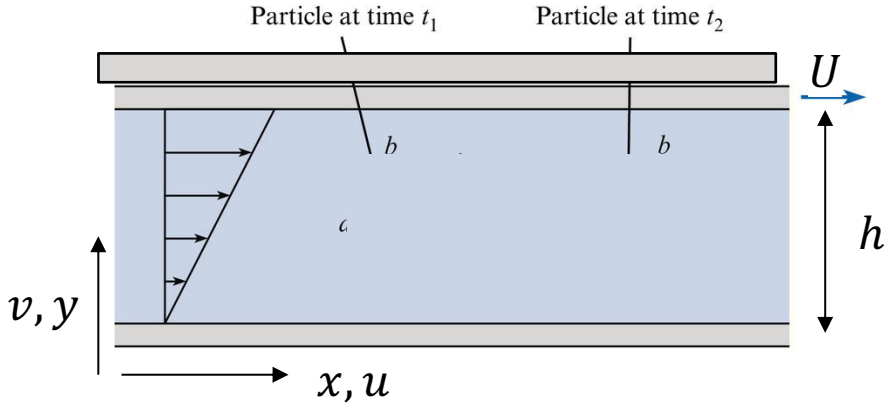
- til å sette opp en enkel likning for hastigheten i x.

Hastighet i x:
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i y:
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:
$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitet:
$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0}_{\frac{\partial u}{\partial x}=0}$$



Løsning: Steg 2: Vi stryker flere ledd: Stasjonær strømning, ingen trykkvariasjon i x,ingen avhengighet av z og v og w er null

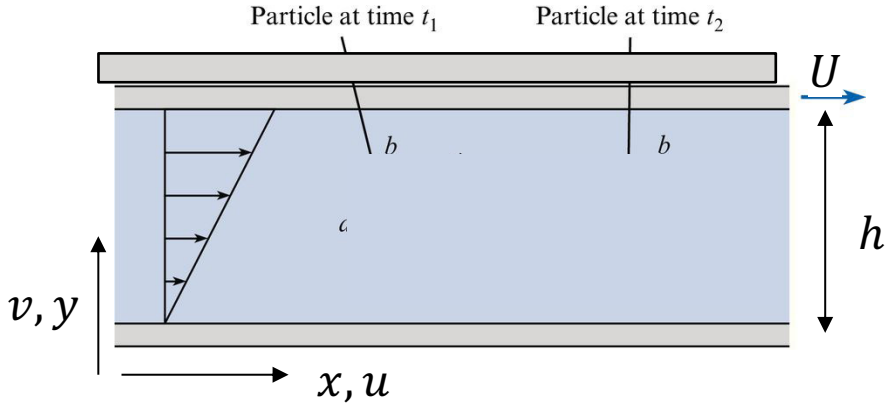
- til å sette opp en enkel likning for hastigheten i x.

Hastighet i x:
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i y:
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:
$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitet:
$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0}_{\frac{\partial u}{\partial x}=0}$$



Løsning: Ved å stryke ledd som er null står vi igjen med en enkel likning (Fourierlikningen/varmeledningslikningen)

- til å sette opp en enkel likning for hastigheten i x.

Hastighet i x:

$$0 = \frac{d^2u}{dy^2}$$

- Lineær likning
- 2. ordens: Integrerer to ganger
- Integrasjon gir to konstanter:
  - bruker grensebetingelser for å bestemme disse

Hastighet i y:

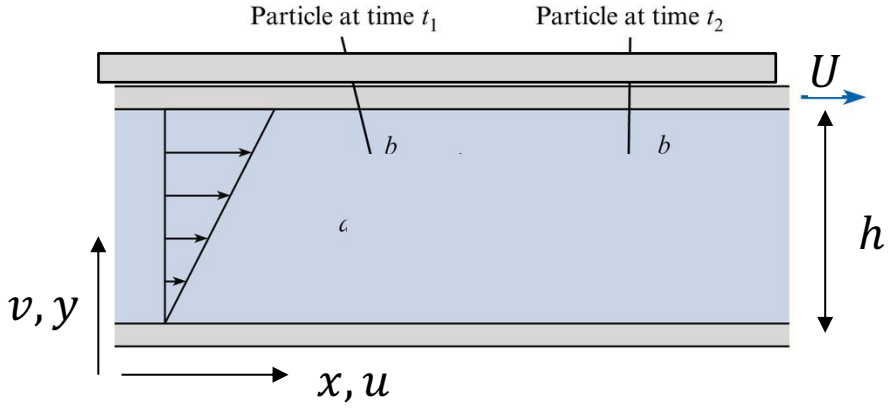
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{}{\partial x^2} + \frac{}{\partial y^2} + \frac{}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitet:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}_{\frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$



Oppgave: Hva er likn. 1 etter to gangers integrasjon? Uttrykk u(y) ved y og to integrasjonskonstanter (C1 og C2).

- til å sette opp en enkel likning for hastigheten i x.

Hastighet i x:

$$0 = \frac{d^2u}{dy^2}$$

(likn. 1)

Hastighet i y:

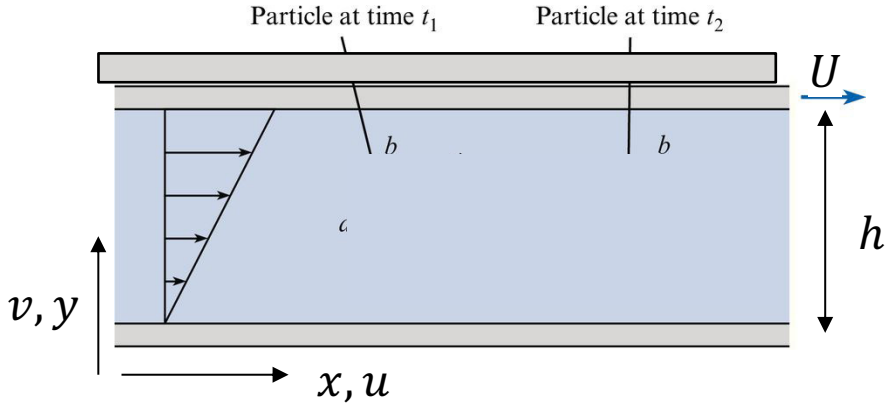
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitet:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}_{\frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$



Løsning: Hva er likn. 1 etter to gangers integrasjon?
Svar: u(y) = C1·y + C2

- til å sette opp en enkel likning for hastigheten i x.

Hastighet i x:

$$\boxed{0 = \frac{d^2u}{dy^2}}$$

(likn. 1)

Hastighet i y:

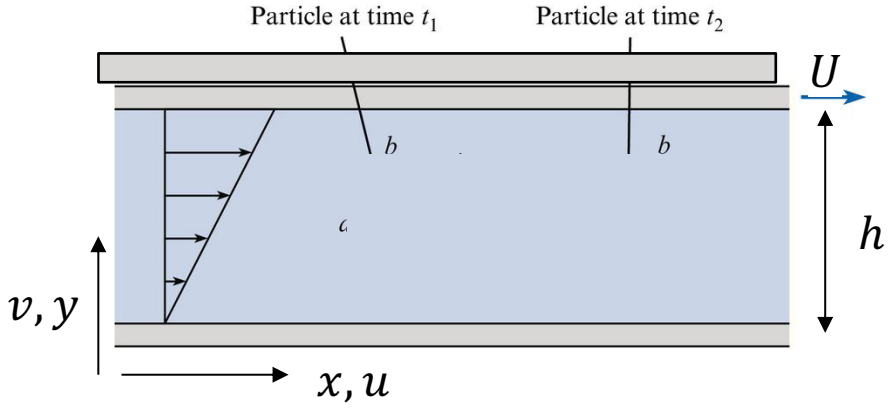
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitet:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}_{\frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$



Oppgave: Sett inn for u(y=0) for å finne C2. Hva er C2?

- til å sette opp en enkel likning for hastigheten i x.

Hastighet i x:

$$\boxed{0 = \frac{d^2u}{dy^2}}$$

(likn. 1)

Hastighet i y:

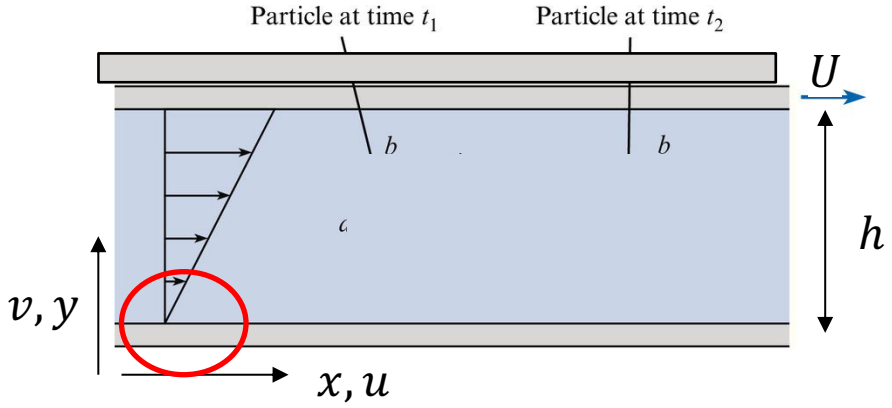
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitet:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}_{\frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$



Løsning: C2 = 0

- Fremgangsmåte: u(0) = C1 · 0 + C2 -> C2 = 0, som gir u (y) = C1·y

Hastighet i x:

$$\boxed{0 = \frac{d^2u}{dy^2}}$$

(likn. 1)

Hastighet i y:

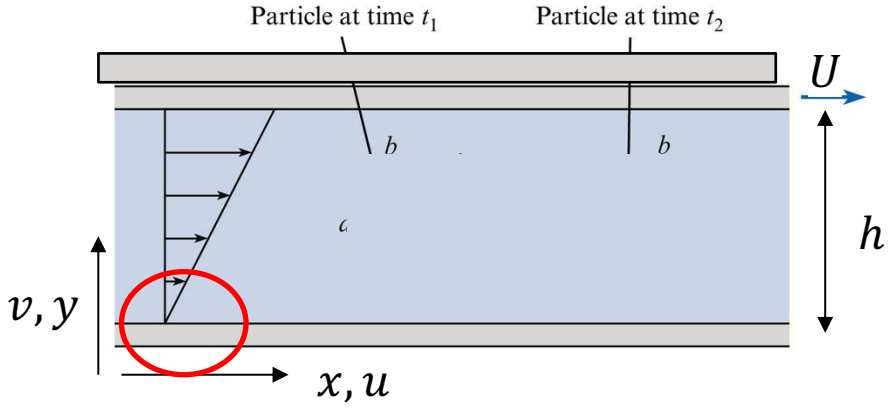
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitet:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}_{\frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$



Løsning: Finn løsningen til u(y) ved å sette inn for grensebetingelsen ved y=h

- Fremgangsmåte: u(h) = C1 · h = U, som gir C1 = U/h, dermed får vi u(y) = U/h·y

Hastighet i x:

$$\boxed{u(y) = \frac{U}{h}y}$$

(likn. 2)

Hastighet i y:

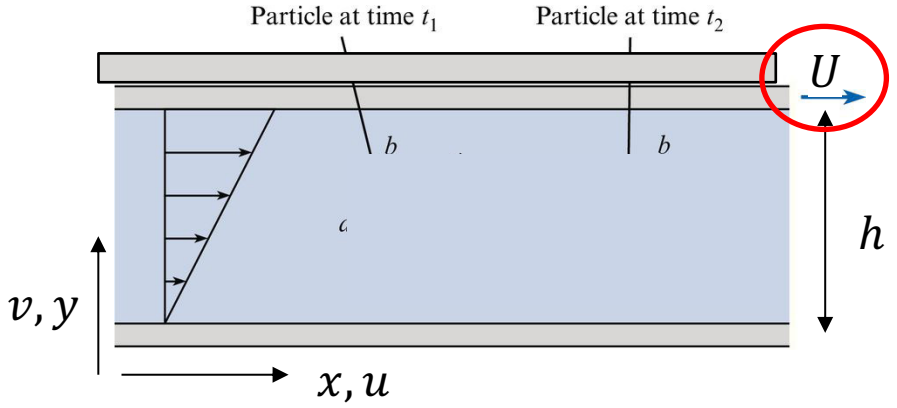
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitet:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}_{\frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$



Oppgave: Er løsningen i likn. 2 riktig? Løsning: Sjekk ved å sette inn for grensebetingelsene.

- Fremgangsmåte: u(h) = C1 · h = U, som gir C1 = U/h, dermed får vi u(y) = U/h·y

Hastighet i x:

$$\boxed{u(y) = \frac{U}{h} y}$$

(likn. 2)

Hastighet i y:

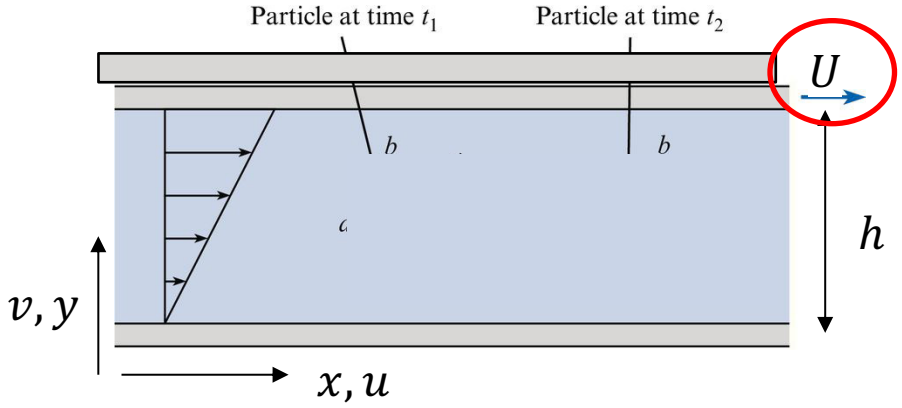
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

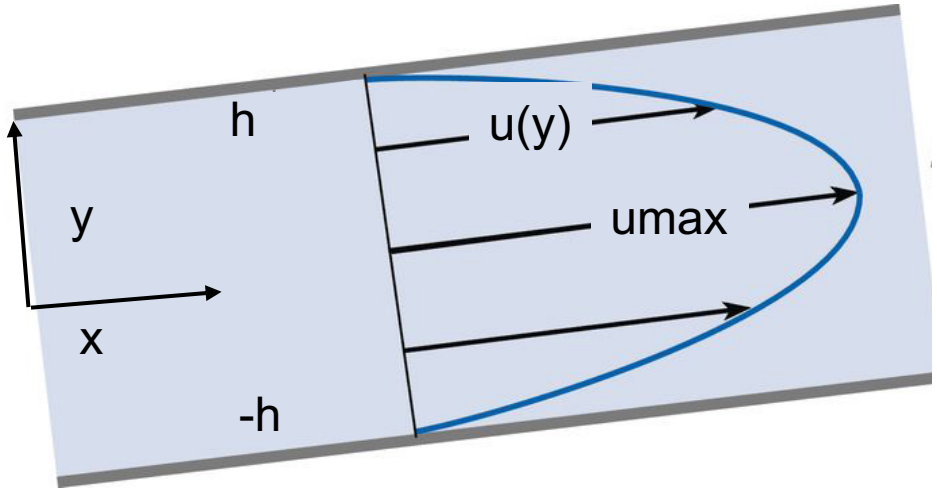
Kontinuitet:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}_{\frac{\partial u}{\partial x} = 0}$$



Oppgave: Trykkdrevet strømning i x-retning mellom to plater (avstand: 2h, dp/dx ≠ 0) og uten høydeforskjell. Hva blir u(y)?

- Fullt utviklet stasjonær, laminær, inkompressibel og stasjonær strømning av Newtonsk fluid mellom to plater
- **Sett opp en likning for hastigheten u(y) fra Navier-Stokes i x-retning.**
- N-S på neste side



Oppgave: Trykkdrevet strømning i x-retning mellom to plater (avstand: 2h, dp/dx ≠ 0) og uten høydeforskjell. Hva blir u(y)?

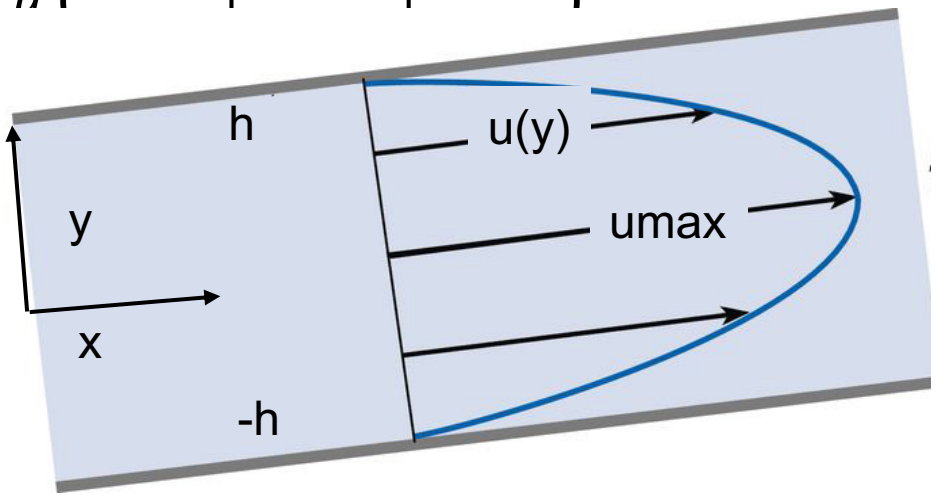
- Sett opp en forenklet likning for hastigheten i x-retning

Hastighet i x: $$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i y: $$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z: $$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitet: $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$



Løsning: Trykkdrevet strømning i x-retning mellom to plater (avstand: 2h, dp/dx ≠ 0) og uten høydeforskjell. Hva blir u(y)?

- Sett opp en forenklet likning for hastigheten i x-retning

Hastighet i x:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Hastighet i y:

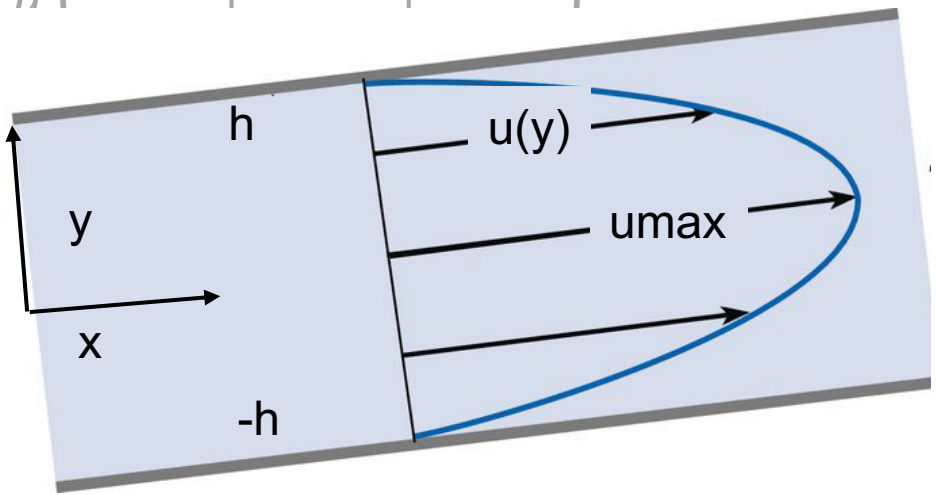
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



Oppgave: Hva blir u(y) uttrykt ved y, μ, dp/dx og de to integrasjonskonstantene?

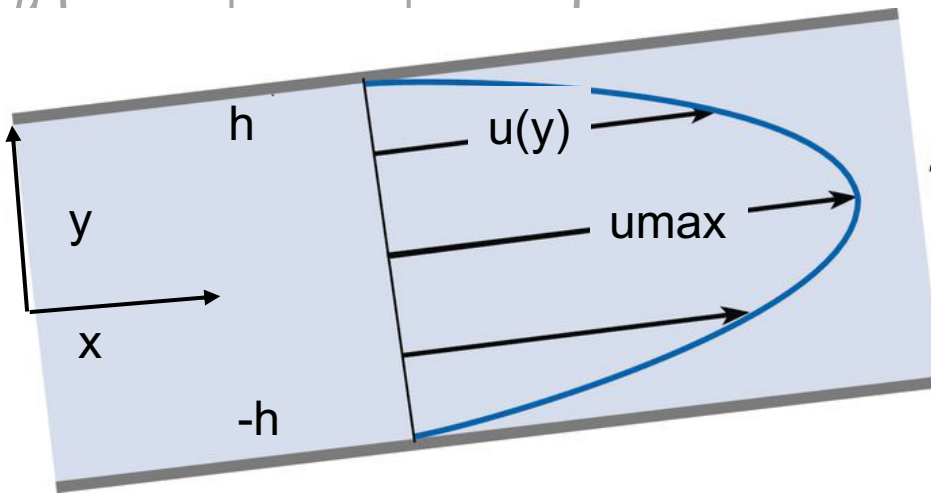
- Integrer u to ganger med hensyn på y

Hastighet i x: $$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Hastighet i y: $$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z: $$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial} + \frac{\partial^2 w}{\partial} + \frac{\partial^2 w}{\partial}\right)$$

Kontinuitet: $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



Løsning: Hva blir u(y) uttrykt ved y, μ, dp/dx og de to integrasjonskonstantene?

- Integrerer u to ganger med hensyn på y som gir:

Hastighet i x:

$$u(y) = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2$$

Hastighet i y:

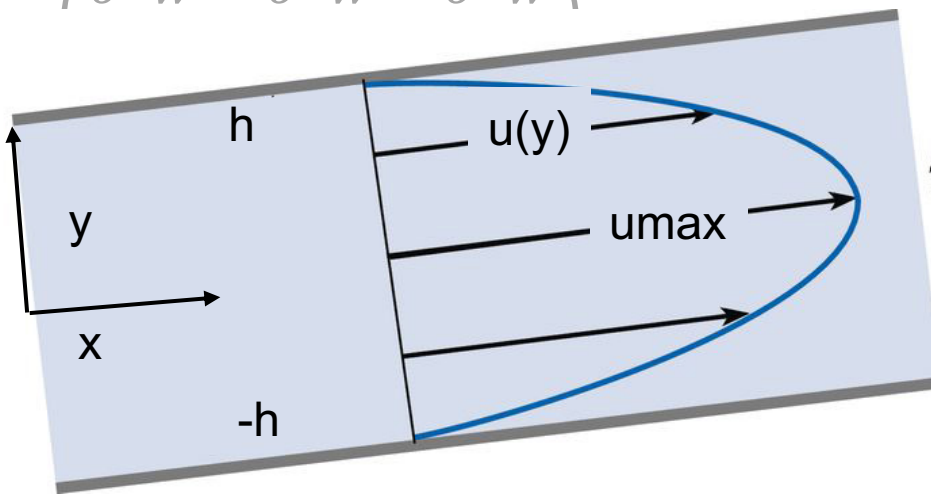
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma + \left(\frac{\partial^2 w}{} \quad \frac{\partial^2 w}{} \quad \frac{\partial^2 w}{}\right)$$

Kontinuitet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



Løsning: Setter inn for grensebetingelsene u(-h)=0 og u(h)=0 for å finne C1 og C2.

- Gir C1 = 0 og C2 = -(dp/dx)$h^2/2\mu$ som gir:

Hastighet i x:

$$u(y) = -\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2\mu}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

Hastighet i y:

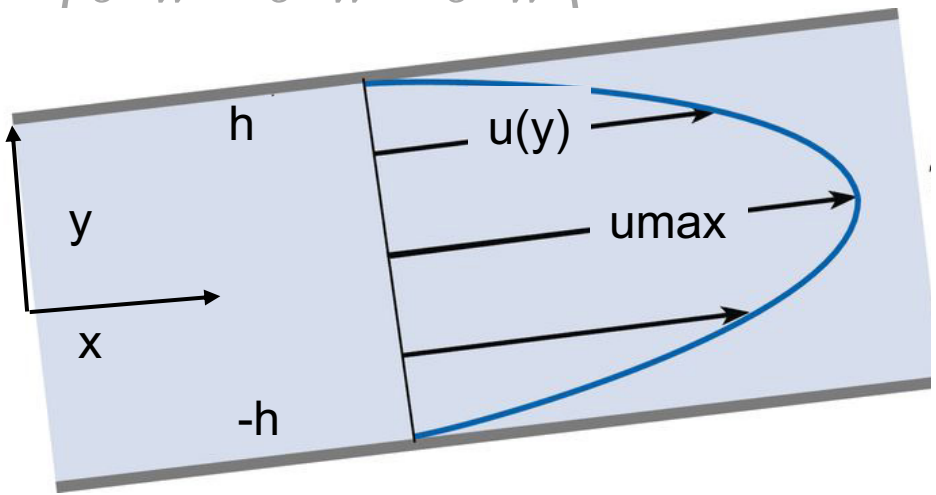
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma + \left(\frac{\partial^2 w}{} \quad \frac{\partial^2 w}{} \quad \frac{\partial^2 w}{}\right)$$

Kontinuitet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



Hva kan vi lese ut av dette? Hastighetsprofilet er en parabel. Ved å derivere denne og sette lik null, dvs. du/dy = 0, finner vi at den maksimale hastigheten finnes i midten.

Hastighet i x:

$$u(y) = -\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2\mu}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

Hastighet i y:

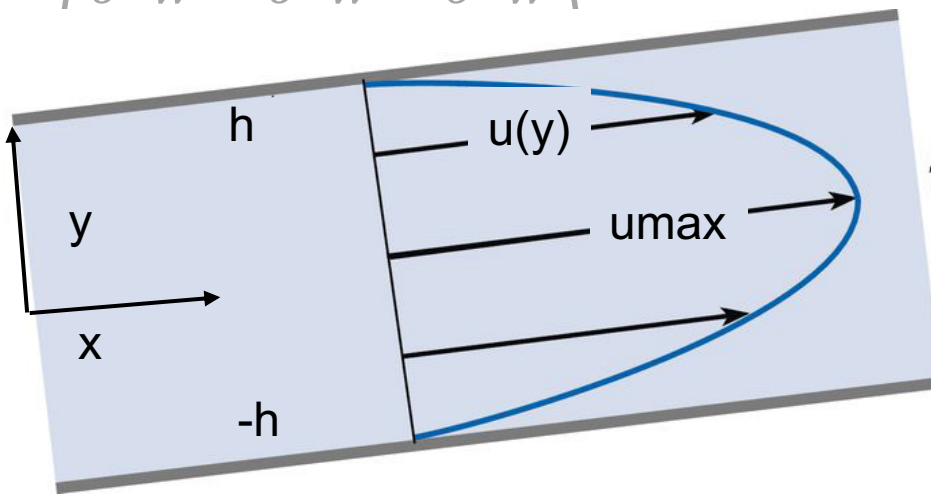
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Hastighet i z:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma + \left(\frac{\partial^2 w}{} \quad \frac{\partial^2 w}{} \quad \frac{\partial^2 w}{}\right)$$

Kontinuitet:

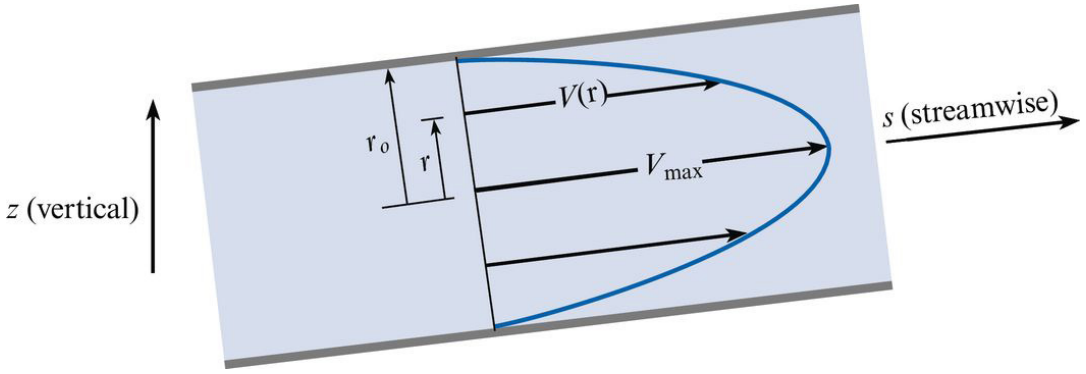
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



Eksempel (utvidelse av forrige eksempel): Hagen-Poiseuille-strømning

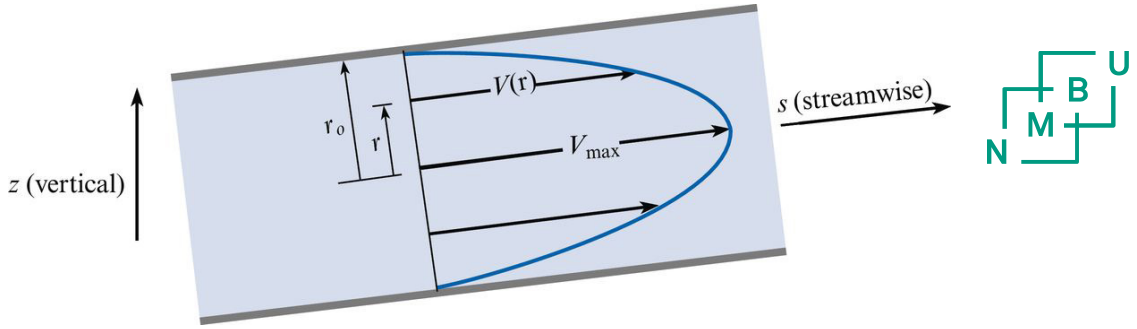
- Fullt utviklet stasjonær, laminær, inkompressibel strømning av Newtonsk fluid i et sirkulært rør med konstant diameter
  - Hva blir friksjonstapet/trykkfallet?
- Forelesning 14: Litt uoversiktlig vei å gå til svaret

$$h_f = \frac{32\mu L\overline{V}}{\gamma D^2}$$



- Her: Litt mer prinsipielt oversiktlig utledning vha. Navier-Stokes likninger

Fra 14: Laminær rørstrømning



- Parabelformet hastighetsprofil
- Friksjonstap: $$h_f = \frac{32\mu L\bar{V}}{\gamma D^2}$$
- Friksjonsfaktor: $$f = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$
- Gjelder uavhengig av rørets ruhet så lenge strømningen er laminær

$$V_{\mathrm{maks}} = -\left(\frac{r_0^2}{4\mu}\right)\gamma\frac{\Delta h}{\Delta L}$$

$$V(r) = V_{\mathrm{maks}}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]$$

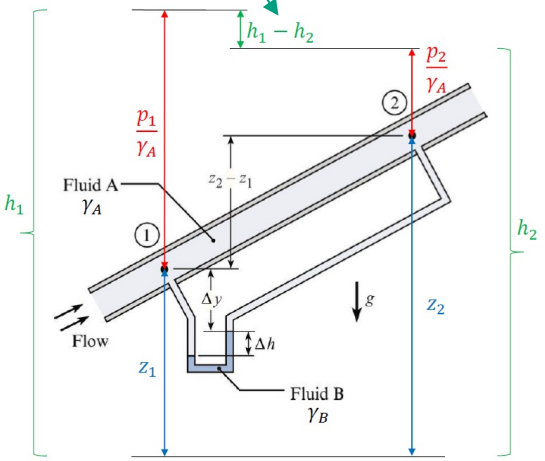
$$Q = -\left(\frac{\pi r_0^4}{8\mu}\right)\gamma\frac{\Delta h}{\Delta L}$$

$$\bar{V} = \frac{V_{\mathrm{maks}}}{2} = -\left(\frac{D^2}{32\mu}\right)\gamma\frac{\Delta h}{\Delta L}$$

$$\tau_0 = \frac{8\mu V}{D}$$

$\gamma = \rho g$ – tyngdetetthet
μ – dynamisk viskositet
L og ΔL – rørlengde
D – rørets indre diameter
r_0 – rørets indre radius
$h = \frac{p}{\gamma} + z$ – piezometrisk høyde
V – hastighet i avstand r fra sentrum
V_{maks} – Maks. hastighet (i sentrum, ved $r = 0$)
$\bar{V}$ – middelhastighet
τ_0 – skjærspenning ved rørveggen
Q – volumstrøm

$\Delta h/\Delta L$ er negativ pga. friksjonstapet



Vi kom frem til disse formlene ved å:
- Anta stasjonær, inkompressibel, fullt utviklet rørstrømning
- Bruke **impulslikningen** på et kontrollvolum sentrert i røret, formet som et sirkulært rør, med trykkrefter i endeflatene, skjærspenning på «langsidene», samt tyngdekraft
- Kombinere impulslikningen med **Newtons viskositetslov** for laminær strømning
- Bruke kontinuitetslikningen $Q = AV = \mathrm{konstant}$ (uten å egentlig fremheve det)
- Matematisk manipulasjon + bruk av heftbetingelsen
- Kombinere med **energilikningen** for å få et uttrykk for f og h_f

Forholdet mellom 14 og dagens utledning

Samme antakelser her

Navier-Stokes likning er impulslikningen på differensiell form der skjærkrefter er representert ved Newtons viskositetslov

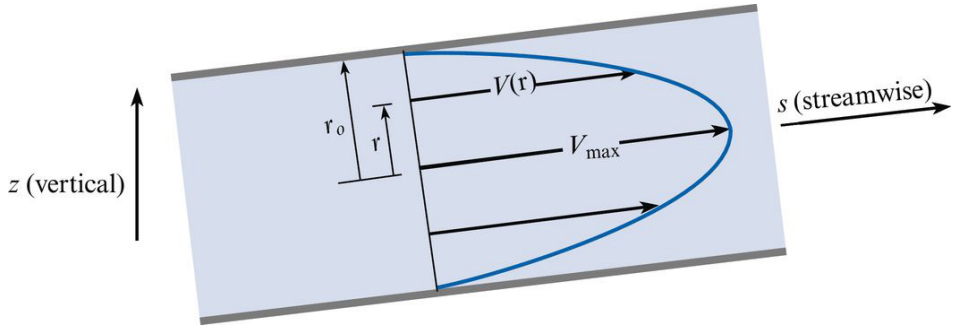
Vi bruker kontinuitetslikningen på differensiell form

Tilsvarende her

Tilsvarende her

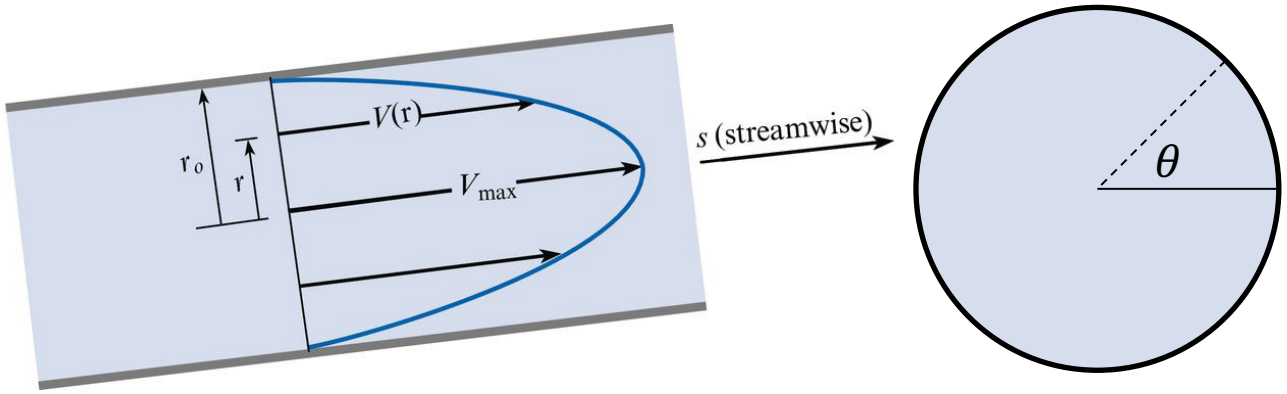
Vi kom frem til disse formlene ved å:

- Anta stasjonær, inkompressibel, fullt utviklet rørstrømning
- Bruke **impulslikningen** på et kontrollvolum sentrert i røret, formet som et sirkulært rør, med trykkrefter i endeflatene, skjærspenning på «langsidene», samt tyngdekraft
- Kombinere impulslikningen med **Newtons viskositetslov** for laminær strømning
- Bruke kontinuitetslikningen $Q = AV = \text{konstant}$ (uten å egentlig fremheve det)
- Matematisk manipulasjon + bruk av heftbetingelsen
- Kombinere med **energilikningen** for å få et uttrykk for f og h_f



Hagen-Poiseuille-strømning fra Navier-Stokes

- Ser bort fra tyngden, som kun bidrar med en hydrostatisk trykkomponent – vi er interessert i trykkfallet pga. friksjon
- Sylindrisk koordinatsystem som vist
- Antakelser utover de som ligger i N-S:
  - Stasjonær strømning: $\partial/\partial t = 0$
  - Aksesymmetri: $\partial/\partial\theta = 0$
  - Ingen radiell eller tangentiell hastighet: $v_r = v_\theta = 0$
  - Ingen endring i hastighet i s-retning: $\partial v_s/\partial s = 0$



- Grensebetingelser:
  - Heftbetingelsen: Hastigheten er 0 ved rørveggen
  - Hastigheten er endelig (ikke uendelig) i sentrum av røret

Fullt utviklet strømning (kan også begrunnes fra kontinuitetslikningen i kombinasjon med antakelse 2/3)

Navier-Stokes likninger for inkompressibel strømning skrevet ut i sylindriske koordinater (r, θ, z)

- Ukjente variabler i rødt (tyngdekraften antatt å virke i negativ z-retning)

Bevegelseslikningen (N's 2. lov)

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

Kontinuitetslikningen

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Navier-Stokes likninger for inkompressibel strømning skrevet ut i sylindriske koordinater

- Ukjente variabler i rødt (uten tyngdekraft)

Vi står igjen med $\partial p/\partial r = 0$, altså ingen radiell trykkvariasjon. Dette ville blitt annerledes hvis vi hadde hatt med en tyngdekomponent i radiell retning.

Bevegelseslikningen (N's 2. lov)

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_s\frac{\partial v_r}{\partial s} - \frac{v_\theta^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial s^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_s\frac{\partial v_\theta}{\partial s} + \frac{v_r v_\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial s^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$

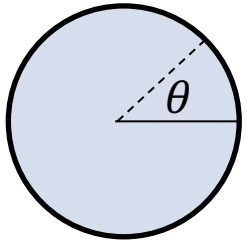
$$\rho\left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_s}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_s}{\partial \theta} + v_s\frac{\partial v_s}{\partial s}\right) = -\frac{\partial p}{\partial s} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_s}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_s}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2}\right)$$

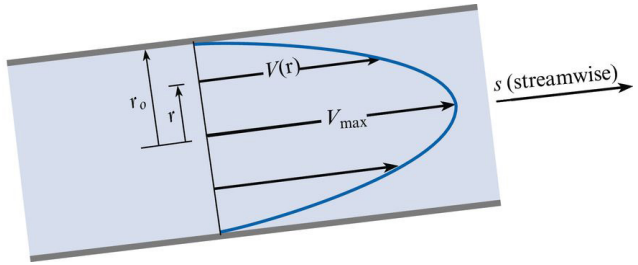
Kontinuitetslikningen

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_s}{\partial s} = 0$$

Vi står igjen med $\partial v_s/\partial s = 0$ fra antakelse 2/3 – dette begrunner antakelse 4 i boksen nederst til venstre.

Antakelser:
- Stasjonær strømning: $\partial/\partial t = 0$
- Aksesymmetri: $\partial/\partial \theta = 0$
- Ingen radiell eller tangentiell hastighet: $v_r = v_\theta = 0$
- Ingen endring i hastighet i s-retning: $\partial v_s/\partial s = 0$





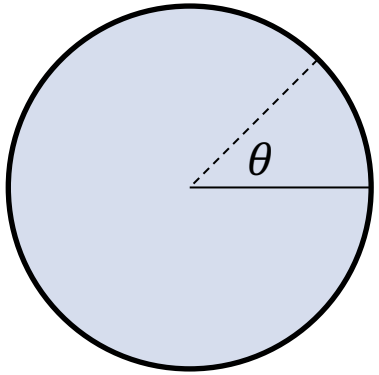
Hagen-Poiseuille-strømning fra Navier-Stokes

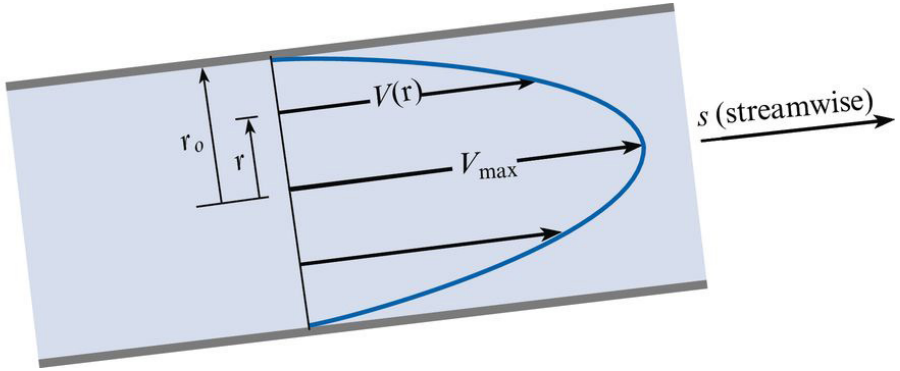
- Vi får Navier-stokes for Hagen-Poiseuille-strømning:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_s}{\partial r}\right)$$

- Vi vet at $p = p(s)$ og $v_s = v_s(r)$
- Venstre side en funksjon av s, høyre side en funksjon av r
- Altså kan vi skrive

$$\frac{dp}{ds} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv_s}{dr}\right)$$



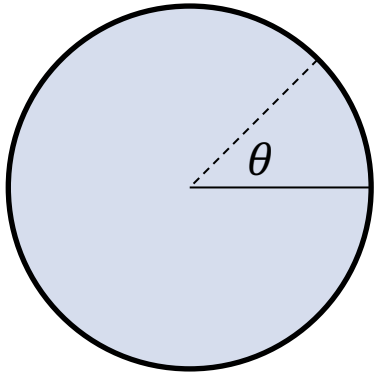


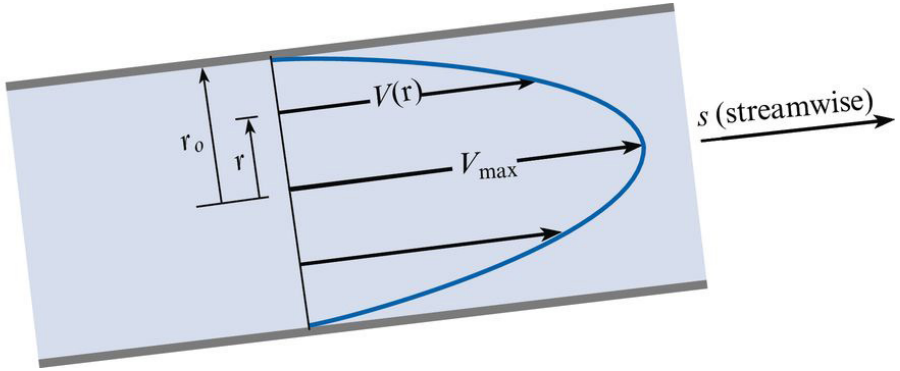
Hagen-Poiseuille-strømning fra Navier-Stokes

- Vi har Navier-stokes for Hagen-Poiseuille-strømning:

$$\frac{dp}{ds} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv_s}{dr}\right)$$

- Venstre side en funksjon av s, høyre side en funksjon av r
- Hvis de skal være like overalt, må begge sider være en konstant – kall den konstanten $-\Delta p/L$
  - Her er L en lengde langs røret med trykkfall $\Delta p > 0$

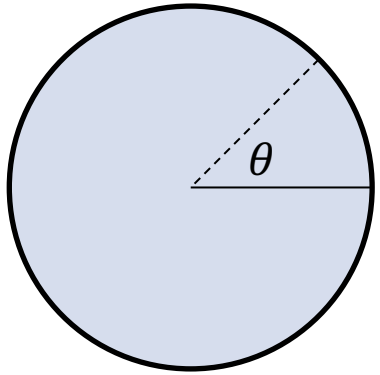




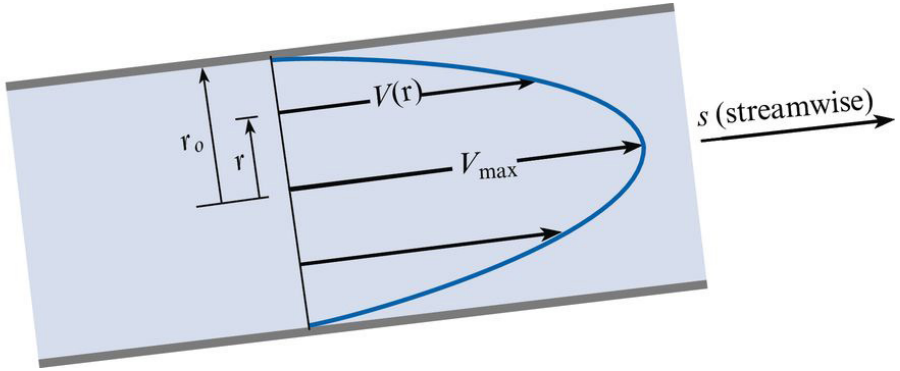
Hagen-Poiseuille-strømning fra Navier-Stokes

$$\frac{dp}{ds} = \mu \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_s}{dr}\right)$$

- Hvis høyre side skal være lik venstre side, må begge sider være en konstant – kall den konstanten $-\Delta p/L$



$$\mu \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_s}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{L}$$



$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_s}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\mu L}r$$

- Integrer først én gang mhp. r:

$$r\frac{dv_s}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\mu L}r^2 + c_1$$

Hagen-Poiseuille-strømning fra Navier-Stokes

- Integrer først én gang mhp. r:

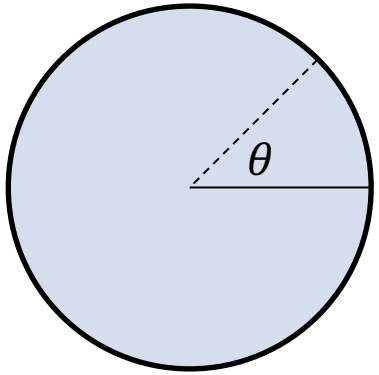
$$r\frac{dv_s}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\mu L}r^2 + c_1$$

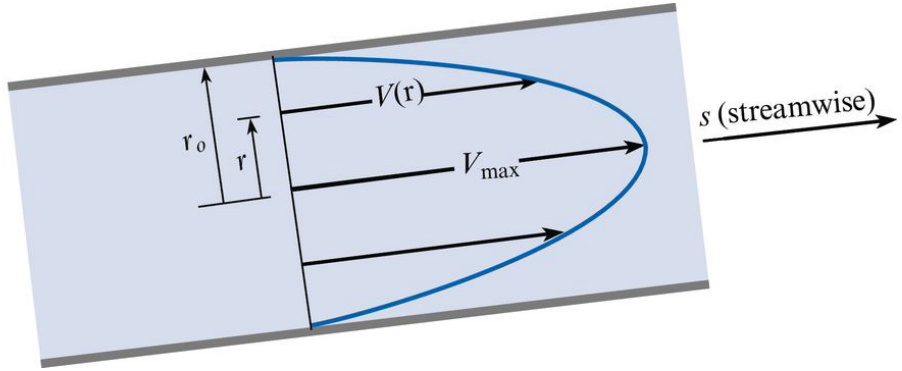
- Kan skrives

$$\frac{dv_s}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\mu L}r + \frac{c_1}{r}$$

- Integrer én gang til mhp. r:

$$v_s = -\frac{\Delta p}{4\mu L}r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

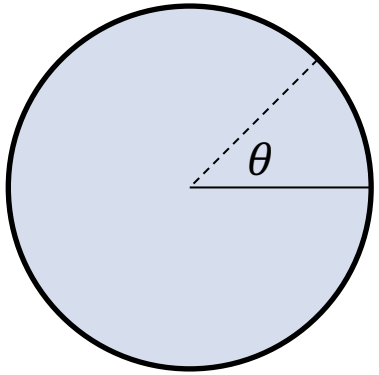




Hagen-Poiseuille-strømning fra Navier-Stokes

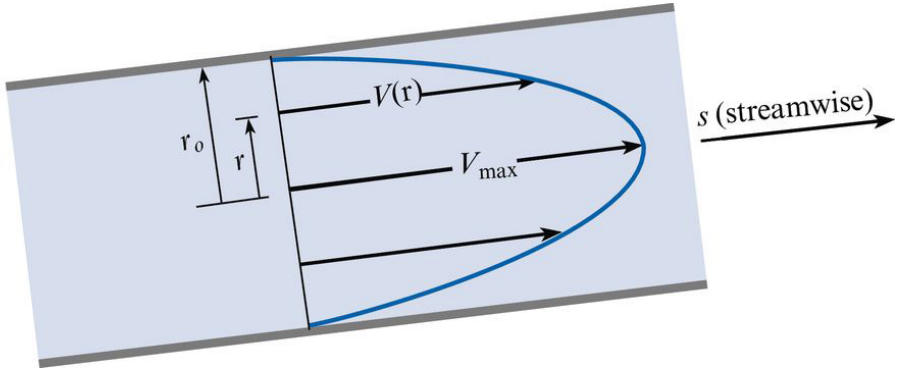
- Integrert to ganger mhp. r:

$$v_s = -\frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + c_1 \ln r + c_2$$



- Grensebetingelse 1: Hastigheten i sentrum ($r = 0$) blir (negativ) uendelig med mindre $c_1 = 0$, altså må $c_1 = 0$ og vi får

$$v_s = -\frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + c_2$$



Hagen-Poiseuille-strømning fra Navier-Stokes

- Med $c_1 = 0$

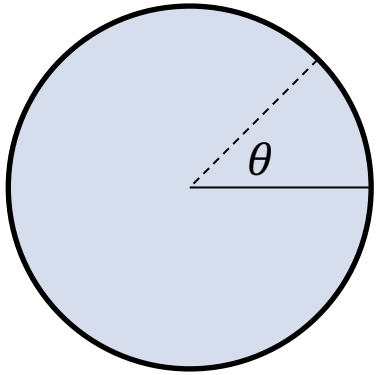
$$v_s = -\frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + c_2$$

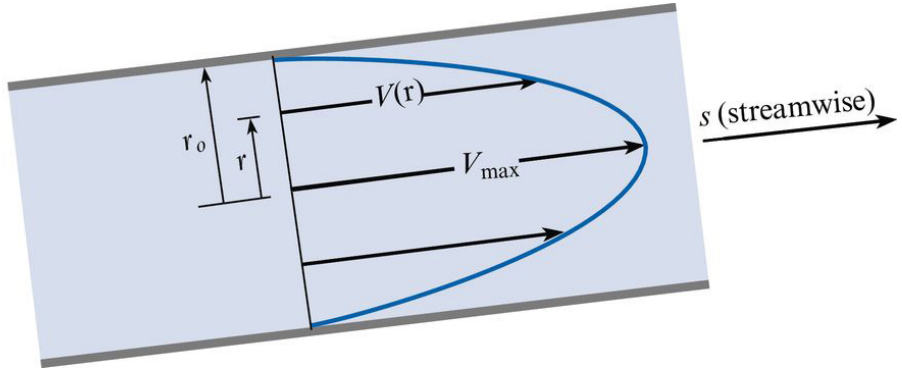
- Grensebetingelse 2: Hastigheten ved rørveggen ($r = r_0$) må tilfredsstille heftbetingelsen, dvs. $v_s(r_0) = 0$. Det gir

$$c_2 = \frac{\Delta p}{4\mu L} r_0^2$$

- Hastighetsfordelingen blir dermed

$$v_s = \frac{\Delta p}{4\mu L} (r_0^2 - r^2)$$

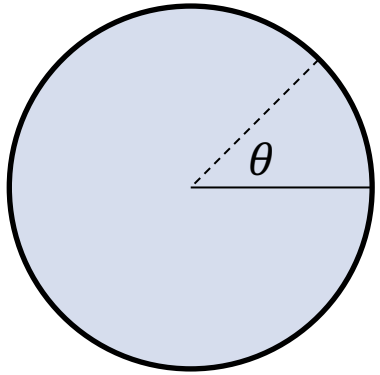




Hagen-Poiseuille-strømning fra Navier-Stokes

- Hastighetsfordelingen blir

$$v_s = \frac{\Delta p}{4\mu L}(r_0^2 - r^2)$$

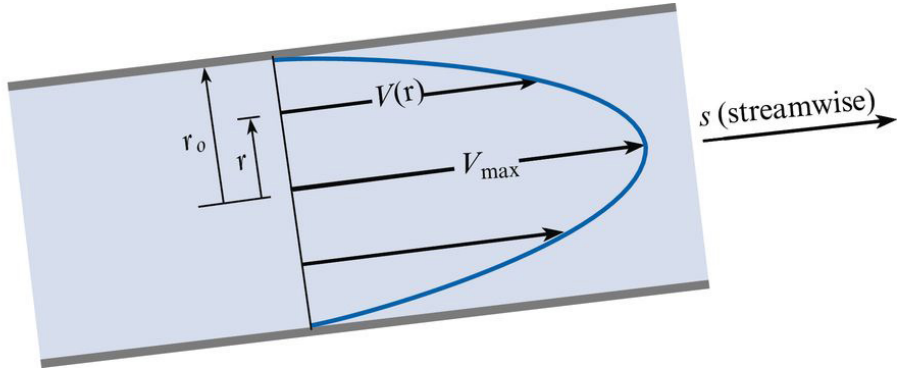


- Maks hastighet $v_{\max}$ i $r = 0$ blir

$$v_{\max} = \frac{\Delta p r_0^2}{4\mu L} \Rightarrow \Delta p = \frac{4\mu L v_{\max}}{r_0^2}$$

- Ved å integrere hastighetsprofilet finner vi at $v_{\max} = 2v_{\text{middel}} = 2\bar{V}$. Vi får

$$\Delta p = \frac{8\mu L \bar{V}}{r_0^2}$$



Hagen-Poiseuille-strømning fra Navier-Stokes

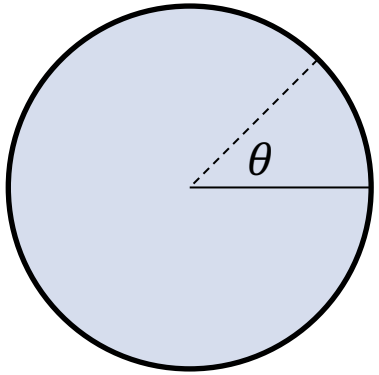
- Vi har

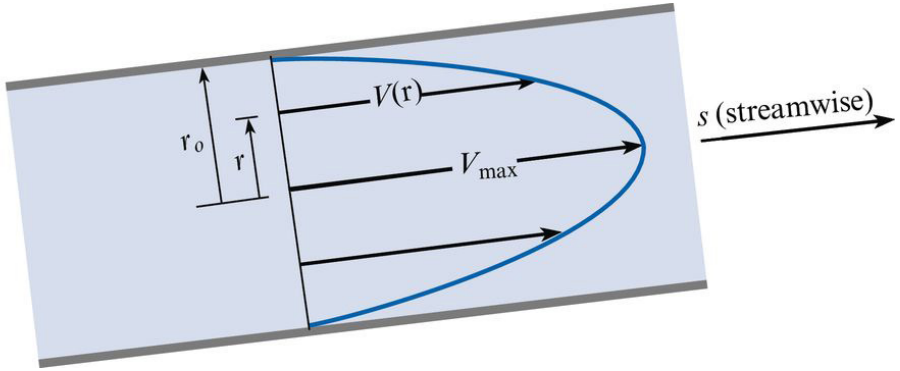
$$\Delta p = \frac{8\mu L\bar{V}}{r_0^2}$$

- Skrevet på høydeform, får vi

$$h_f = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{8\mu L\bar{V}}{\gamma r_0^2} = \frac{32\mu L\bar{V}}{\gamma D^2}$$

- Altså har vi samme resultat som i forelesning 14





Agenda

- Navier-Stokes likninger
  - Eksempel: Hagen-Poiseuille for laminær rørstrømning utledet fra Navier-Stokes
- Intro til CFD med demonstrasjon

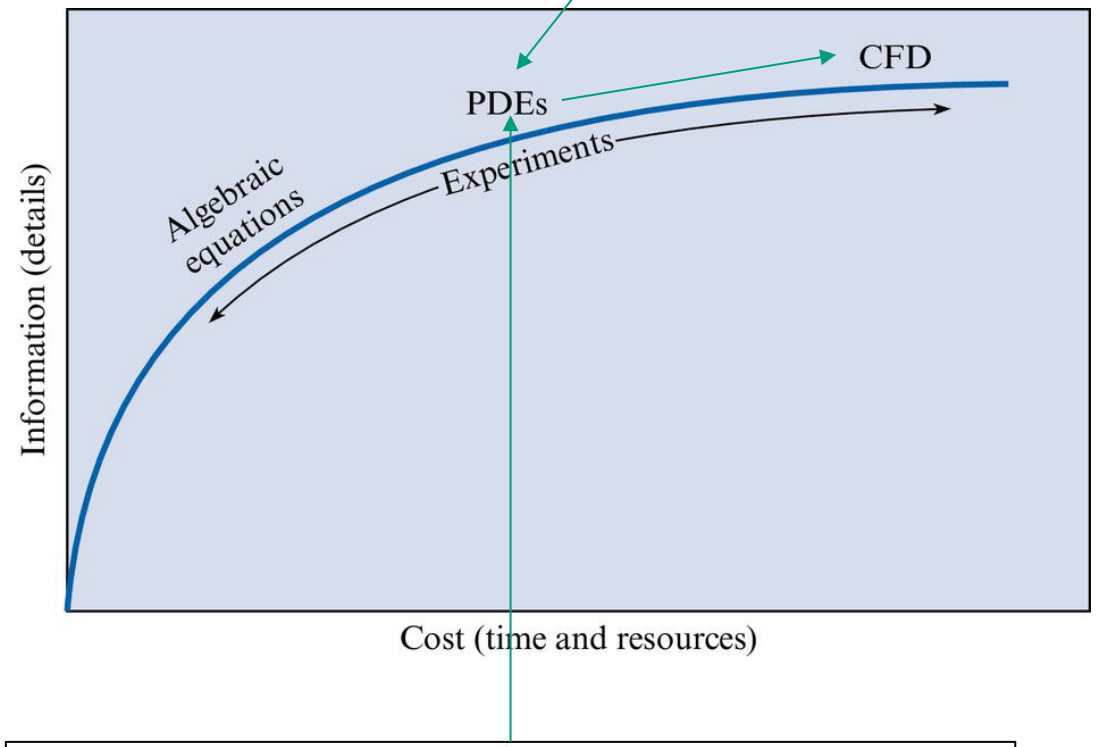


CFD = Computational Fluid Dynamics

- Ganske mange praktiske problemer i fluidmekanikk kan løses med håndregning
- Krever som regel at akselerasjonsleddene er null slik at Navier-Stokes likninghene blir lineære

- Mer kompliserte (ulineære) problemer må løses med eksperimenter eller CFD
- Hvis man er interessert i detaljene i strømningsmønsteret og geometrien er komplisert → CFD

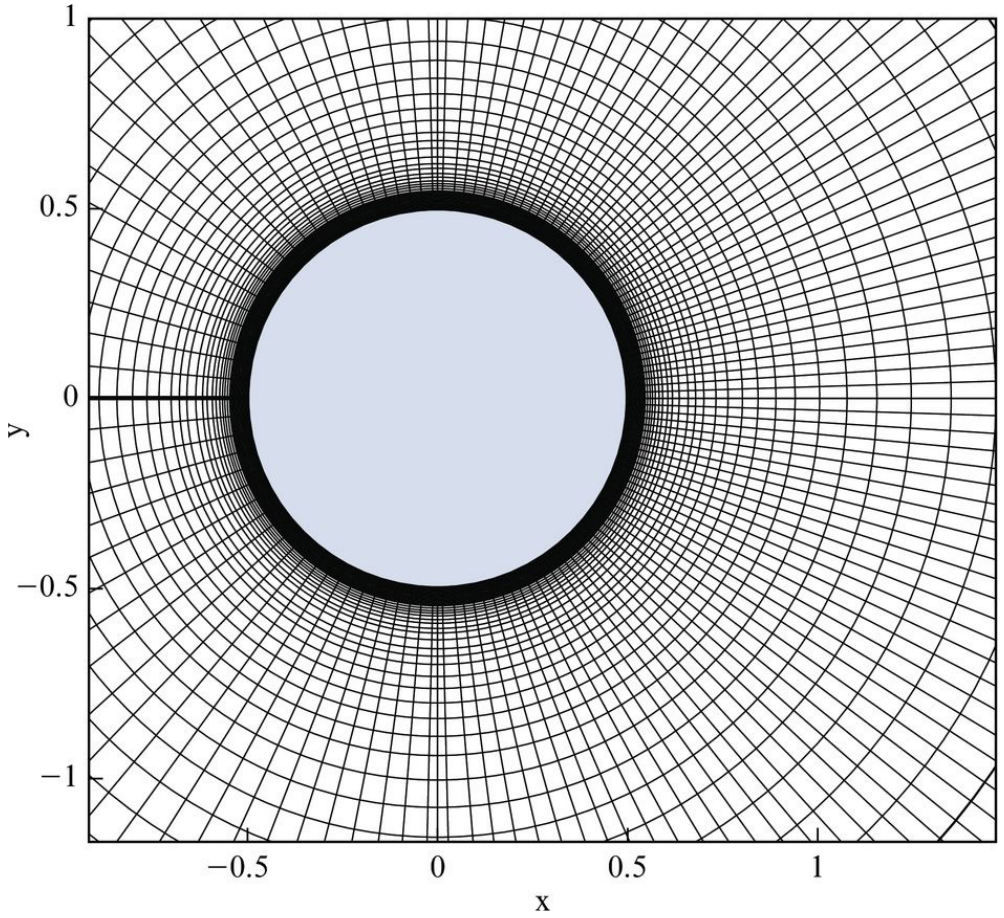
PDE = Partielle differensial-likninger (MATH250)



For inkompressibel strømning av Newtonske fluider snakker vi om Navier-Stokes likninger

CFD

- CFD innebærer
  - Dele opp kontinuerlig rom og tid i diskrete biter (diskretisering, gridding, meshing)
  - Skrive de partielle differensial-likningene på tilnærmet algebraisk form for diskretisert rom/tid
  - Løse de tilnærmede likningene på datamaskin



Turbulens og CFD

- I prinsippet kan Navier-Stokes og CFD beskrive turbulens i detalj (DNS – Direct Numerical Simulations)
- I praksis er det beregningsmessig for tungt for større strømningsområder
- I stedet bruker man tilnærmede turbulensmodeller
  - $k - \epsilon$ med RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes)
  - LES = Large Eddy Simulation
  - Og flere…

TABLE 16.3 Predicted Drag for Cyclists from Defraeye et al. (17)

Cyclist Position (Fig. 16.22)	Turbulence Model	AC_D (m^2)	Comparison with Experiment (%)[a]
Upright	RANS	0.219	13
	LES	0.219	13
Dropped	RANS	0.179	7
	LES	0.172	3
Time trial	RANS	0.150	12
	LES	0.142	6

[a]The comparison with the experiment is calculated using this formula:

$$\frac{(AC_D \text{ predicted from CFD}) - (AC_D \text{ measured from experiment})}{(AC_D \text{ measured from experiment})}$$

CFD

- Ulike løsningsalgoritmer
  - Finite difference (lett å forstå)
  - Finite element (fleksibel, teoretisk vanskeligere)
  - Finite volume (mest brukt for CFD)
- Kommersielle og ikke-kommersielle programpakker tilgjengelig (eks. ANSYS, OpenFoam)

