7 – Gjennomgang av labøvinger, volum- og massestrøm og kontrollvolum (Reynolds transportteorem er egenstudie)

TPS200 – Fluidmekanikk 1: Innføring

16-02-2022 – Endre Joachim Lerheim Mossige, Universitetslektor

Labinfo 16.feb

Kontaktinfo

- Håkon Lunde, 5-år Maskin-, prosess- og produktvikling

  hlunde@nmbu.no

- Lars Jørgen Nylund, 5-år Maskin-, prosess- og produktvikling

  lnylund@nmbu.no

Labinfo

- Torsdager fra 08.15 – 16.00
  - 2t per gruppe
- TF1-115
- Jobber sammen i grupper
  - Leverer én samlet rapport
- Enkel labrapport med spørsmål og utfyllende svar
- Excel- og rapportmal ligger på canvas
- Les labmanual!

Oppsett

- Første 4 ukene -> øvelse 1-6
- Lab 7-12 i neste parti

- lab 1 – Kontroll av manometer
- lab 2 – Kavitasjon
- Lab 3 – Metasenter
- Lab 4 – Fri og tvungen virvel
- Lab 5 – Hydrostatisk trykk
- Lab 6 – Reynoldsapparat

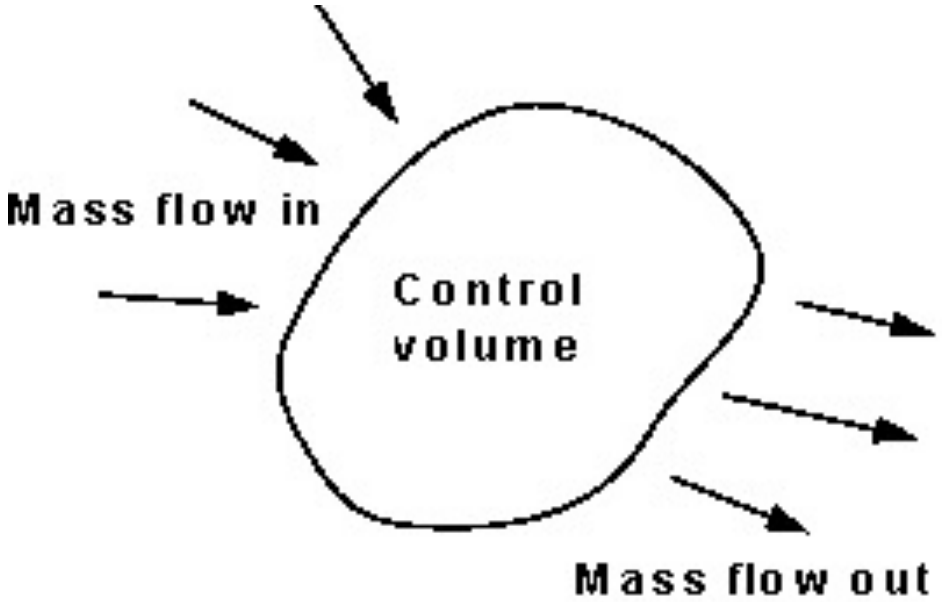


Hydraulisk benk

- Brukes i alle labene
- Se introduksjonsvideo til benken under
- https://youtu.be/zC2lAEEYr4M

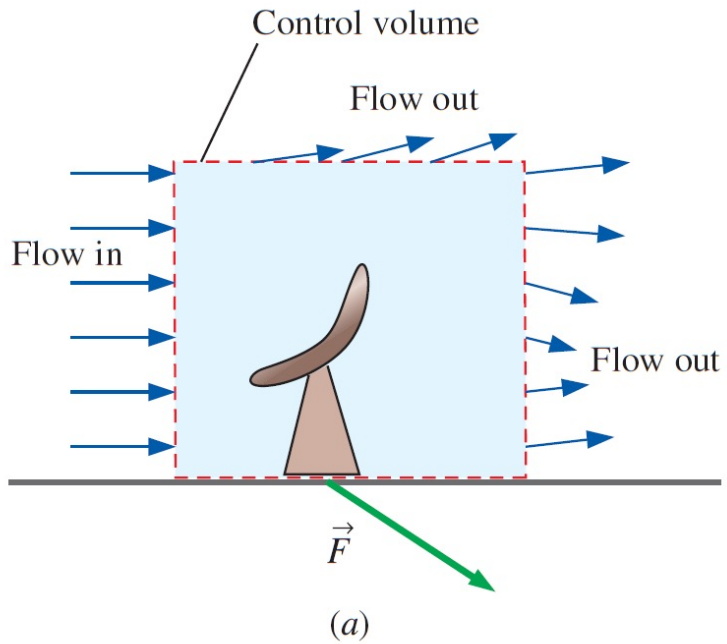
Agenda

- Ny bevaringslov: Massebevaring
- Kontrollvolum

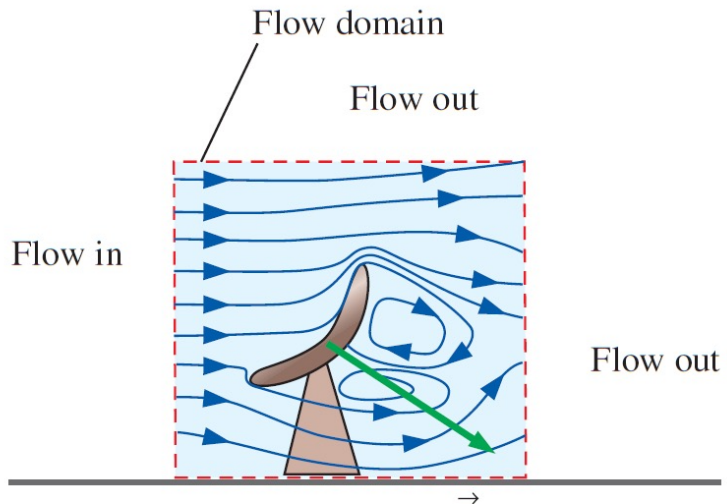


Masse inn – masse ut = Akkumulert masse

This Photo by Unknown Author is licensed under CC BY

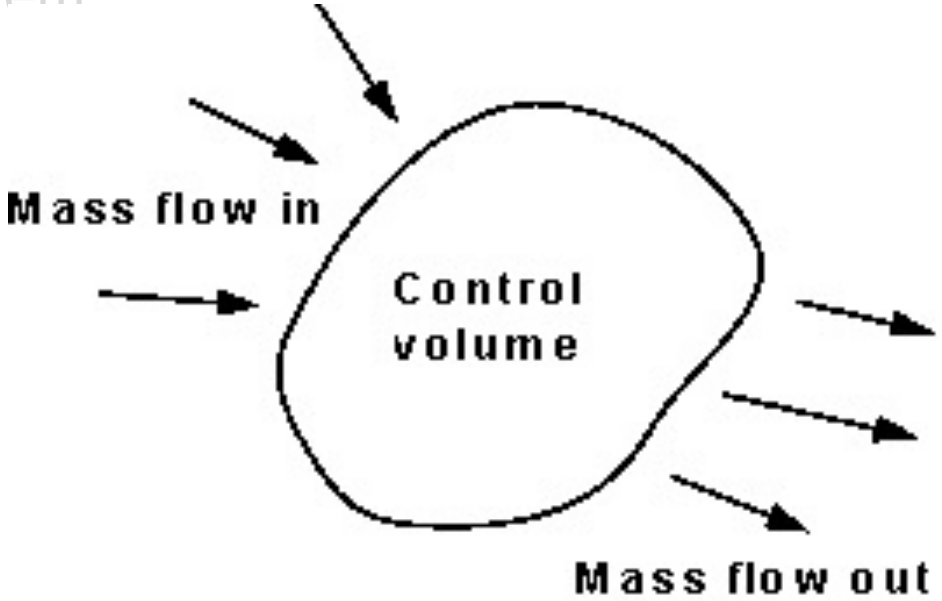


(a)



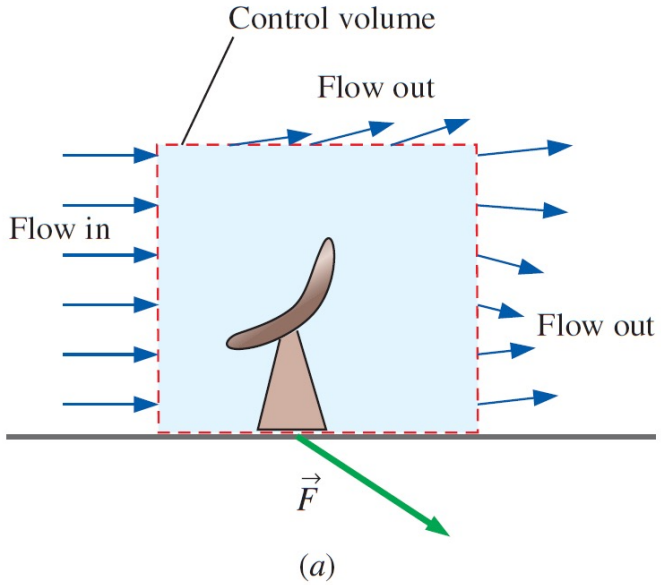
Agenda

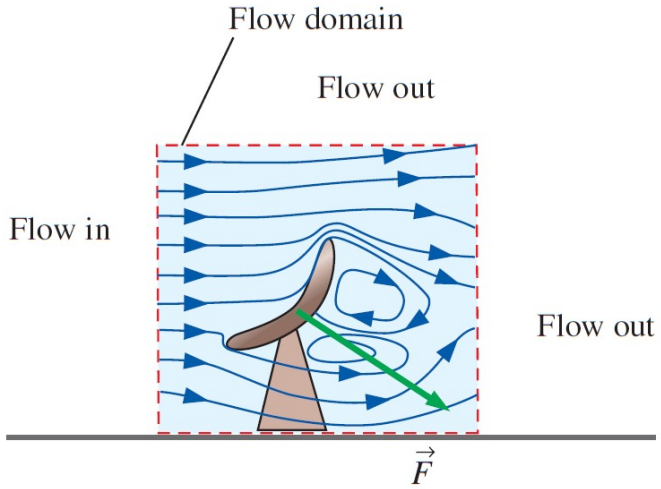
- Massebevaring
- Kontrollvolum og Reynolds transportteorem



Masse inn – masse ut = Akkumulert masse

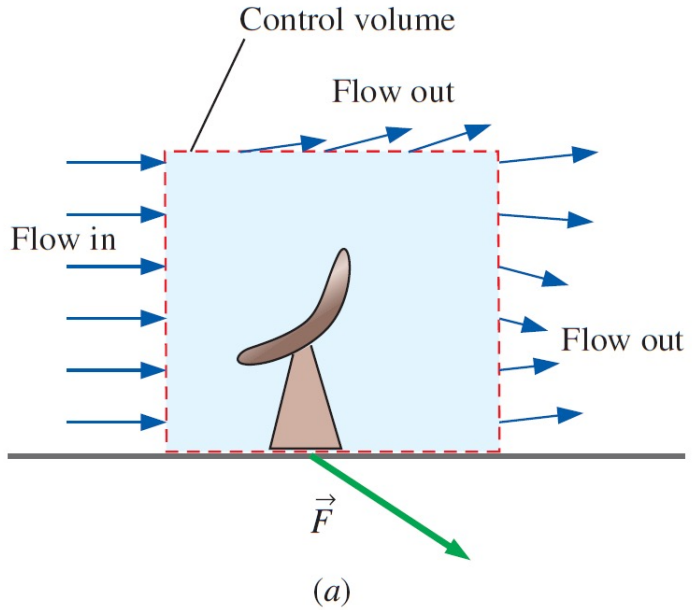
This Photo by Unknown Author is licensed under CC BY

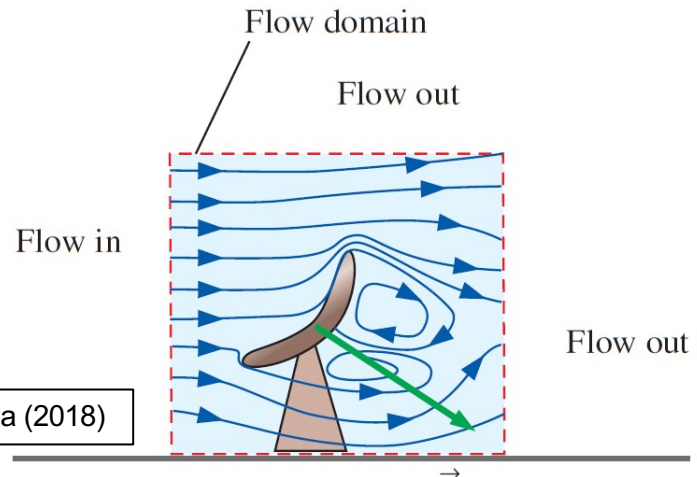




Påminnelse: To teoretiske tilnærminger til fluidmekanikk

- Fra tidligere:
  - Bevaring av bevegelsesmengde (Newtons 2. lov)
  - Bevaring av energi (Bernoulli)
- Forskjellen er:
  - Kontrollvolumtilnærming: Lovene formuleres for et makroskopisk kontrollvolum → Færre differensiallikninger
  - Differensiell tilnærming: Lovene formuleres «lokalt» for en fluidpartikkel/et «uendelig lite kontrollvolum» → Masse differensiallikninger





Cengel & Cimbala (2018)

Volumstrøm/volumfluks

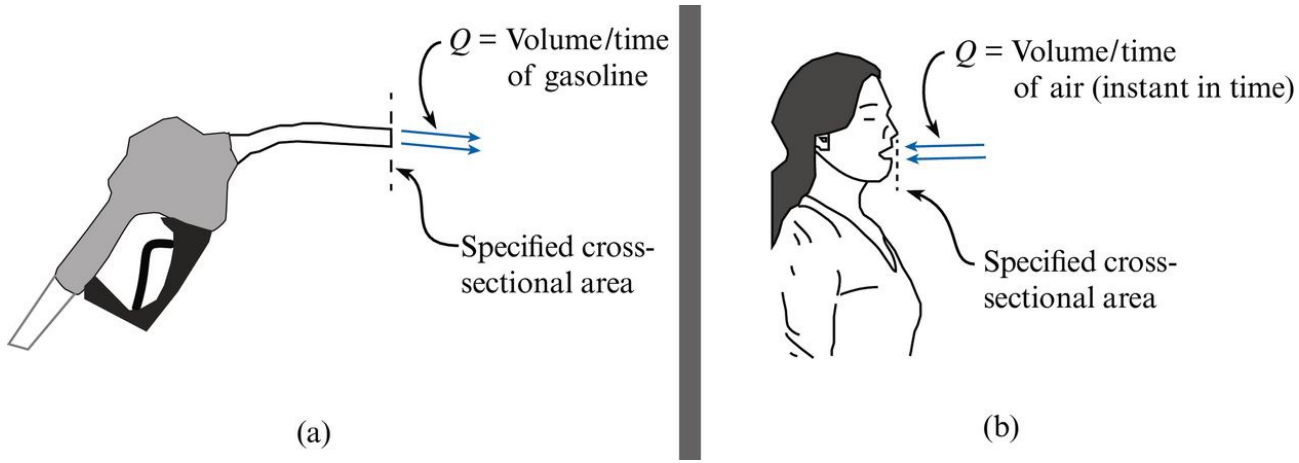
- Definisjon for volumstrøm Q:

$$[Q] = L^3T^{-1}; \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

$$Q(t) = \left(\frac{\text{Volum } \Delta\forall \text{ som har passert et gitt tverrsnittsareal}}{\text{Tidsintervall } \Delta t}\right)_{\text{liten } \Delta t}$$

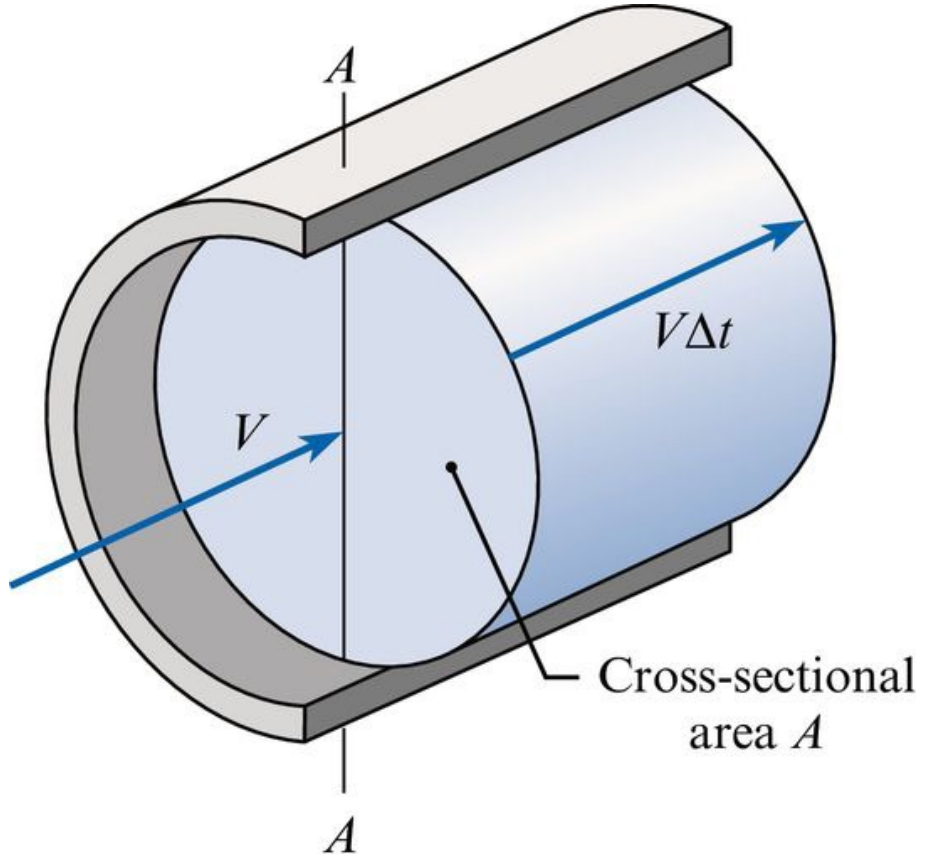
$$Q(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\forall}{\Delta t}$$

- Volumstrøm er knyttet til et *bestemt tverrsnittsareal*
- Volumstrøm er knyttet til et *bestemt tidspunkt* og kan variere med tiden



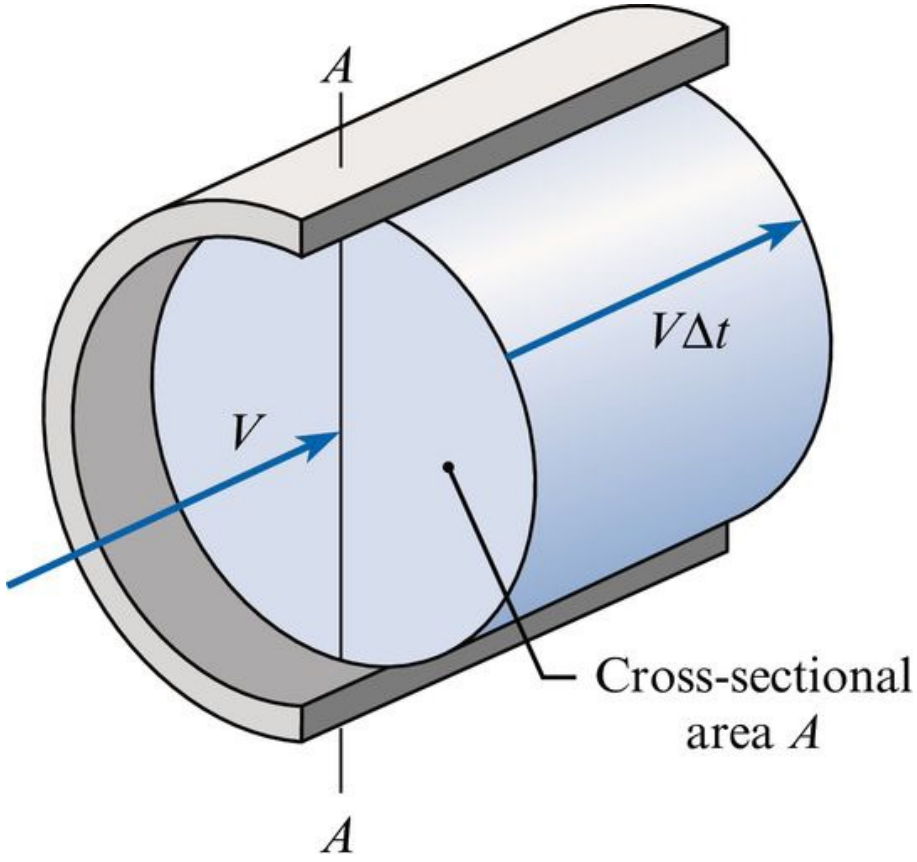
Uttrykk for volumstrøm ved uniform hastighet

- Hastigheten er uniform over flaten $A - A$ og har retning normalt på flaten
- I løpet av tiden Δt rekker fluidet å strømme en strekning $V\Delta t$
- Volumet som passerer $A - A$ i løpet av tiden Δt er derfor $AV\Delta t$



Individuell: Uttrykk for volumstrøm ved uniform hastighet

- Hastigheten er uniform over flaten A – A og har retning normalt på flaten
- I løpet av tiden Δt rekker fluidet å strømme en strekning $V\Delta t$
- Volumet som passerer $A - A$ i løpet av tiden Δt er derfor $AV\Delta t$

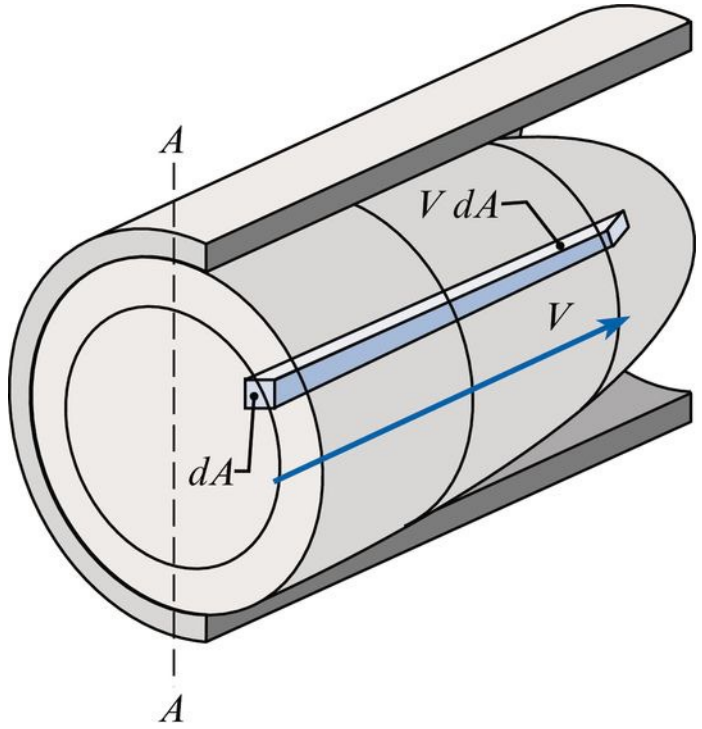


Hva blir Q uttrykt ved hastighet V og tverrsnittareal A?

Individuell: Uttrykk for volumstrøm ved varierende hastighet

- Hastigheten fortsatt normal på flaten
- Vi tenker oss mange små arealelementer (dA) med konstant hastighet i hvert arealelement og integrerer opp

Hva blir volumstrømmen Q hvis hastigheten varierer over tverrsnitt A (hint: integral)?

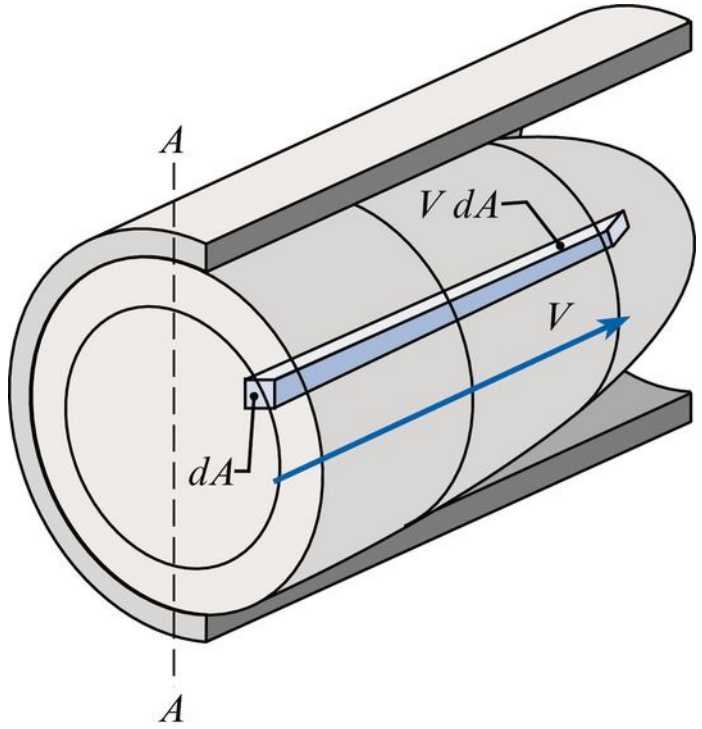


Individuell: Hva er gjennomsnittshastigheten?

- Hastigheten fortsatt normal på flaten
- Vi tenker oss mange små arealelementer (dA) med konstant hastighet i hvert arealelement og integrerer opp
- Volumfluks ved varierende hastighet:

$$Q = \int_A V \, dA$$

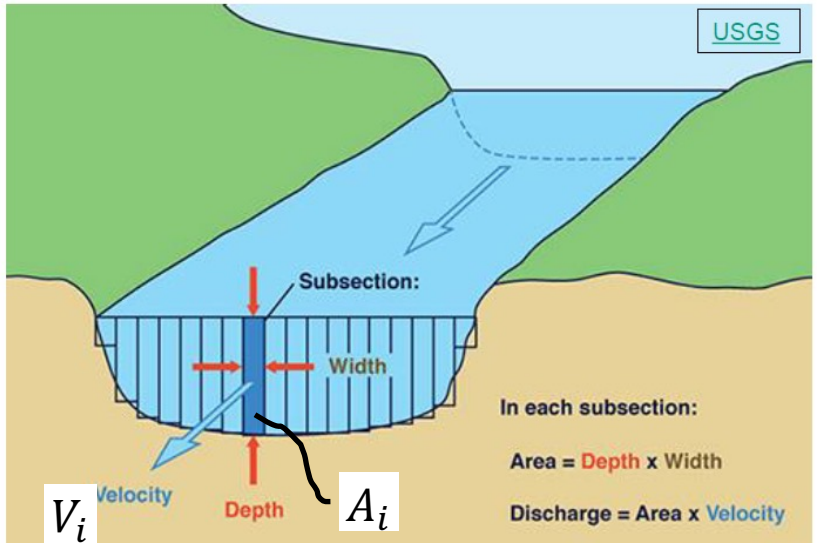
- Hva er gjennomsnittshastigheten $\bar{V}$ over flaten uttrykt ved A og Q?



Praktiske målinger av vannføring

- I kanaler, elver og delfylte rør må man ta hensyn til at hastigheten varierer over tverrsnittet når man måler vannføring
- Måler hastigheten V_i i ulike deler av tverrsnittet A_i og summerer over tverrsnittene

$$Q = \int_A V dA = \sum_i V_i A_i$$

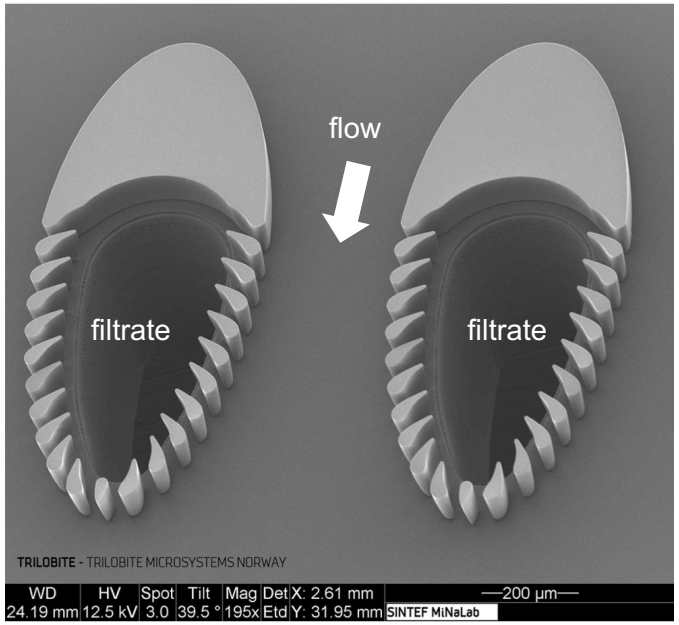


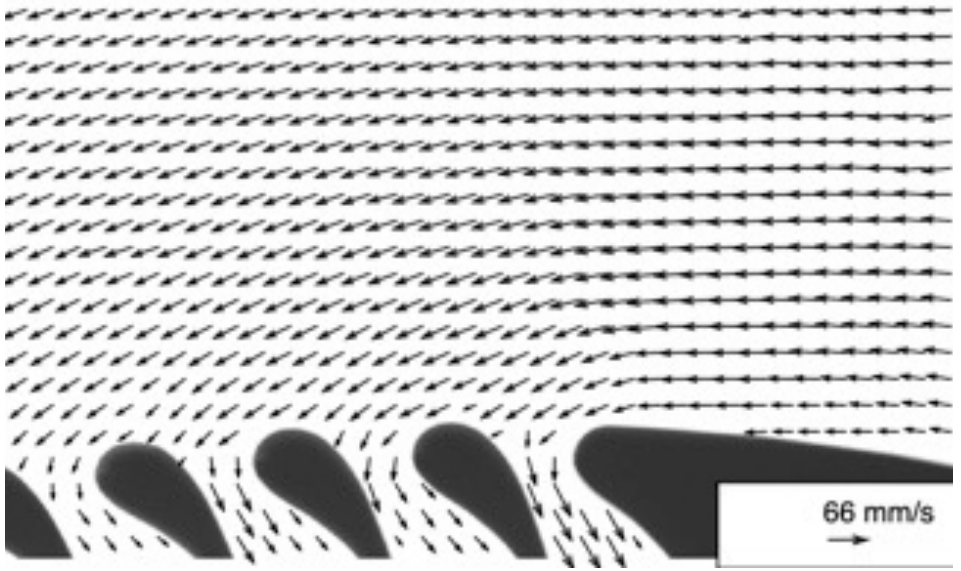
Vi vil finne ut hvor mye vann som går i filtratet: Måler hastighetsfeltet

- I kanaler, elver og delfylte rør må man ta hensyn til at hastigheten varierer over tverrsnittet når man måler vannføring
- Måler hastigheten V_i i ulike deler av tverrsnittet A_i og summerer over tverrsnittene

$$Q = \int_A V dA = \sum_i V_i A_i$$

Sett ovenfra

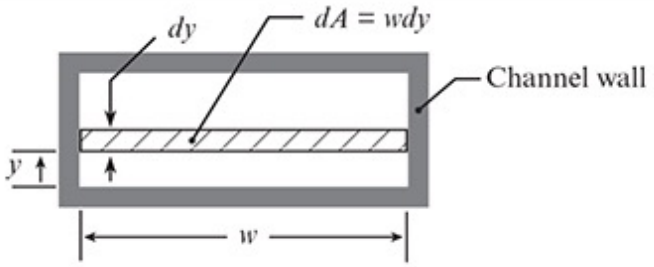




Hastighetsfelt sett fra siden

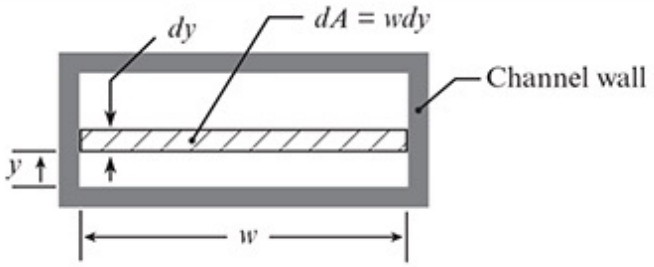
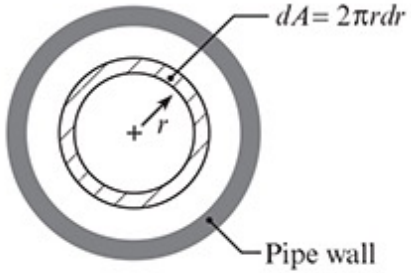
Arealelementet for kanalstrøm er gitt ved dA=wdy

TABLE 5.3 Differential Areas for Determining Flow Rate

Label	Sketch	Description
Channel flow		When velocity varies as $V = V(y)$ in a rectangular channel, use a differential area dA, given by $dA = wdy$, where w is the width of the channel and dy is a differential height.

Arealelementet for rørstrøm er gitt ved dA=$2\pi r dr$

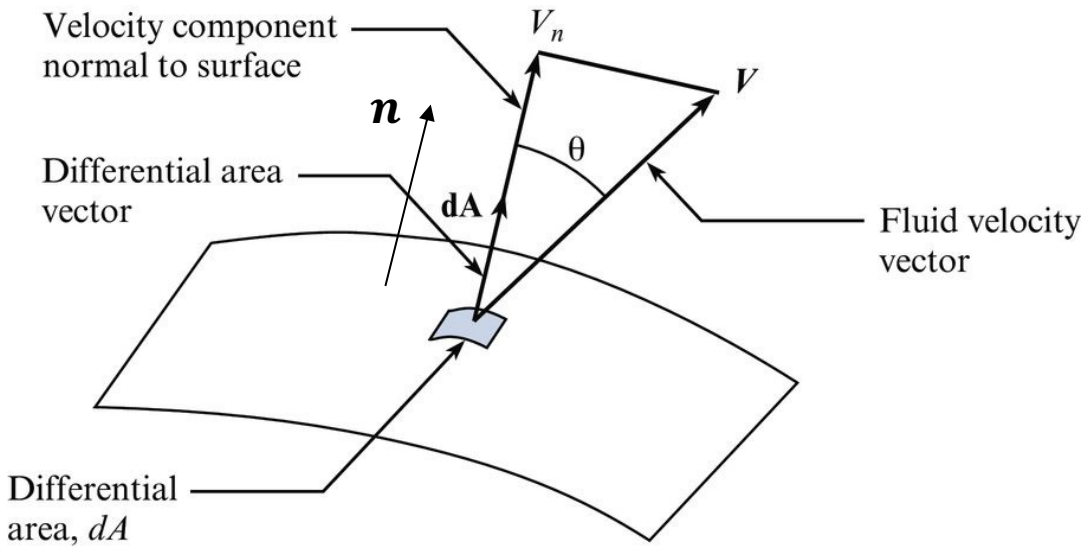
TABLE 5.3 Differential Areas for Determining Flow Rate

Label	Sketch	Description
Channel flow		When velocity varies as $V = V(y)$ in a rectangular channel, use a differential area dA, given by $dA = wdy$, where w is the width of the channel and dy is a differential height.
Pipe flow		When velocity varies as $V = V(r)$ in a round pipe, use a differential area dA, given by $dA = 2\pi r dr$, where r is the radius of the differential area and dr is a differential radius.

Når hastigheten ikke er normal på arealet må hastighetsvektoren prikkes med normalen til flaten (arealet)

- Vi får *ikke* bidrag til Q fra hastighets-komponenten som er tangentiell til arealelementet $\mathbf{dA} = \mathbf{n}\, dA$; kun bidrag fra normalkomponenten V_n
- Størrelsen til normalkomponenten er gitt ved

$$V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$$



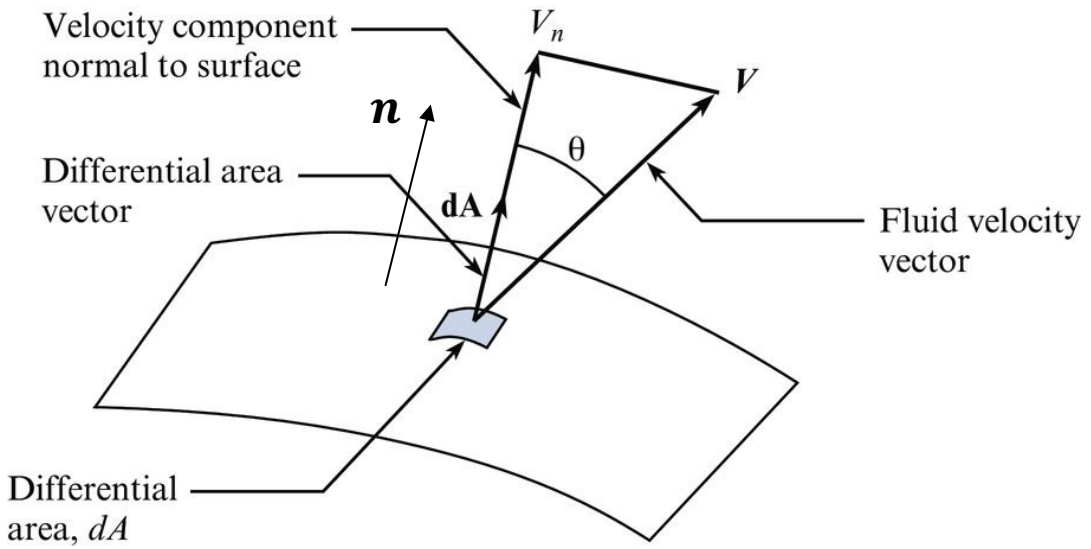
n er flatenormalen

Individuell: Hva er V_n uttrykt ved V og θ?

- Vi får *ikke* bidrag til Q fra hastighets-komponenten som er tangentiell til arealelementet $\mathbf{dA} = \mathbf{n}\, dA$; kun bidrag fra normalkomponenten V_n
- Størrelsen til normalkomponenten er gitt ved

$$V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$$

Hva er V_n uttrykt ved V og θ ?



n er flatenormalen

Når hastigheten ikke er normal på arealet må hastighetsvektoren prikkes med normalen til flaten (arealet)

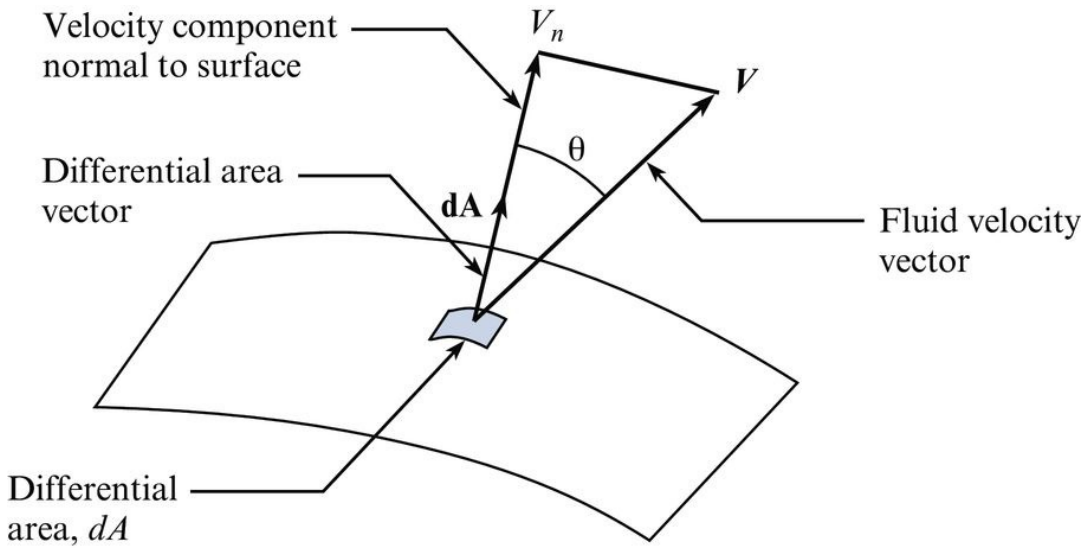
Husk: $\mathbf{n}$ er en enhetsvektor ($|\mathbf{n}| = 1$) som står normalt på flaten overalt og $\mathbf{dA} = \mathbf{n}\, dA$

- Vi får *ikke* bidrag til Q fra hastighets-komponenten som er tangentiell til arealelementet $\mathbf{dA} = \mathbf{n}\, dA$; kun bidrag fra normalkomponenten V_n
- Størrelsen til normalkomponenten er gitt ved

  $$V_n = |\mathbf{V}| \cos\theta = |\mathbf{V}||\mathbf{n}| \cos\theta = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$$

- Her er θ vinkelen mellom hastighetsvektoren og enhetsnormalen $\mathbf{n}$ til arealelementet $\mathbf{dA}$
- Vi får:

$$Q = \int_A V_n\, dA = \int_A \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA = \int_A \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}$$



Massestrøm/massefluks er volumstrøm ganger egenvekten til fluidet

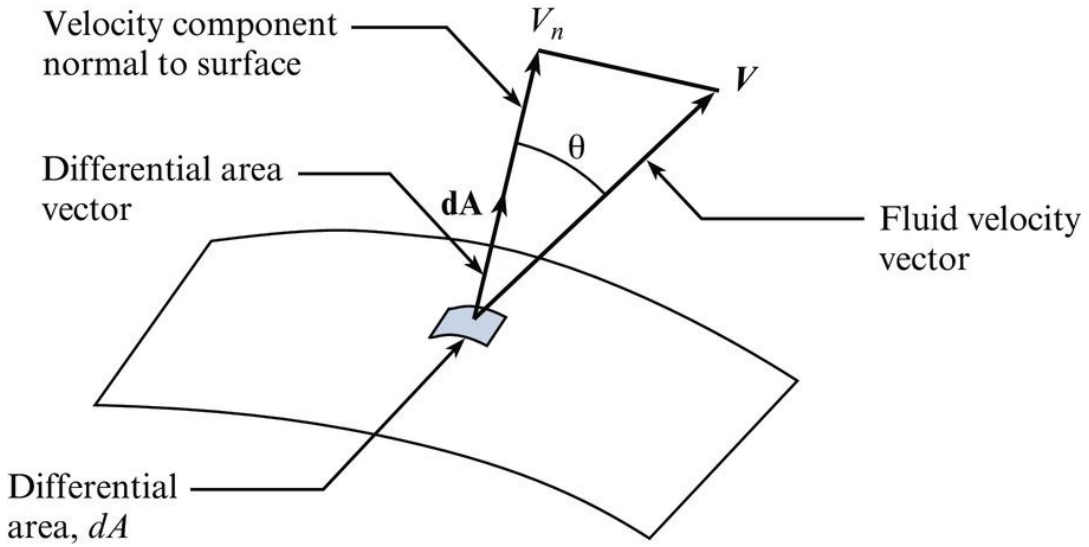
- Volumstrømmen Q

$$\dot{Q} = \int_A \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

- Massestrømmen

$$\dot{m} = \int_A \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

$$[\dot{m}] = MT^{-1}; \mathrm{kg/s}$$



Massestrøm/massefluks er volumstrøm ganger egenvekten til fluidet

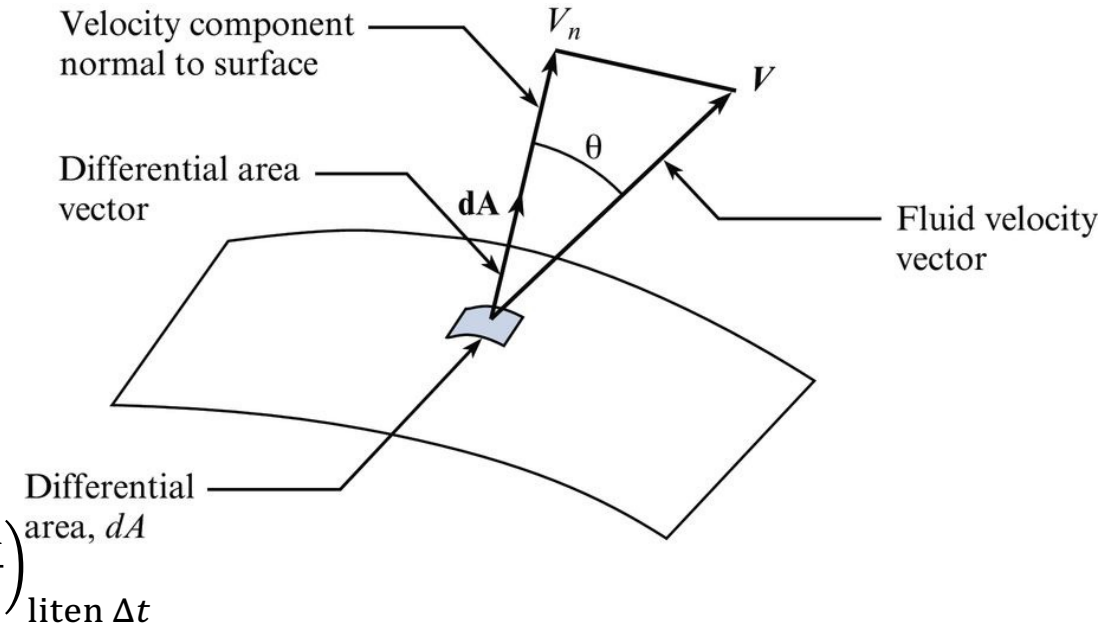
- Volumstrømmen Q

$$\dot{Q} = \int_A \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

- Massestrømmen

$$\dot{m} = \int_A \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

$$[\dot{m}] = MT^{-1}; \mathrm{kg/s}$$



- Definisjon for massestrøm $\dot{m}$:

$$\dot{m} = \left(\frac{\text{Masse } \Delta m \text{ som har passert et gitt tverrsnittsareal}}{\text{Tidsintervall } \Delta t} \right)_{\text{liten } \Delta t}$$

Massestrøm/massefluks er volumstrøm ganger egenvekten til fluidet

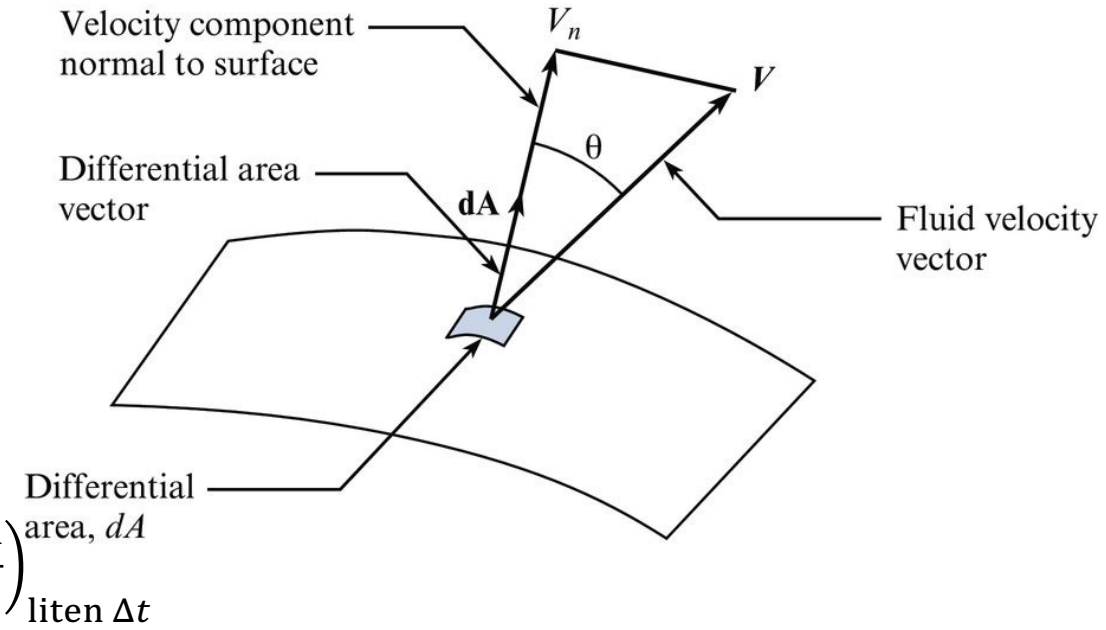
- Volumstrømmen Q

$$\dot{Q} = \int_A \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

- Massestrømmen

$$\dot{m} = \int_A \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

$$[\dot{m}] = MT^{-1}; \mathrm{kg/s}$$



- Definisjon for massestrøm $\dot{m}$:

$$\dot{m} = \left(\frac{\text{Masse } \Delta m \text{ som har passert et gitt tverrsnittsareal}}{\text{Tidsintervall } \Delta t} \right)_{\text{liten } \Delta t}$$

- Hvis ρ, V er konstant over tverrsnitt A:
- $\dot{m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho \Delta \forall}{\Delta t} = \rho Q = \rho A V$

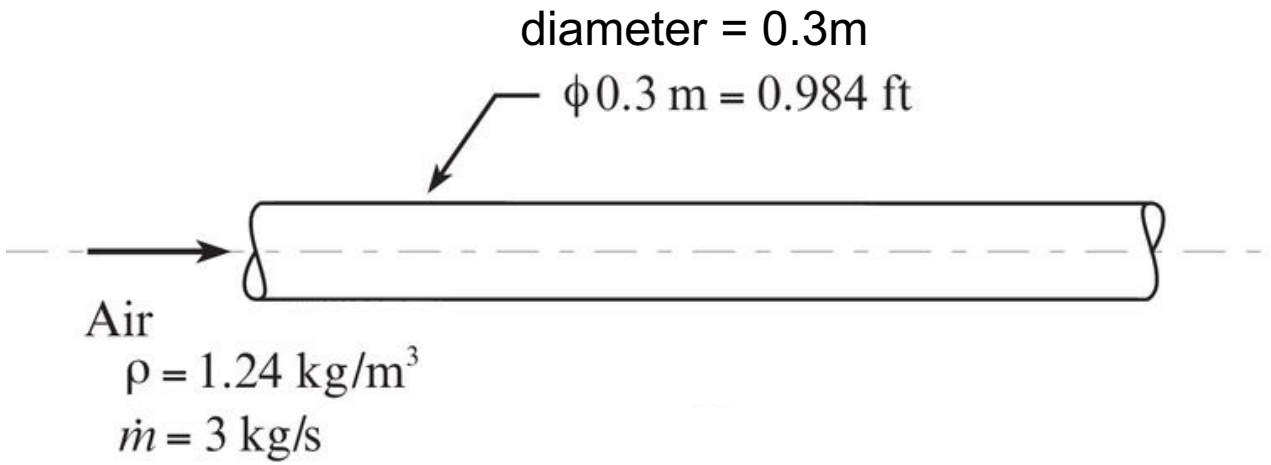
Volum- og massestrøm oppsummért

TABLE 5.2 Summary of the Flow Rate Equations

Description	Equation	Terms
Volume flow rate equation	$Q = \overline{V}A = \frac{\dot{m}}{\rho} = \int_A V\,dA = \int_A \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$ (5.10)	Q = volume flow rate = discharge (m^3/s) $\overline{V}$ = mean velocity = area averaged velocity (m/s) A = cross-sectional area (m^2) $\dot{m}$ = mass flow rate (kg/s) V = speed of a fluid particle (m/s) dA = differential area (m^2) $\mathbf{V}$ = velocity of a fluid particle (m/s) $\mathbf{dA}$ = differential area vector (m^2) (points outward from the control surface)
Mass flow rate equation	$\dot{m} = \rho A\overline{V} = \rho Q = \int_A \rho V\,dA = \int_A \rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$ (5.11)	$\dot{m}$ = mass flow rate (kg/s) ρ = mass density (kg/m^3)

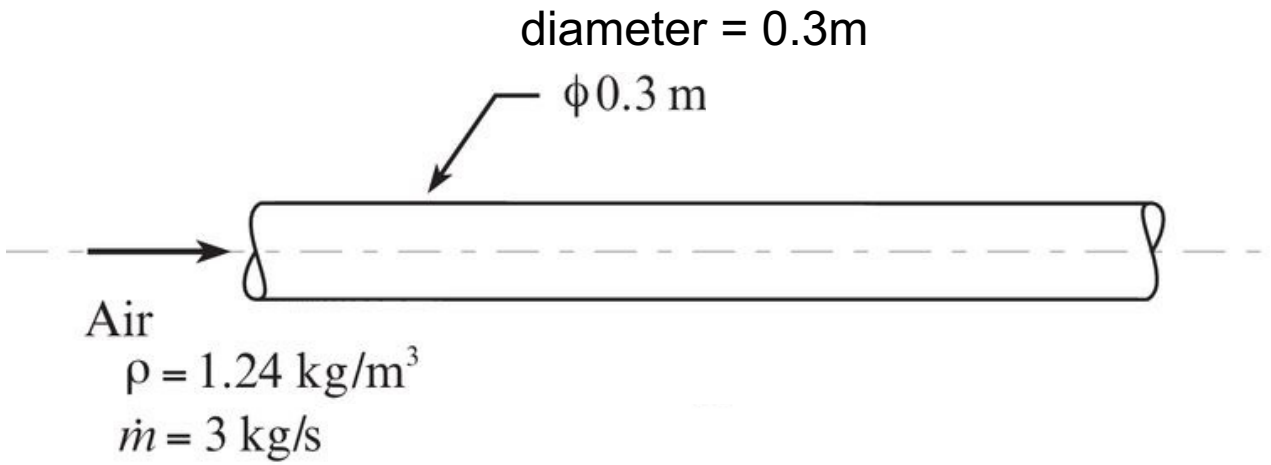
EFM Eksempel 5.1

- Luft strømmer med en viss massestrøm i et rørtverrsnitt, se tallverdier i figur (Diameter: 0.3 m)
- Hva blir volumstrømmen Q?



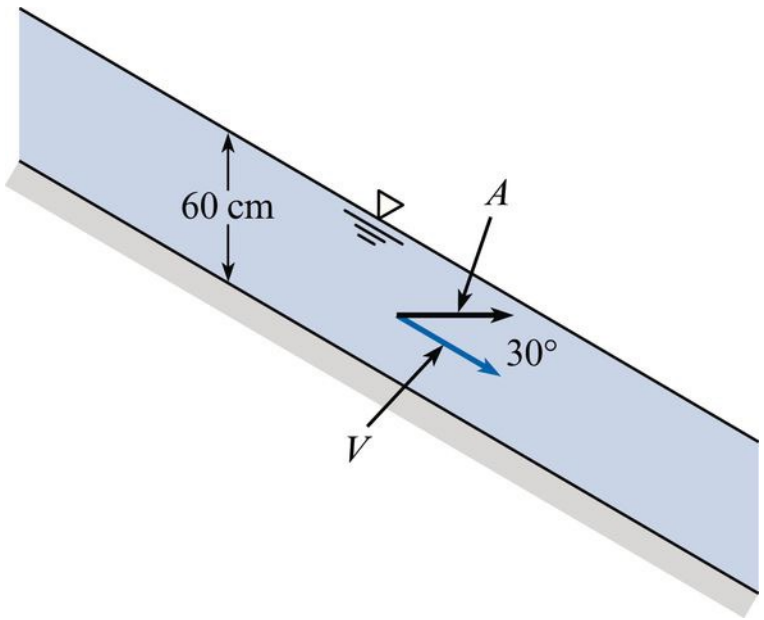
EFM Eksempel 5.1

- Volumstrømmen Q er $2.42\ \mathrm{m}^3/s$
- Hva blir middelhastigheten $\bar{V}$?



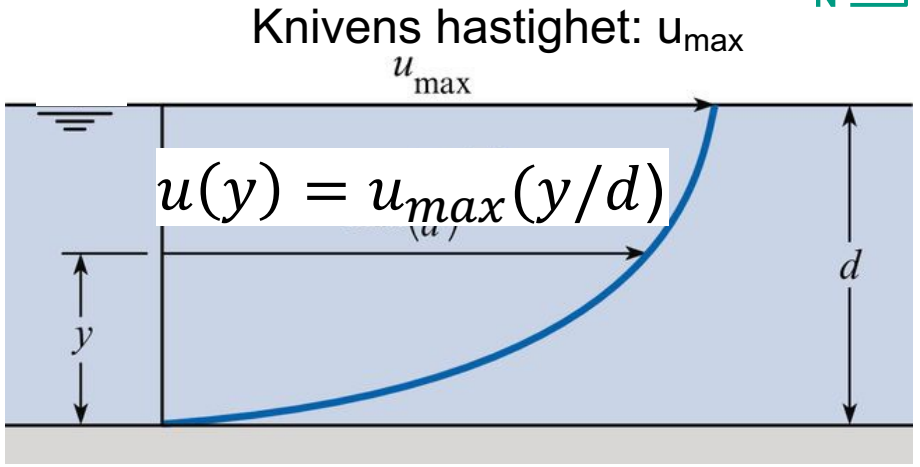
Individuell: EFM Eksempel 5.2

- Kanalstrøm med en uniform hastighet på 12 m/s (konstant over tverrsnittet) parallell med kanalbunnen
- Strømningsdybden er 60 cm, målt vertikalt
- Hva blir **volumstrømmen** per breddeenhet (inn i papiret) av kanalen?
- Hint: Vinkelen skal med!



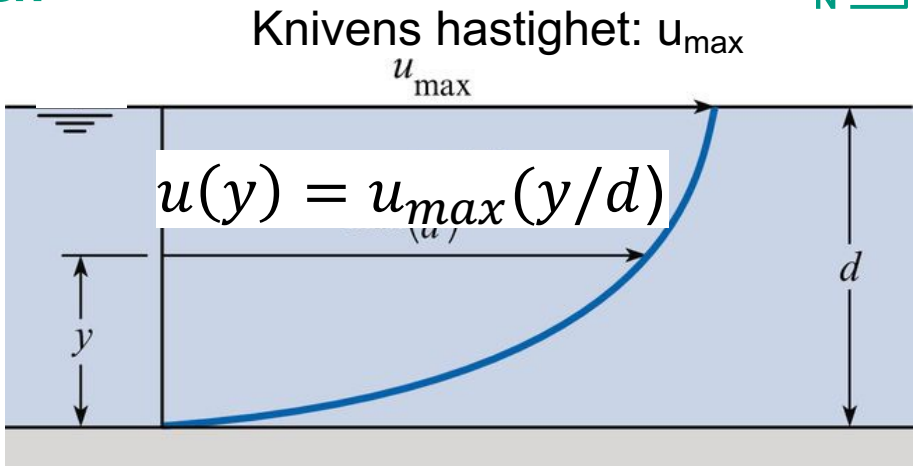
Smøre pålegg på brødskiva: Bestem et uttrykk for volumstrømmen

- Kanalstrømning med varierende hastighet over dybden
- Bestem et uttrykk for volumstrømmen



Individuell: Smøre pålegg på brødskiva: Bestem et uttrykk for volumstrømmen

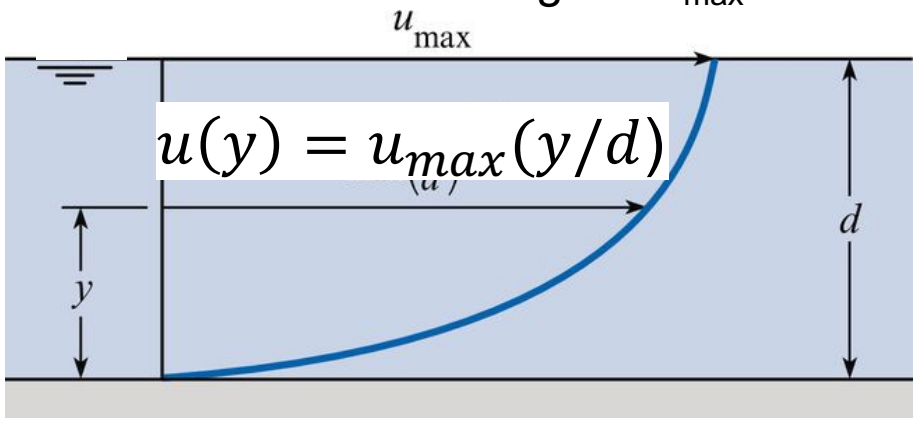
- Kanalstrømning med varierende hastighet over dybden
- Bestem et uttrykk for volumstrømmen Q
- Kniven har bredde w som går inn i papiret

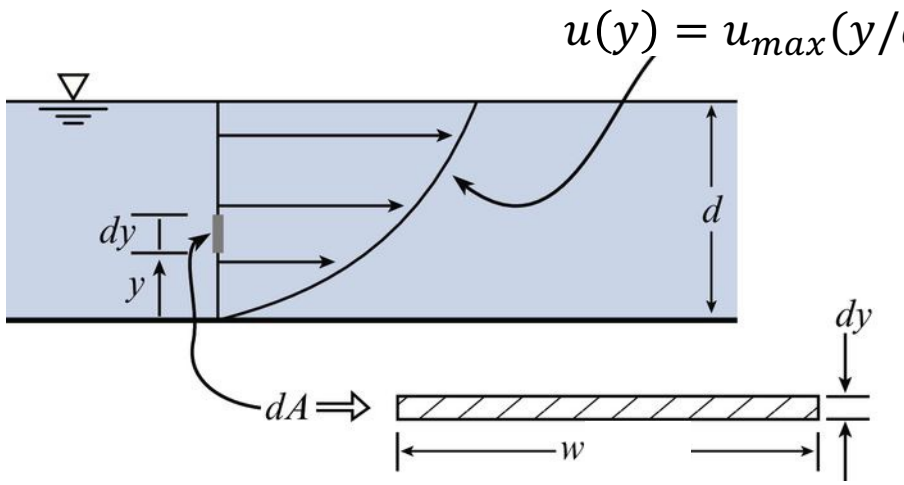


Individuell: Smøre pålegg på brødskiva: Bestem et uttrykk for volumstrømmen

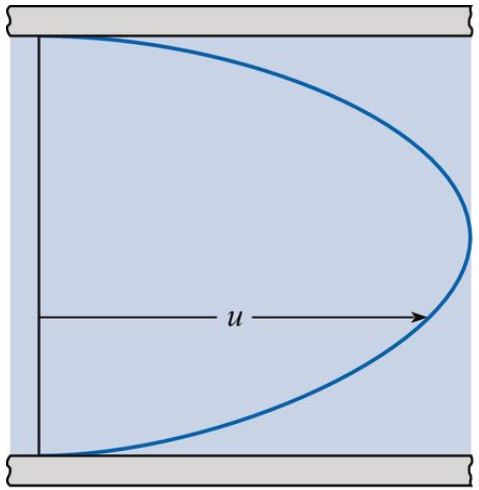
- Kanalstrømning med varierende hastighet over dybden
- Bestem et uttrykk for volumstrømmen Q
- Kniven har bredde w som går inn i papiret
- Tips: $Q = \int_A u(y)dA = \int_A u(y)wdy$

Knivens hastighet: u_{max}

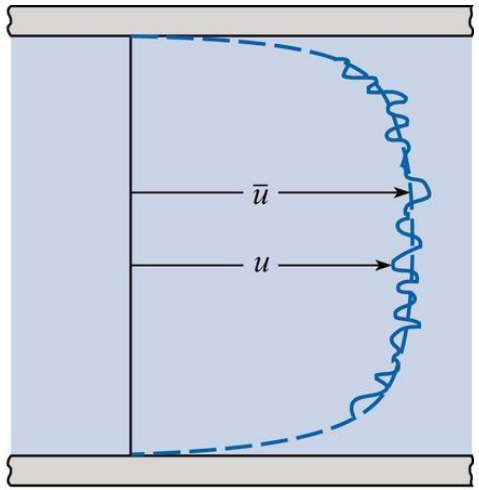




Middelhastighet vs. maks hastighet for ulike situasjoner



(a)

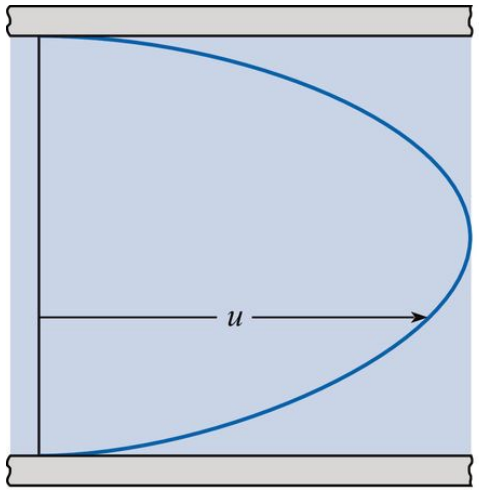


(b)

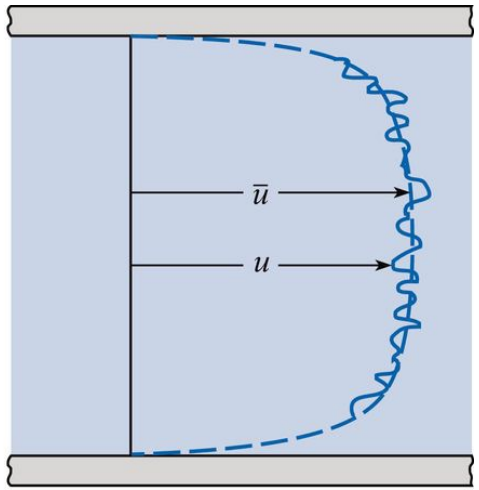
TABLE 5.1 Values of Mean Velocity

Situation	Equation for Mean Velocity
Fully developed laminar flow in a round pipe. For more information, see §10.5.	$\overline{V}/V_{max} = 0.5$, where V_{max} is the value of the maximum velocity in the pipe. Note that V_{max} is the value of the velocity at the center of the pipe.
Fully developed laminar flow in a rectangular channel (channel has infinite width).	$\overline{V}/V_{max} = 2/3 = 0.667$.
Fully developed turbulent flow in a round pipe. For more information, see §10.6.	$\overline{V}/V_{max} \approx 0.79$ to 0.86, where the ratio depends on the Reynolds number.

Middelhastighet vs. maks hastighet for ulike situasjoner



(a)



(b)

TABLE 5.1 Values of Mean Velocity

Situation	Equation for Mean Velocity
Fully developed laminar flow in a round pipe. For more information, see §10.5.	$\overline{V}/V_{max} = 0.5$, where V_{max} is the value of the maximum velocity in the pipe. Note that V_{max} is the value of the velocity at the center of the pipe.
Fully developed laminar flow in a rectangular channel (channel has infinite width).	$\overline{V}/V_{max} = 2/3 = 0.667$.
Fully developed turbulent flow in a round pipe. For more information, see §10.6.	$\overline{V}/V_{max} \approx 0.79$ to 0.86, where the ratio depends on the Reynolds number.

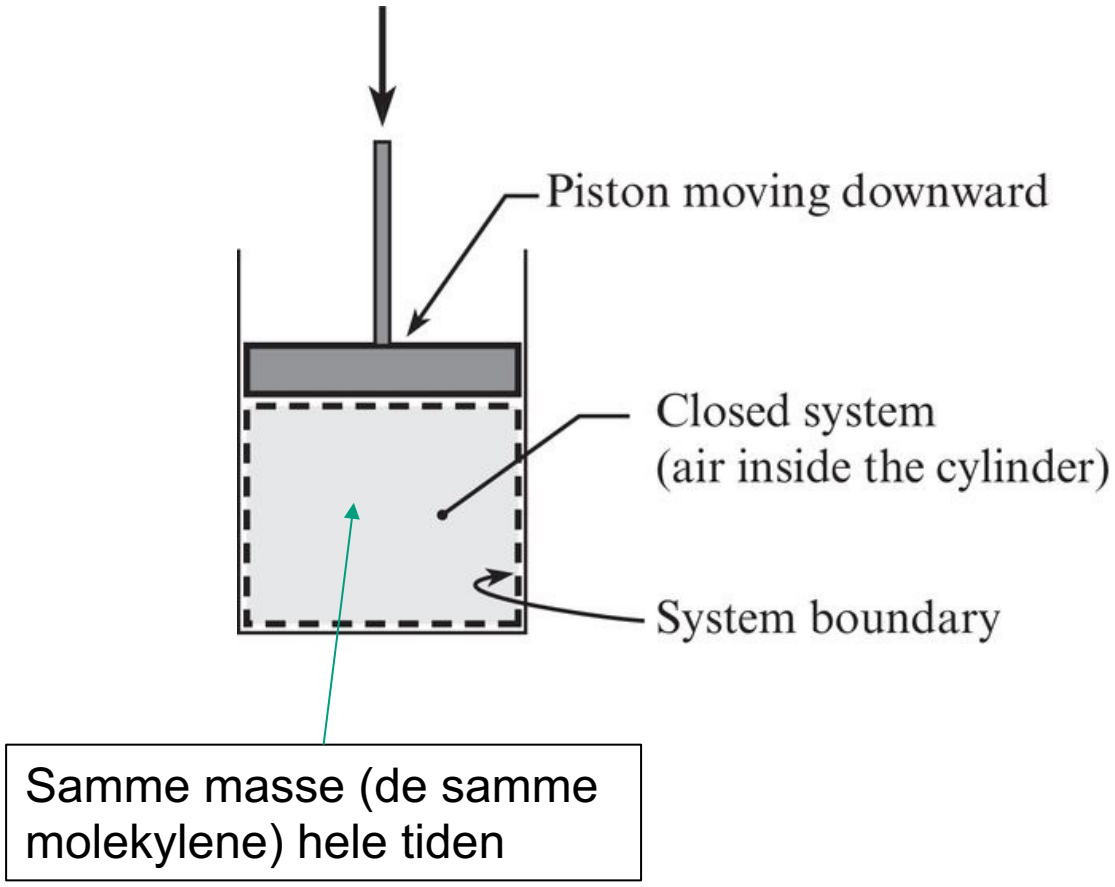
Agenda

- Volum- og massestrøm
- Kontrollvolum og Reynolds transportteorem



Lukket system – også kalt *kontrollmasse*

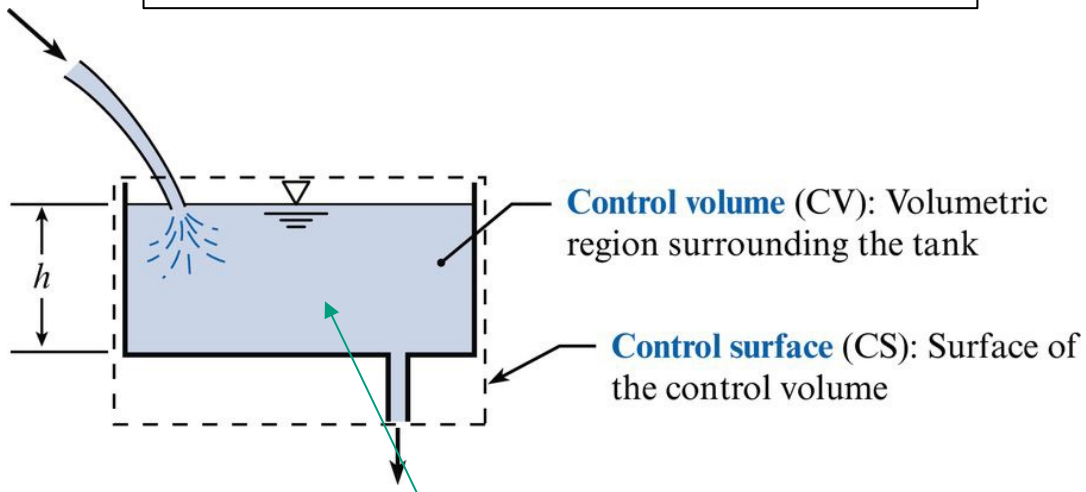
- Et system der det ikke er noen transport av masse gjennom *grenseflatene* til systemet
  - Altså ingen utveksling av masse mellom systemet og omgivelsene
  - Kontrollmassen kan bevege seg og deformeres, men massen er bevart
- Vi følger en bestemt ansamling av masse hele tiden (de samme molekylene) – et Lagrangeperspektiv



Åpent system – oftere kalt *kontrollvolum*

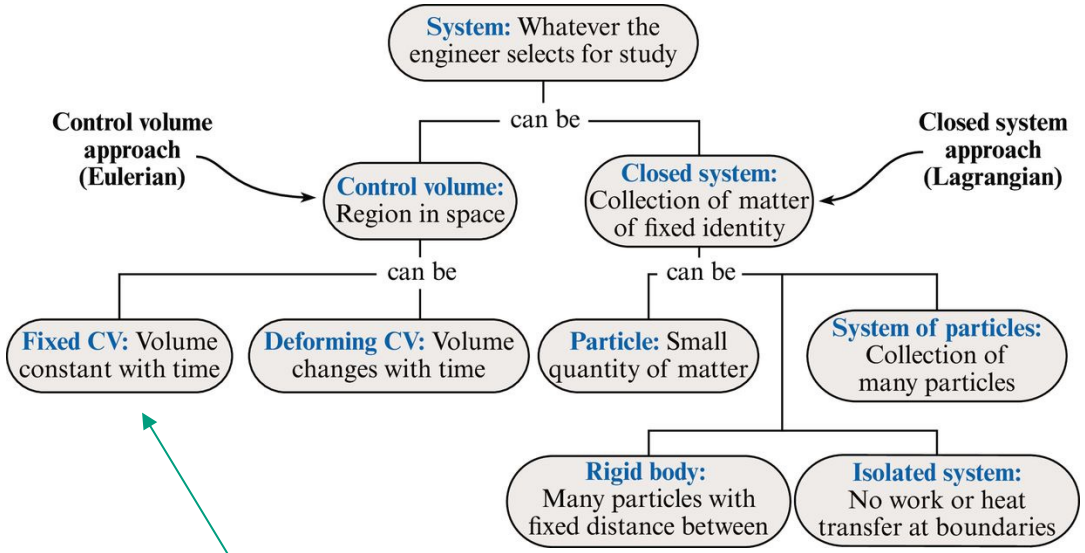
- Et system der det *tillates* transport av masse gjennom *grenseflatene* til systemet (kalt *kontrollflatene* til kontrollvolumet)
  - Man studerer et bestemt volum i rommet i stedet for en bestemt masse, som i et lukket system
  - Kontrollvolumet kan bevege seg og deformeres, men massen i volumet er ikke nødvendigvis bevart
- Vi studerer et bestemt område i rommet – et Eulerperspektiv

Man velger fritt! Grenseflatene trenger ikke svare til fysiske flater – man velger det som egner seg best for å løse et gitt problem.



Molekylene i CV kan byttes ut med tiden og CV har varierende total masse hvis massestrøm inn ≠ massestrøm ut

Kontrollvolum vs. lukkede systemer – oppsummert



Kan også ha et volum med fast størrelse, men som beveger seg med konstant eller varierende hastighet

TABLE 5.4 Comparison of the Control Volume and the Closed System Approaches

Feature	Closed System Approach	Control Volume Approach
Basic idea	Analyze a body or a fixed collection of matter.	Analyze a spatial region.
Lagrangian vs. Eulerian	Lagrangian approach.	Eulerian approach.
Mass crossing the boundaries	Mass cannot cross the boundaries.	Mass is allowed to cross the boundaries.
Mass (quantity)	The mass of the closed system must stay constant with time; always the same number of kilograms.	The mass of the materials inside the CV can stay constant or can change with time.
Mass (identity)	Always contains the same matter.	Can contain the same matter at all times, or the identity of the matter can vary with time.
Application	Solid mechanics, fluid mechanics, thermodynamics, and other thermal sciences.	Fluid mechanics, thermodynamics, and other thermal sciences.

Hvordan formulere fysiske lover for et kontrollvolum?

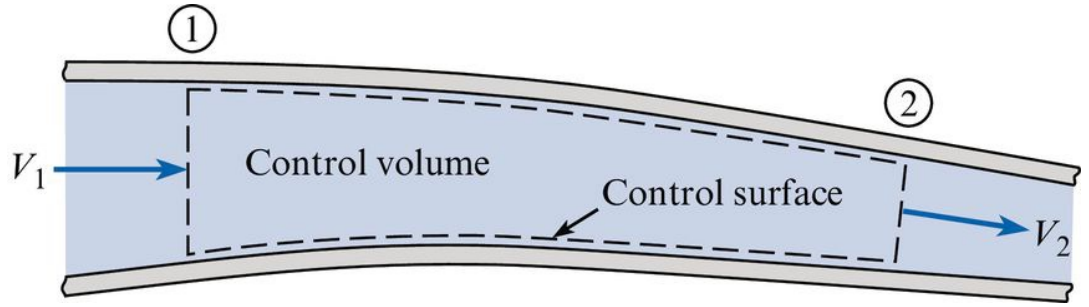
- Fysiske lover er i utgangspunktet formulert som *tidsderiverte størrelser* for partikler eller lukkede systemer med en fast masse m:
  - Bevaring av masse for lukket system
    $$\frac{dm}{dt} = 0$$
  - Bevaring av bevegelsesmengde (momentum), dvs. Newtons 2. lov, for lukket system
    $$\frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) = (\sum \mathbf{F})_{\text{ytre}}$$

Reynolds transportteorem

RTT: $\frac{dB_{ls}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{cv} b\rho\, dV + \int_{cs} b\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$

Transport av B gjennom kontrollflater

- B (f.eks. masse, bevegelsesmengde, energi) transporteres inn og ut av et kontrollvolum – vi må uttrykke dette matematisk
- Ved uniform hastighet over tverrsnittene 1 og 2 blir netto massetransport *ut* av CV:



$$\dot{m}_2 - \dot{m}_1 = \rho_2 Q_2 - \rho_1 Q_1$$
$$= \rho_2 V_2 A_2 - \rho_1 V_1 A_1$$

Transport av B gjennom kontrollflater

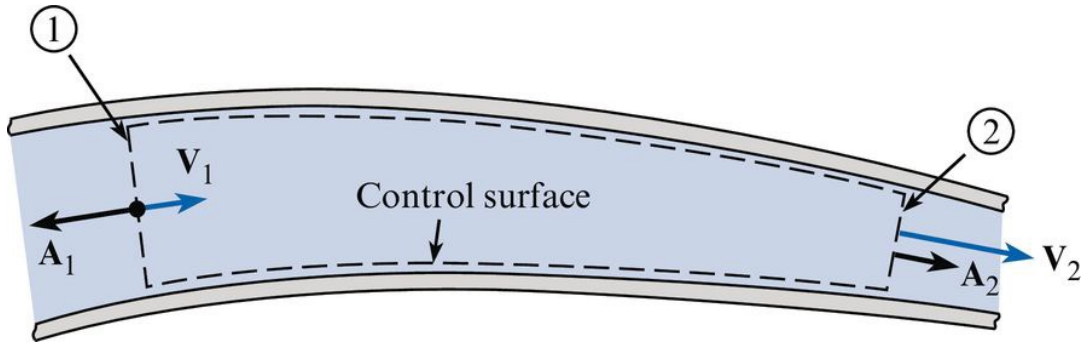
- Uttrykt med vektorer:

$$\text{Netto massestrøm ut} = \rho_2 V_2 A_2 - \rho_1 V_1 A_1$$
$$= \rho_2 \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{A}_2 + \rho_1 \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{A}_1$$
$$= \rho_2 \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n}_2 A_2 + \rho_1 \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{n}_1 A_1$$

- Retningen på transporten er nå bakt inn i prikkproduktet – positiv for transport ut og negativ for transport inn
- Kan skrives kompakt som

$$\text{Netto massestrøm ut} = \sum_{cs} \rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{A}$$

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{A} = |\mathbf{V}||\mathbf{A}|\cos\theta = VA\cos\theta$$
$$\cos 0^\circ = 1$$
$$\cos 180^\circ = -1$$



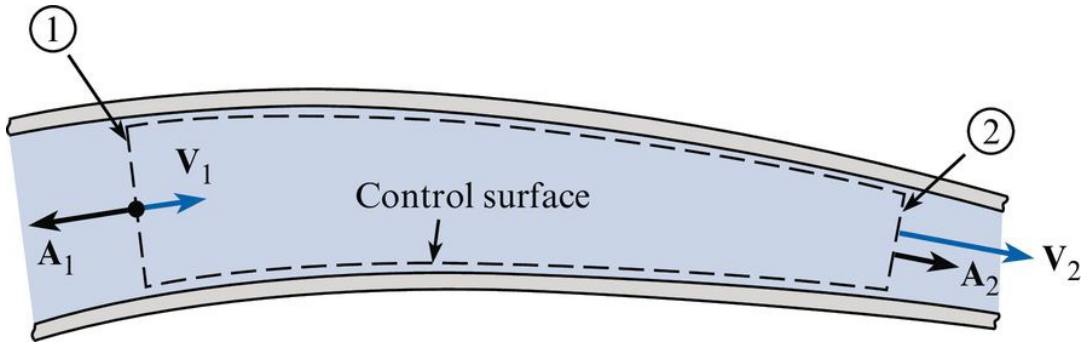
Transport av B gjennom kontrollflater

$$\text{Netto massestrøm ut} = \sum_{cs} \rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{A} = \sum_{cs} \dot{m}$$

- Vi har
$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB}{dm}\frac{dm}{dt}$$
- Med dot-notasjon:
$$\dot{B} = b\dot{m}$$

- Netto transport av B *ut* av kontrollvolumet:

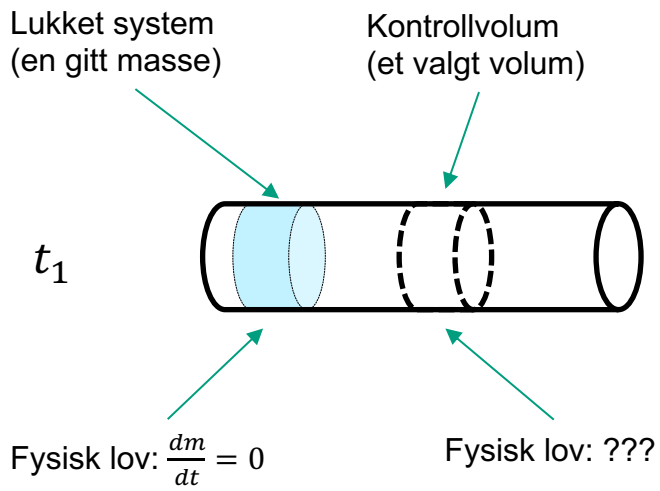
$$\dot{B}_{net} = \sum_{cs} b\dot{m} = \sum_{cs} b\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{A}$$

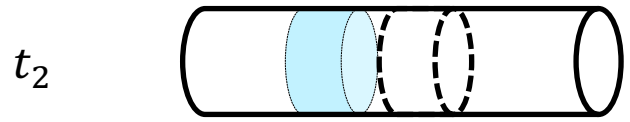


- Netto transport av B *ut* av kontrollvolumet ved variasjon i størrelsene over kontrollflaten:

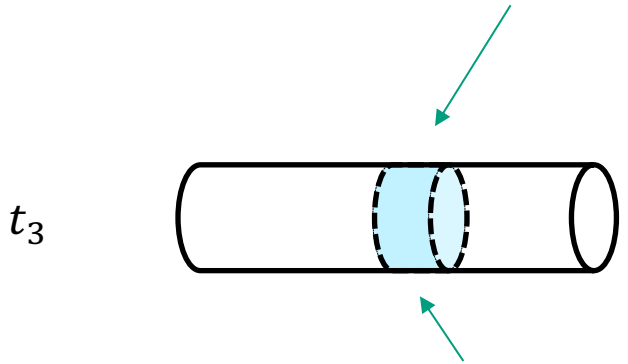
$$\dot{B}_{net} = \int_{cs} b\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$$

Reynolds transportteorem knytter sammen fysiske lover formulert for et lukket system og for et kontrollvolum





Reynolds transportteorem tar utgangspunkt i et tidspunkt der det lukkede systemet og kontrollvolumet sammenfaller

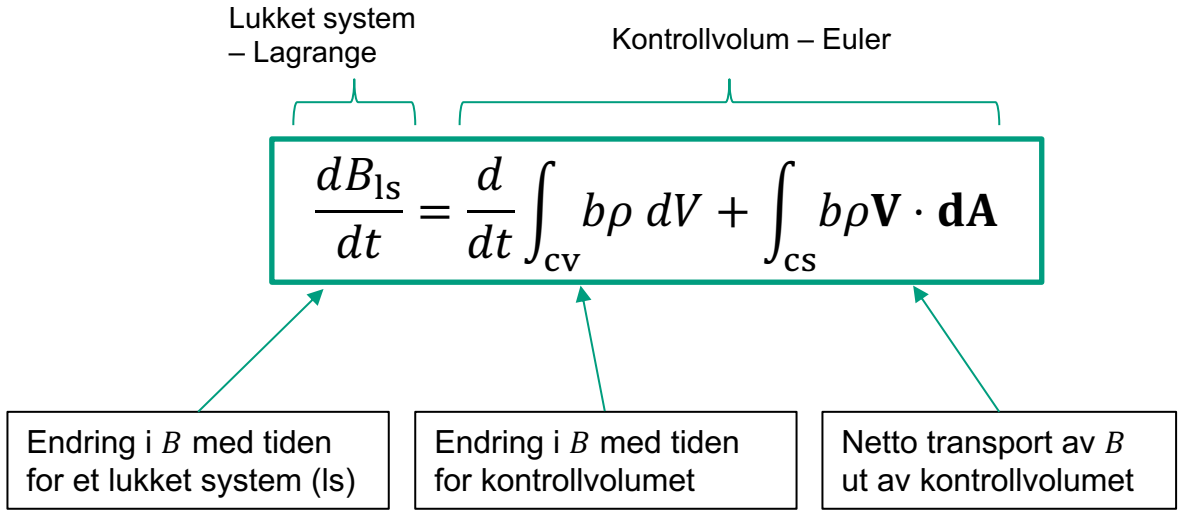


Fysisk lov fra RTT: Massestrøm ut – massestrøm inn = endring i masse i CV per tidsenhet



Hvordan formulere fysiske lover for et kontrollvolum?

- Svar: *Reynolds transportteorem*
- Det ser litt voldsomt ut, men ta det med ro – vi skal forenkle etter hvert:



- Et verktøy som gir oss alle likningene vi trenger nesten uten ekstra innsats når vi først har teoremet på plass

- Bevaring av masse → Kontinuitetslikningen
- Bevaring av bevegelsesmengde → Impulslikningen
- Bevaring av spinn → «Spinnlikningen»
- Bevaring av energi → Energilikningen («Bernoullis likning med tap»)

- La oss se på leddene som inngår i transportteoremet

Ekstensive og intensive egenskaper i et system

- Ekstensive egenskaper (generelt symbol B) er avhengig av mengde masse i systemet
  - Eks. masse, bevegelsesmengde, energi, tyngde
  - Det blir mer av den ekstensive egenskapen når massen til et system øker
- Intensive egenskaper (generelt symbol b) er uavhengig av mengde masse i systemet
  - Eks. trykk, temperatur, tetthet
- Sammenhengen mellom en ekstensiv egenskap B og en intensiv egenskap b

$$b = \frac{dB}{dm}$$

- Mengden av den ekstensive egenskapen B i et kontrollvolum:

$$B_{cv} = \int_{cv} b\, dm = \int_{cv} b\rho\, dV$$

- Reynolds transportteorem er formulert vha. B og b
  - Vi skal bruke det for masse, energi og bevegelsesmengde

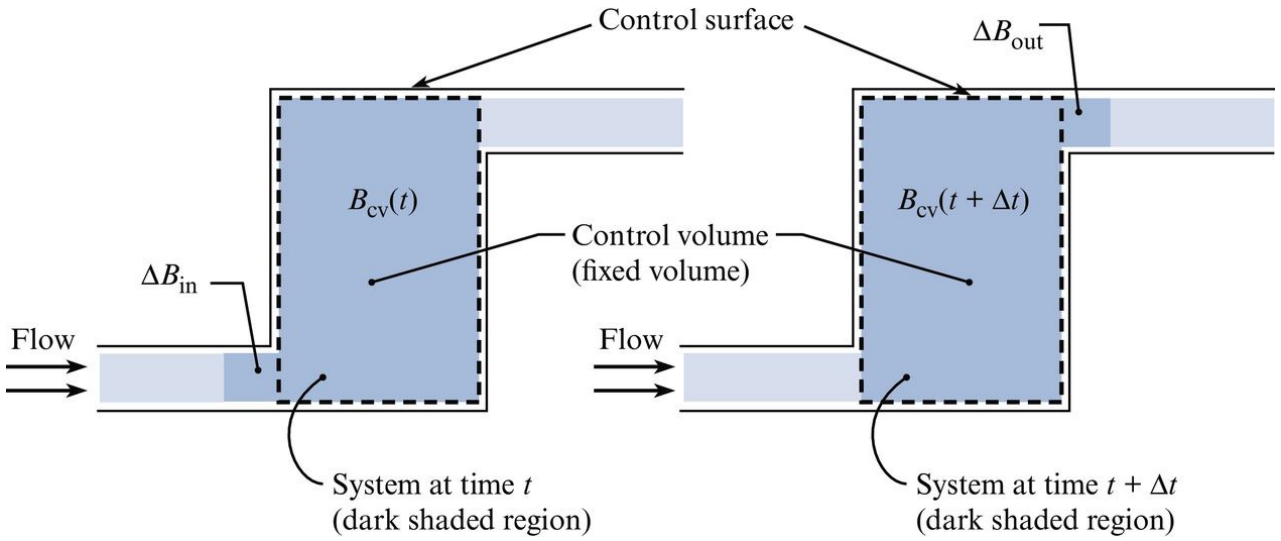
Reynolds transportteorem (RTT) – utledning

- Se figur: Et lukket system beveger seg gjennom et fast kontrollvolum
- Ved tiden t består det lukkede systemet av massen i kontrollvolumet og massen som er på vei inn:

$$B_{\mathrm{ls}}(t) = B_{\mathrm{cv}}(t) + \Delta B_{\mathrm{in}}$$

- Tilsvarende ved tiden $t + \Delta t$

$$B_{\mathrm{ls}}(t + \Delta t) = B_{\mathrm{cv}}(t + \Delta t) + \Delta B_{\mathrm{out}}$$



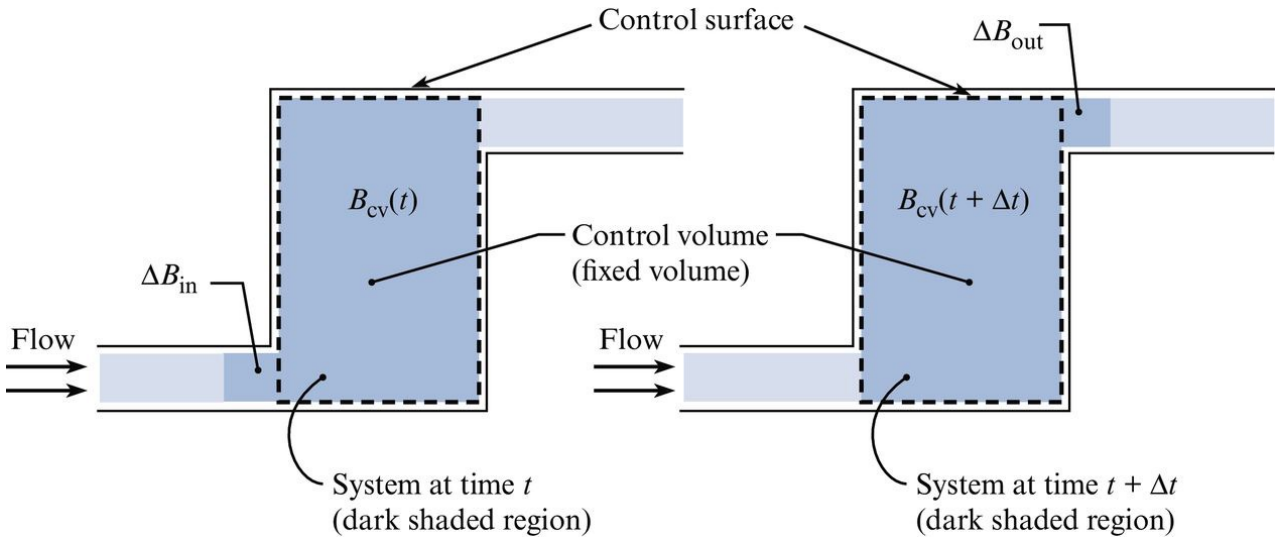
Reynolds transportteorem (RTT) – utledning

$$B_{\mathrm{ls}}(t) = B_{\mathrm{cv}}(t) + \Delta B_{\mathrm{in}}$$
$$B_{\mathrm{ls}}(t+\Delta t) = B_{\mathrm{cv}}(t+\Delta t) + \Delta B_{\mathrm{out}}$$

- Den tidsderiverte av B for det lukkede systemet blir

$$\frac{dB_{\mathrm{ls}}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{B_{\mathrm{ls}}(t+\Delta t) - B_{\mathrm{ls}}(t)}{\Delta t}\right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{B_{\mathrm{cv}}(t+\Delta t) - B_{\mathrm{cv}}(t) + \Delta B_{\mathrm{out}} - \Delta B_{\mathrm{in}}}{\Delta t}\right]$$



Reynolds transportteorem (RTT) – utledning

- Den tidsderiverte av B for det lukkede systemet blir

$$\frac{dB_{\text{ls}}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{B_{\text{cv}}(t+\Delta t) - B_{\text{cv}}(t) + \Delta B_{\text{out}} - \Delta B_{\text{in}}}{\Delta t}\right]$$

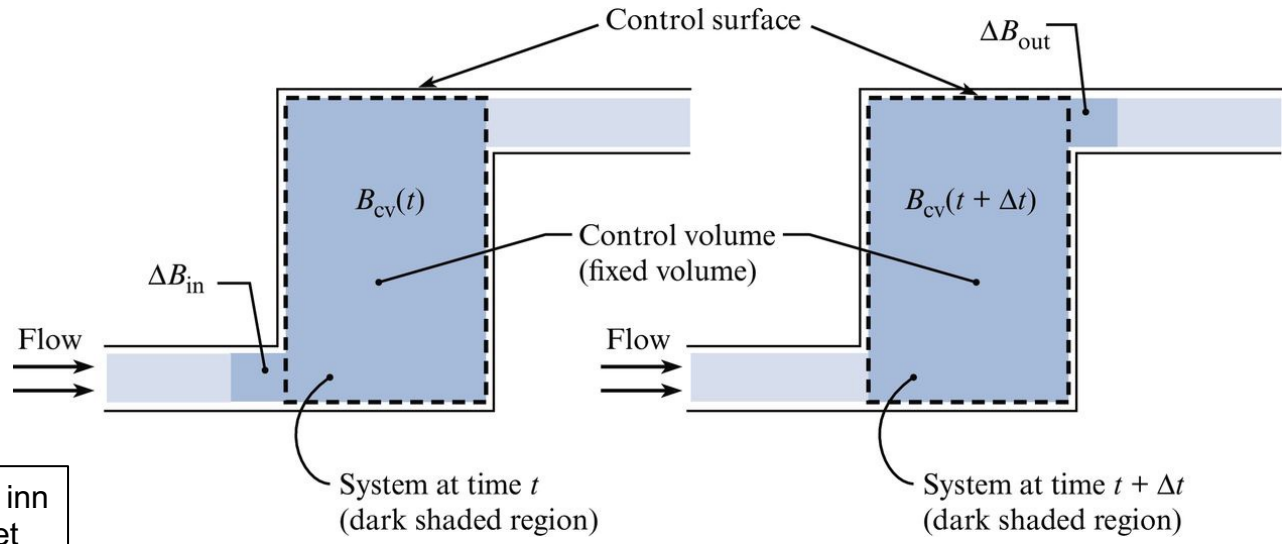
$$= \lim_{\Delta t \to 0}\frac{B_{\text{cv}}(t+\Delta t) - B_{\text{cv}}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta B_{\text{out}}}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta B_{\text{in}}}{\Delta t}$$

Endring av B i kontroll-volumet med tiden:
$\frac{dB_{\text{cv}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} b\rho\, dV$

Transport av B ut av kontrollvolumet

Transport av B inn i kontrollvolumet

Sum er lik netto transport av B ut av kontrollvolumet:
$\dot{B}_{\text{net}} = \int_{\text{cs}} b\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}$



Reynolds transportteorem (RTT)

- Vi får RTT:

Lukket system – Lagrange

Kontrollvolum – Euler

$$\frac{dB_{\text{ls}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} b\rho\, dV + \int_{\text{cs}} b\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA}$$

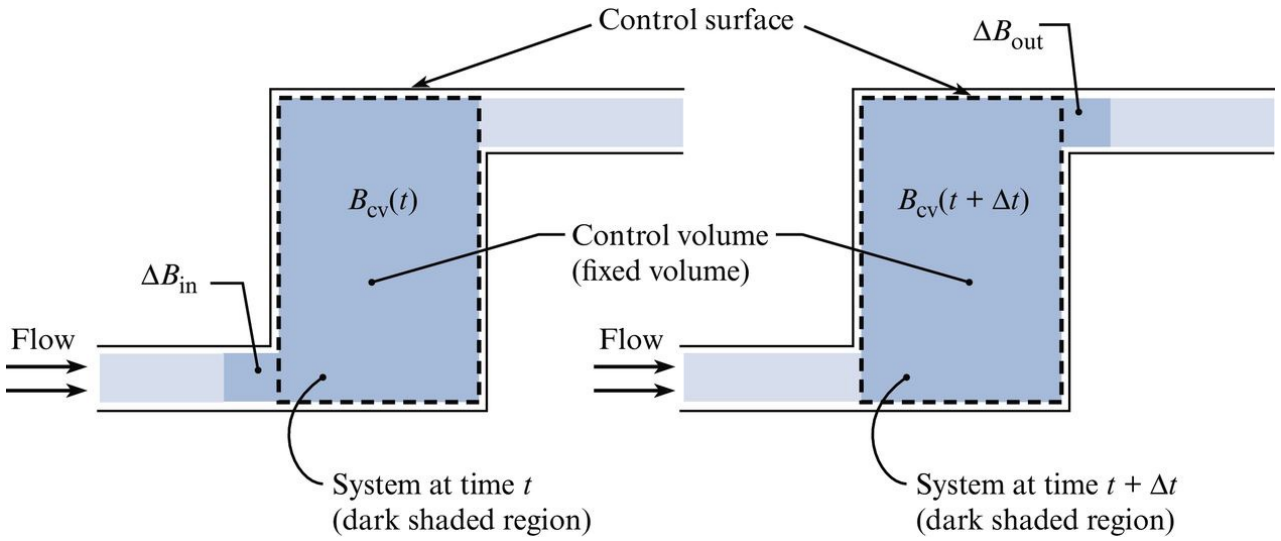
RTT gjelder også for et bevegelig kontrollvolum (ofte nyttig) når vi tolker $\mathbf{V}$ som den relative hastigheten mellom fluidet og kontrollflaten:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V_f} - \mathbf{V_{cs}}$$

Endring i B med tiden for et lukket system

Endring i B med tiden for kontrollvolumet

Netto transport av B ut av kontrollvolumet



- RTT beskriver situasjonen akkurat i det øyeblikket det lukkede systemet opptar kontrollvolumet
- Gir en link mellom Lagrangebeskrivelse og Eulerbeskrivelse

Reynolds transportteorem (RTT)

$$\frac{dB_{\text{ls}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} b\rho\, dV + \int_{\text{cs}} b\rho \mathbf{V}\cdot \mathbf{dA}$$

- Forenkling når vi har et bestemt antall innløps- og utløpstverrsnitt og b, ρ og $\mathbf{V}$ er konstante over hvert tverrsnitt:

$$\frac{dB_{\text{ls}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} b\rho\, dV + \sum_{\text{cs}} b\rho \mathbf{V}\cdot \mathbf{A}$$

- Uttrykt ved massefluks inn/ut (ρ og $\mathbf{V}$ kan her variere over tverrsnitt, ikke b):

$$\frac{dB_{\text{ls}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\text{cv}} b\rho\, dV + \sum_{\text{cs}} \dot{m}_o b_o - \sum_{\text{cs}} \dot{m}_i b_i$$

