8 – Kontinuitetslikningen og kavitasjon (kavitasjon er egenstudie)

TPS200 – Fluidmekanikk 1: Innføring

21-02-2021 – Endre Joachim Lerheim Mossige, Universitetslektor

Fra sist: Massestrøm/massefluks er volumstrøm ganger egenvekten til fluidet

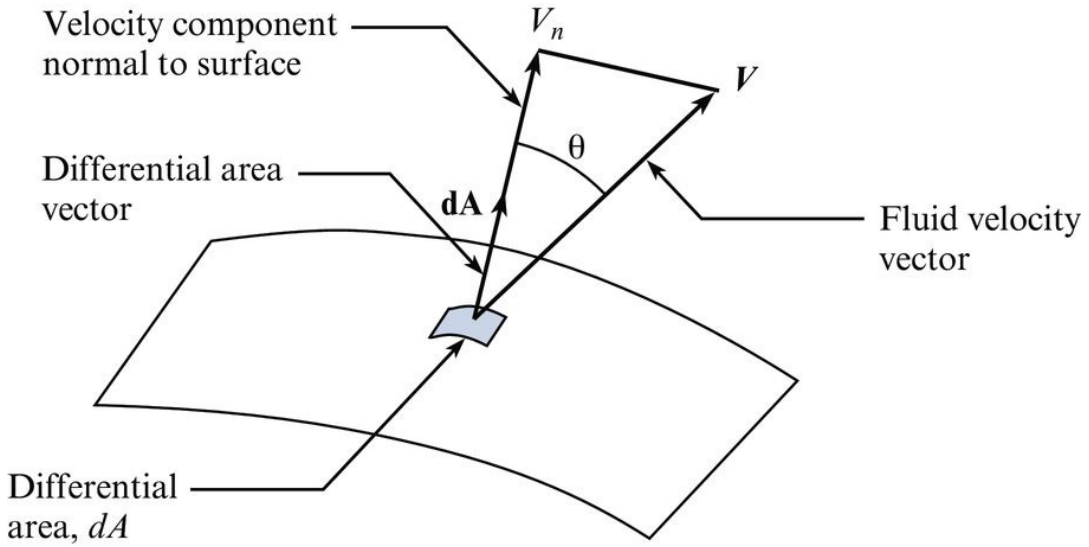
- Volumstrømmen Q

$$\dot{Q} = \int_A \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

- Massestrømmen

$$\dot{m} = \int_A \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

$$[\dot{m}] = MT^{-1}; \mathrm{kg/s}$$



$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} = V cos\theta$$

Fra sist: Massestrøm/massefluks er volumstrøm ganger egenvekten til fluidet

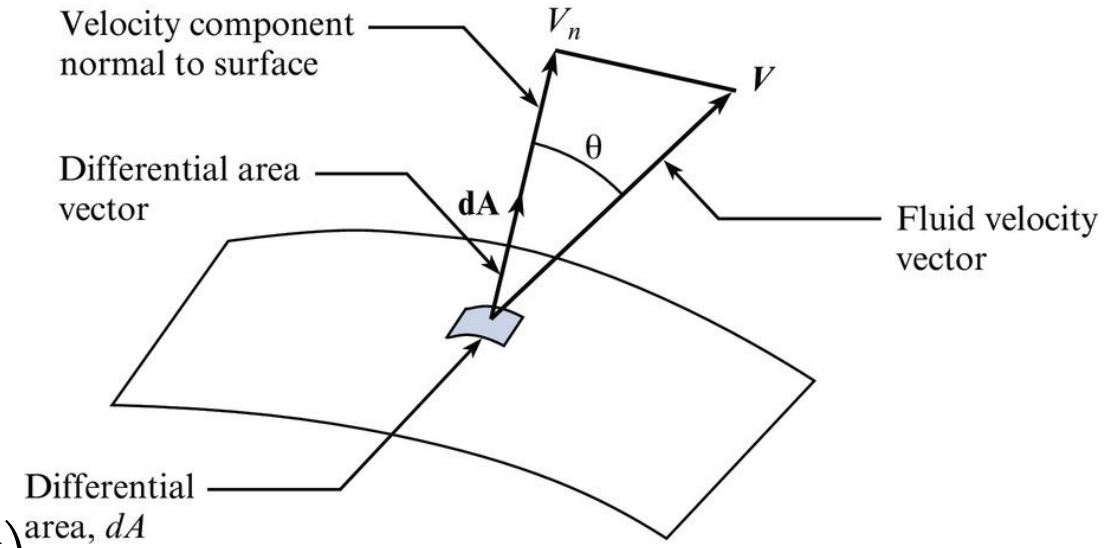
- Volumstrømmen Q

$$\dot{Q} = \int_A \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

- Massestrømmen

$$\dot{m} = \int_A \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

$$[\dot{m}] = MT^{-1}; \mathrm{kg/s}$$



- Definisjon for massestrøm $\dot{m}$:

$$\dot{m} = \left(\frac{\text{Masse } \Delta m \text{ som har passert et gitt tverrsnittsareal}}{\text{Tidsintervall } \Delta t} \right)_{\text{liten } \Delta t}$$

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} = V cos\theta$$

Fra sist: Massestrøm/massefluks er volumstrøm ganger egenvekten til fluidet

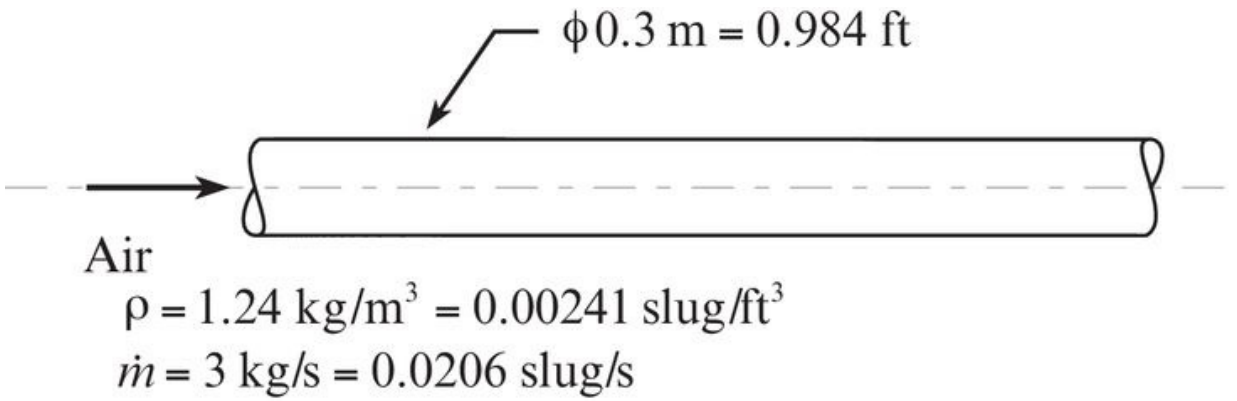
- Volumstrømmen Q

$$\dot{Q} = \int_A \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA$$

$$[\dot{m}] = MT^{-1}; \text{kg/s}$$

- Massestrømmen

$$\dot{m} = \int_A \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA$$



- Definisjon for massestrøm $\dot{m}$:

$$\dot{m} = \left(\frac{\text{Masse } \Delta m \text{ som har passert et gitt tverrsnittsareal}}{\text{Tidsintervall } \Delta t}\right)_{\text{liten } \Delta t}$$

$$\dot{m} = \rho Q \Longrightarrow Q = \frac{\dot{m}}{\rho}$$

- Hvis ρ, V er konstant over tverrsnitt A (eks rørstrøm):
- $\dot{m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho \Delta \forall}{\Delta t} = \rho Q = \rho A \bar{V}$

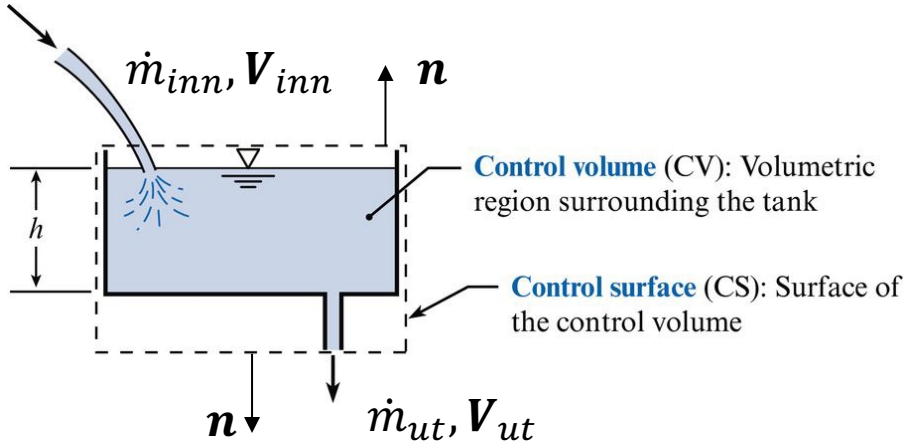
$$\bar{V} A = Q \Longrightarrow \bar{V} = \frac{Q}{A}$$

Fra sist: Vi beregnet massestrøm inn og ut av et kontrollvolum (f. eks. en tank)

- Massestrøm inn og ut av et kontrollvolum:

$$\int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = \dot{m}_{ut} - \dot{m}_{inn} = 0$$

Netto utstrømning av masse gjennom kontrollflatene per tidsenhet



Kontinuitetslikningen kan brukes for å finne væskenivået i tanken

Kontinuitetslikningen – bevaring av masse
Brukes for å finne massestrømmer, hastigheter, trykk og væskehøyder i åpne systemer (der vi har innløp og utløp)

- Den generelle kontinuitetslikningen på integralform

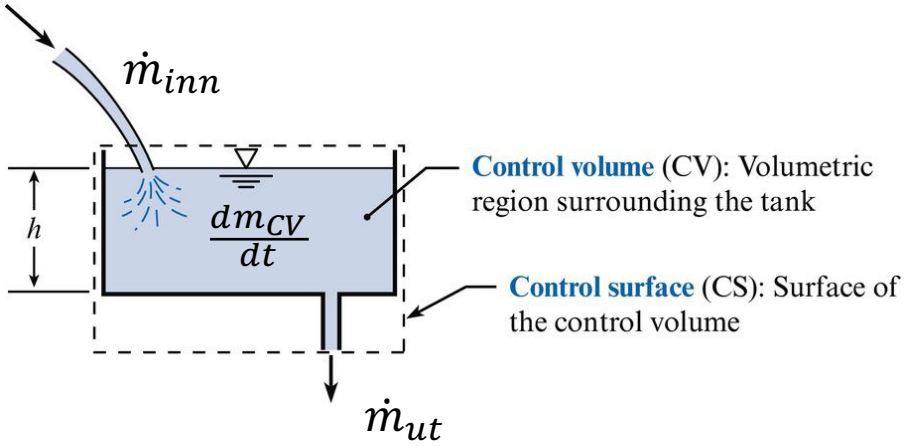
$$\frac{d}{dt}\int_{cv}\rho\, dV + \int_{cs}\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dA = 0$$

Likn. 5.28

$\dot{m}_{ut} - \dot{m}_{inn}$

Endring i massen inni kontrollvolumet med tiden

Netto utstrømning av masse gjennom kontrollflatene per tidsenhet



Kontinuitetslikningen kan brukes for å finne væskenivået i tanken

Bruk av kontinuitetslikningen: Fylling av en trykktank
Hva blir endringen av massen i CV per tid? Uttrykk ved ρ, A_1, V_1

- Kontinuitetslikningen på integralform

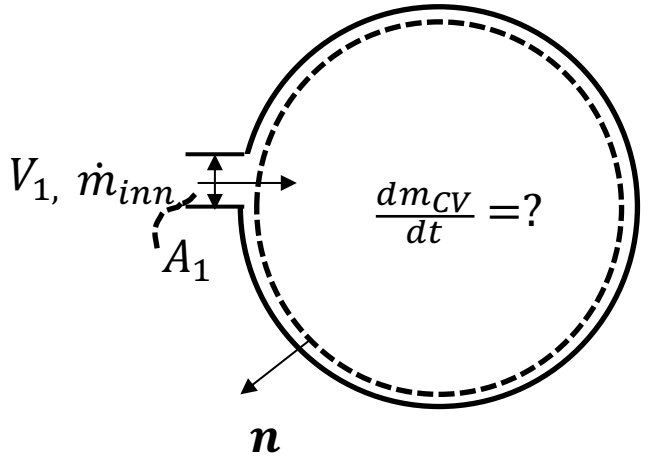
$$\frac{d}{dt}\int_{cv}\rho\, dV + \int_{cs}\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\mathrm{dA} = 0$$

Likn. 5.28

$\dot{m}_{ut} - \dot{m}_{inn}$

Endring i massen inni kontrollvolumet med tiden

Netto utstrømning av masse gjennom kontrollflatene per tidsenhet



$\dot{m}_{ut} = 0$

Bruk av kontinuitetslikningen: Fylling av en trykktank

Løsning: Endringen av massen i CV per tid er $\frac{dm_{CV}}{dt} = \rho A_1 V_1$

- Kontinuitetslikningen på integralform

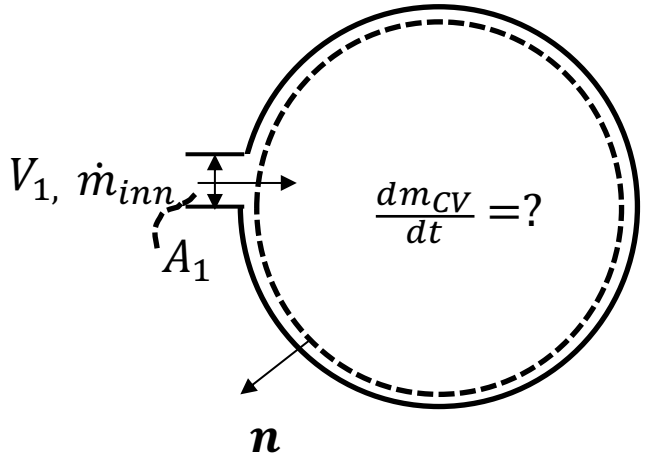
$$\frac{d}{dt}\int_{cv} \rho \, dV + \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

Likn. 5.28

Endring i massen inni kontrollvolumet med tiden

$\dot{m}_{ut} - \dot{m}_{inn}$

Netto utstrømning av masse gjennom kontrollflatene per tidsenhet



$\dot{m}_{ut} = 0$

$$0 = \frac{dm_{CV}}{dt} + \rho \boldsymbol{V_1} \cdot A_1 \boldsymbol{n} = \frac{dm_{CV}}{dt} + \rho V_1 A_1 \, (-1)$$

Bruk av kontinuitetslikningen: Fylling av en trykktank

Løsning: Endringen av massen i CV per tid er $\frac{dm_{CV}}{dt} = \rho A_1 V_1$

- Kontinuitetslikningen på integralform

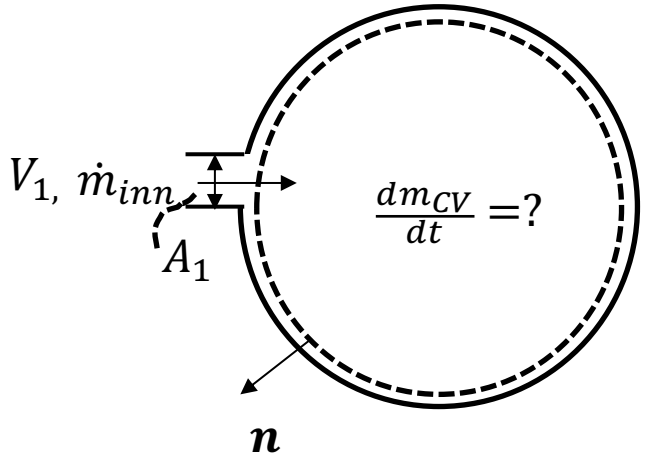
$$\frac{d}{dt}\int_{cv} \rho \, dV + \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

Likn. 5.28

Endring i massen inni kontrollvolumet med tiden

$\dot{m}_{ut} - \dot{m}_{inn}$

Netto utstrømning av masse gjennom kontrollflatene per tidsenhet



$\dot{m}_{ut} = 0$

$$0 = \frac{dm_{CV}}{dt} + \rho \boldsymbol{V_1} \cdot A_1 \boldsymbol{n} = \frac{dm_{CV}}{dt} + \rho V_1 A_1 \, (-1)$$

$$\Rightarrow \frac{dm_{CV}}{dt} = \rho V_1 A_1$$

Bruk av kontinuitetslikningen: Fylling av en trykktank m/ hull
Hva blir endringen av massen i CV per tid? Uttrykk ved ρ, A_1, V_1, A_2, V_2

- Kontinuitetslikningen på integralform

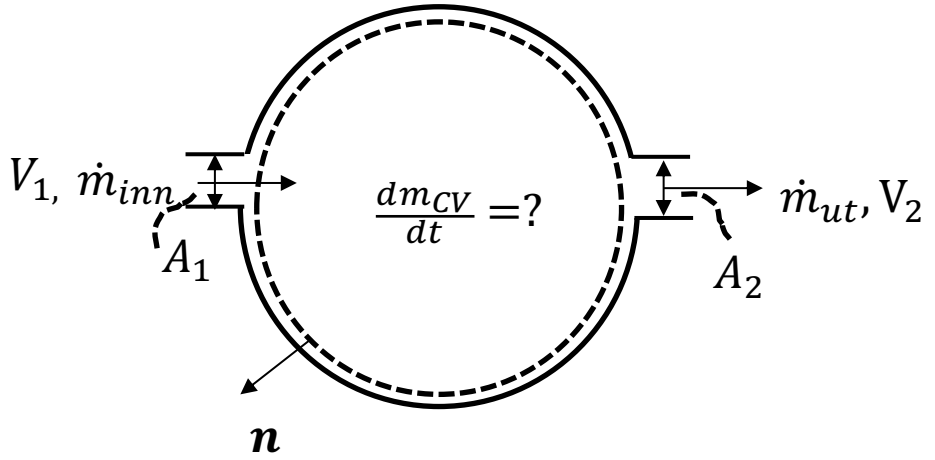
$$\frac{d}{dt}\int_{cv} \rho \, dV + \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

Likn. 5.28

$\dot{m}_{ut} - \dot{m}_{inn}$

Endring i massen inni kontrollvolumet med tiden

Netto utstrømning av masse gjennom kontrollflatene per tidsenhet



Bruk av kontinuitetslikningen: Fylling av en trykktank m/ hull
Hva blir endringen av massen i CV per tid? Uttrykk ved ρ, A_1, V_1, A_2, V_2

- Kontinuitetslikningen på integralform

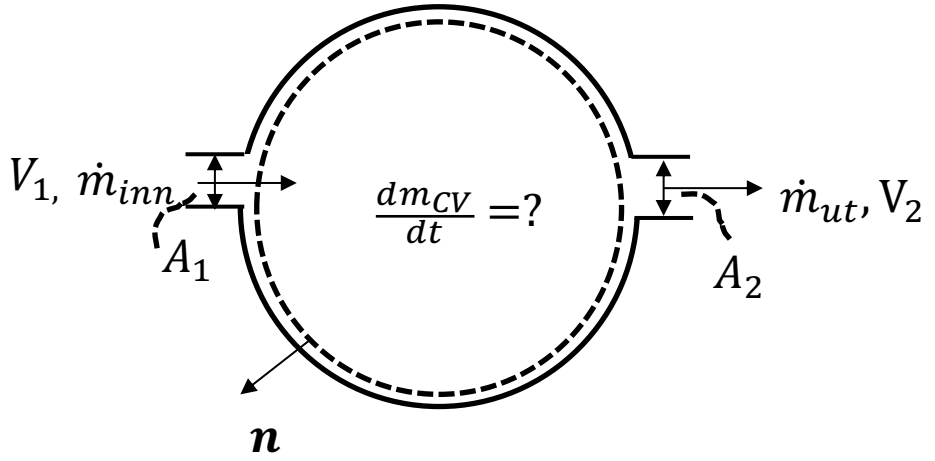
$$\frac{d}{dt}\int_{cv}\rho\, dV + \int_{cs}\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dA = 0$$

Likn. 5.28

Endring i massen inni kontrollvolumet med tiden

$\dot{m}_{ut} - \dot{m}_{inn}$

Netto utstrømning av masse gjennom kontrollflatene per tidsenhet



$$0 = \frac{dm_{CV}}{dt} + \rho\boldsymbol{V_1}\cdot A_1\boldsymbol{n} + \rho\boldsymbol{V_2}\cdot A_2\boldsymbol{n} = \frac{dm_{CV}}{dt} + \rho V_1 A_1\,(-1) + \rho V_2 A_2\,(+1)$$

I innløpet (1) peker normalvektoren i motsatt retning av hastighetesvektoren,
dermed blir prikkproduktet negativt.

Bruk av kontinuitetslikningen: Fylling av en trykktank m/ hull
Hva blir endringen av massen i CV per tid? Uttrykk ved ρ, A_1, V_1, A_2, V_2

- Kontinuitetslikningen på integralform

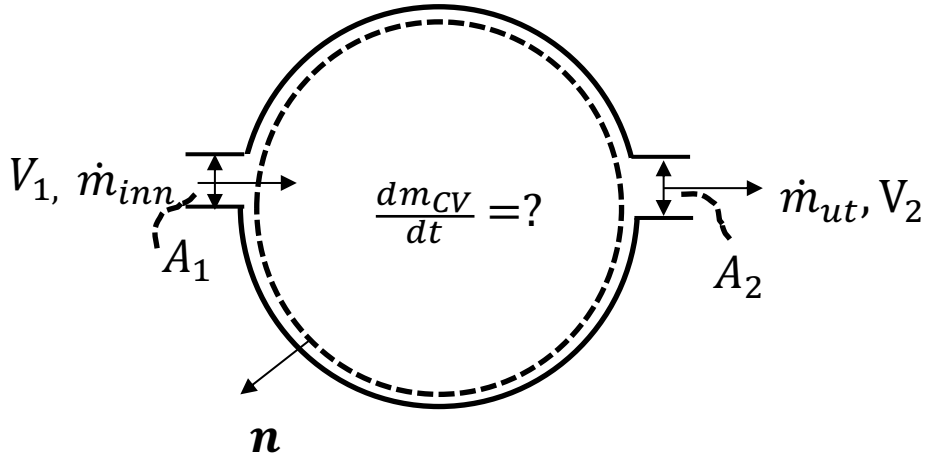
$$\frac{d}{dt}\int_{cv}\rho\, dV + \int_{cs}\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dA = 0$$

Likn. 5.28

Endring i massen inni kontrollvolumet med tiden

$\dot{m}_{ut} - \dot{m}_{inn}$

Netto utstrømning av masse gjennom kontrollflatene per tidsenhet



$$0 = \frac{dm_{CV}}{dt} + \rho\boldsymbol{V_1}\cdot A_1\boldsymbol{n} + \rho\boldsymbol{V_2}\cdot A_2\boldsymbol{n} = \frac{dm_{CV}}{dt} + \rho V_1A_1\,(-1) + \rho V_2A_2\,(+1)$$

$$\Rightarrow \frac{dm_{CV}}{dt} = \rho V_1A_1 - \rho V_2A_2$$

Bruk av kontinuitetslikningen: Stasjonær massestrøm gjennom et rør
Hva blir massestrøm i pkt. 2 uttrykt ved massestrøm i pkt. 1?

- Kontinuitetslikningen på integralform

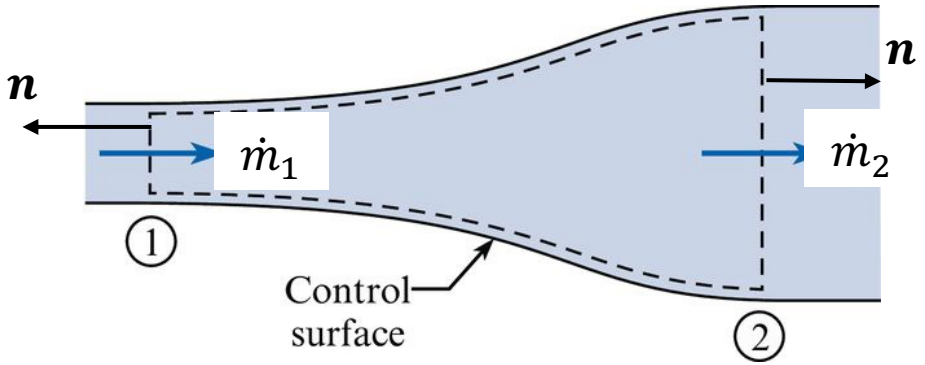
$$\frac{d}{dt}\int_{cv}\rho\, dV + \int_{cs}\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}dA = 0$$

Likn. 5.28

$\dot{m}_{ut} - \dot{m}_{inn}$

Endring i massen inni kontrollvolumet med tiden

Netto utstrømning av masse gjennom kontrollflatene per tidsenhet

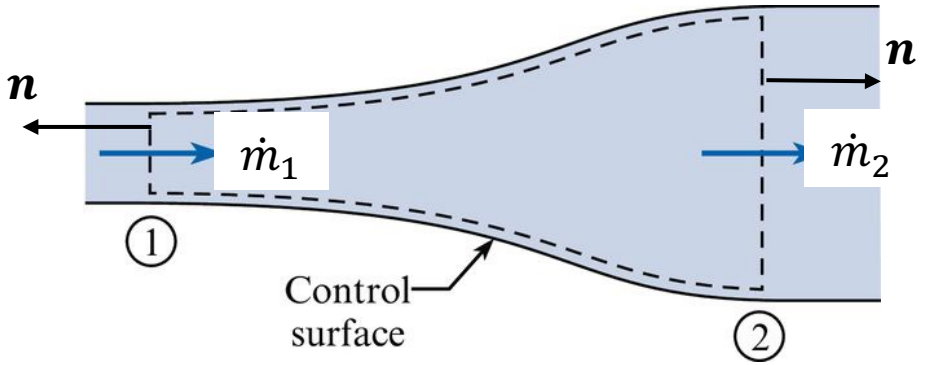


Kontinuitetslikningen for strømning gjennom et rør

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{cv}} \rho \, dV + \int_{\mathrm{cs}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}A\boldsymbol{n} = 0$$

- Anta stasjonær strømning (ingen akkumulering av masse inni røret):

$$\int_{\mathrm{cs}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}A\boldsymbol{n} = 0$$

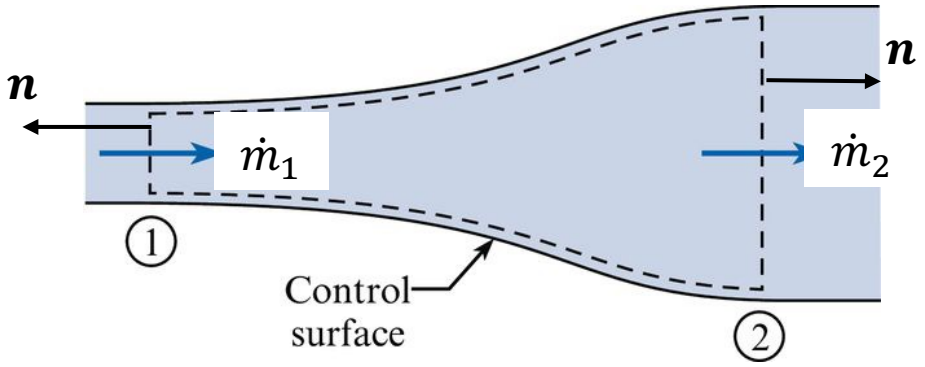


Kontinuitetslikningen for strømning gjennom et rør

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{cv}} \rho \, dV + \int_{\mathrm{cs}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}A\boldsymbol{n} = 0$$

- Anta stasjonær strømning (ingen akkumulering av masse inni røret):

$$\int_{\mathrm{cs}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}A\boldsymbol{n} = 0$$



- Det er inn- og utstrømning i to tverrsnitt der hastigheten er normal på arealet:

$$\int_{\mathrm{cs}_2} \rho V \, dA \cdot (+1) + \int_{\mathrm{cs}_1} \rho V \, dA \cdot (-1) = 0$$

I innløpet (1) peker normalvektoren i motsatt retning av hastighetesvektoren,
dermed blir prikkproduktet negativt.

Kontinuitetslikningen for strømning gjennom et rør

$$\frac{d}{dt}\int_{cv}\rho\, dV + \int_{cs}\rho\mathbf{V}\cdot \mathrm{d}A\boldsymbol{n} = 0$$

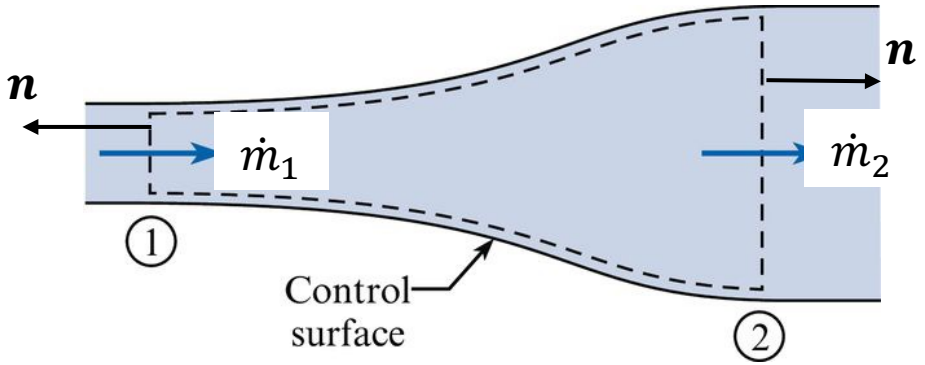
- Anta stasjonær strømning (ingen akkumulering av masse inni røret):

$$\int_{cs}\rho\mathbf{V}\cdot \mathrm{d}A\boldsymbol{n} = 0$$

- Det er inn- og utstrømning i to tverrsnitt der hastigheten er normal på arealet:

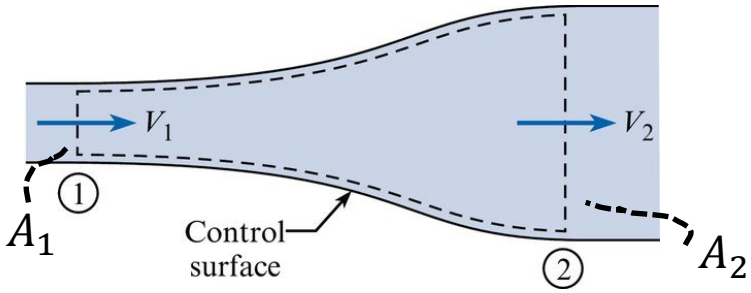
$$\int_{cs_2}\rho V\, dA\cdot(+1) + \int_{cs_1}\rho V\, dA\cdot(-1) = 0$$

$$\dot{m}_2 - \dot{m}_1 = 0 \Longrightarrow \dot{m}_1 = \dot{m}_2$$



Tettheten er konstant fra 1 til 2.
Hva blir V_2 uttrykt ved A_1, A_2, og V_1?

$$\frac{d}{dt}\int_{cv}\rho\, dV + \int_{cs}\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA} = 0$$

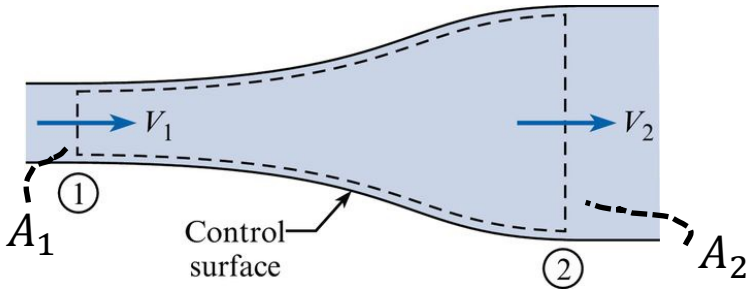


- Vi har akkurat funnet at:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

Tettheten er konstant fra 1 til 2.
Hva blir V_2 uttrykt ved A_1, A_2, og V_1?

$$\frac{d}{dt}\int_{cv}\rho\, dV + \int_{cs}\rho\mathbf{V}\cdot\mathbf{dA} = 0$$



- Vi har akkurat funnet at:

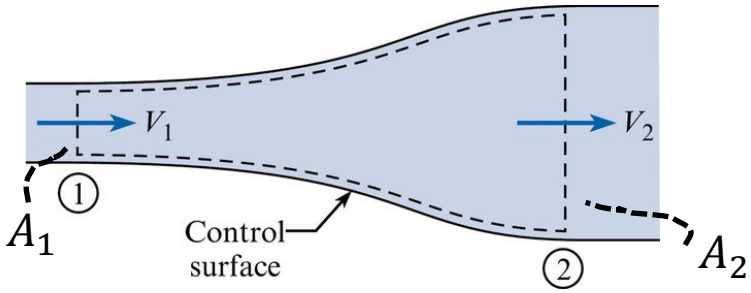
$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

- Av dette følger at:

$$\boxed{\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2}$$

Tettheten er konstant fra 1 til 2.
Hva blir V_2 uttrykt ved A_1, A_2, og V_1?

$$\frac{d}{dt}\int_{cv}\rho\, dV + \int_{cs}\rho \mathbf{V}\cdot\mathbf{dA} = 0$$



- Vi har akkurat funnet at:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

- Av dette følger at:

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

- Siden $\rho_1 = \rho_2$ får vi:

$$\boxed{V_2 = A_1/A_2 V_1}$$

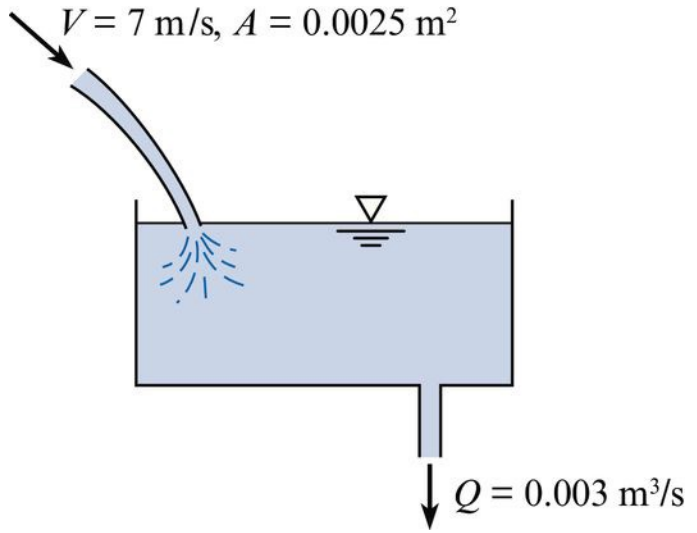
Agenda

- Kontinuitetslikningen: Introduksjon
- Eksempler – stasjonær rørstrømning
- Eksempler – ikke-stasjonær strømning
- Kavitasjon



Individuell: EFM Eksempel 5.4

- Vann strømmer inn og ut av en tank
- Hvor raskt akkumuleres vann i tanken?
- Uttrykk volumendringen som funksjon av V, A og Q (ikke sett inn tall)



Løsning: EFM Eksempel 5.4

- Hvor raskt akkumuleres vann i tanken?

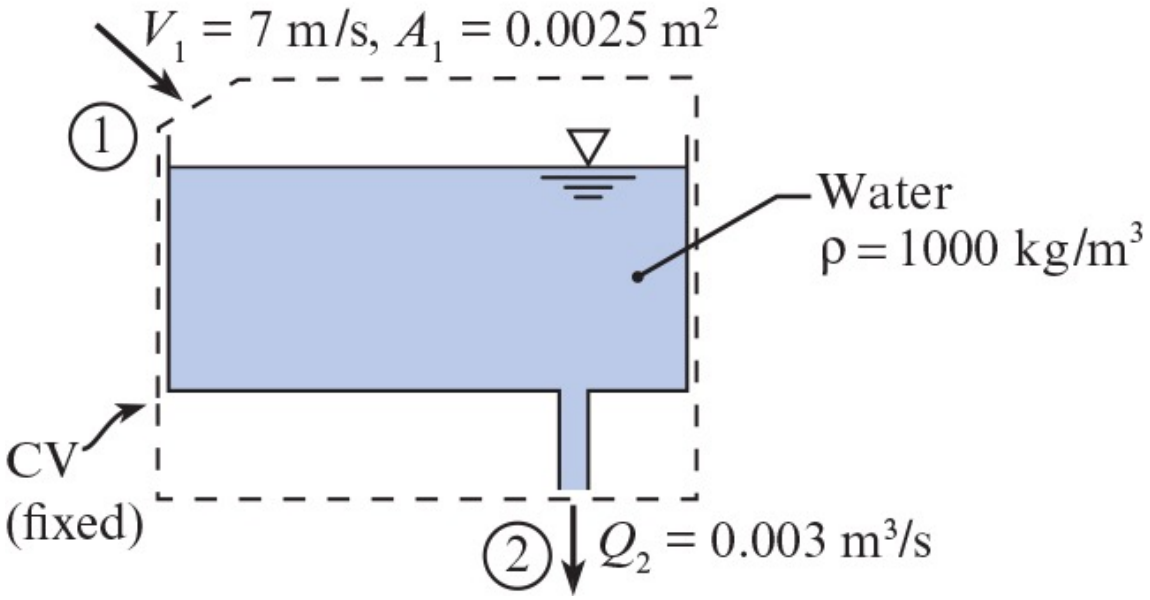
$$\frac{dm}{dt} + \sum_{cs} \dot{m}_{ut} - \sum_{cs} \dot{m}_{inn} = 0$$

$$\frac{dm}{dt} = \sum_{cs} \dot{m}_{inn} - \sum_{cs} \dot{m}_{ut} = \rho A_1 V_1 - \rho Q_2$$

- Vann er inkompressibelt – vi kan skrive:

$$\frac{d\forall}{dt} + \sum_{cs} Q_{ut} - \sum_{cs} Q_{inn} = 0$$

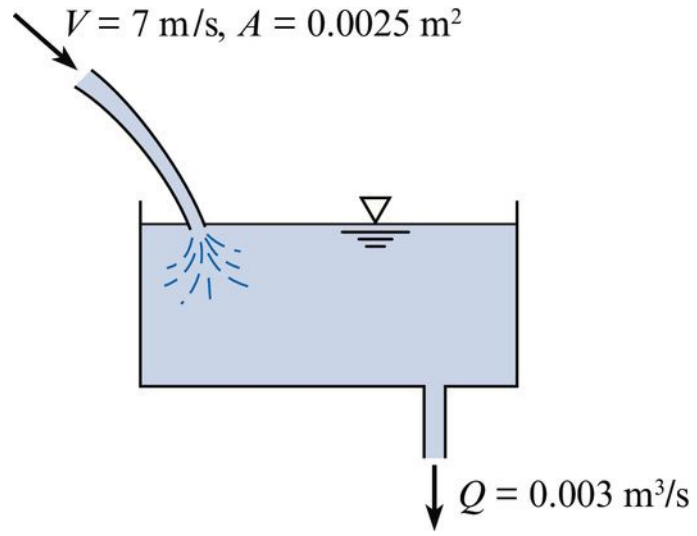
$$\frac{d\forall}{dt} = \sum_{cs} Q_{inn} - \sum_{cs} Q_{ut} = A_1 V_1 - Q_2$$



Individuell: Volumendring per tid , dV/dt, er AV – Q. Hvor mye stiger vannet per tid, altså hva er dh/dt?

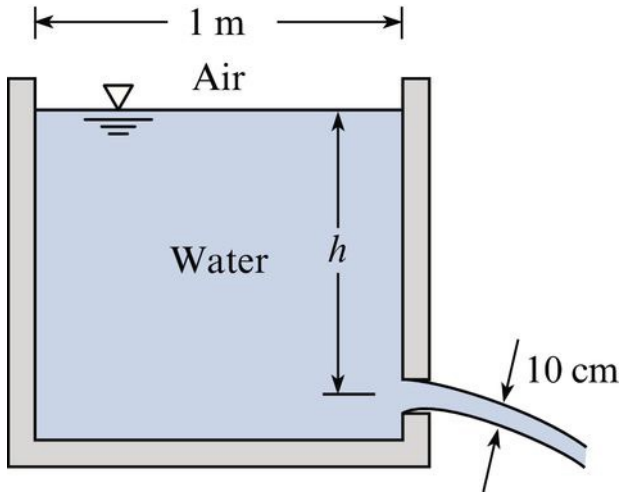
- Akkumulering av vann i tanken:

$$\frac{d\cancel{V}}{dt} = \sum_{\text{cs}} Q_{\text{inn}} - \sum_{\text{cs}} Q_{\text{ut}} = A_1 V_1 - Q_2$$



Individuell: Hva er hastigheten ut av tanken uttrykt ved høyden h og gravitasjonskonstanten g (ikke sett inn tall)?

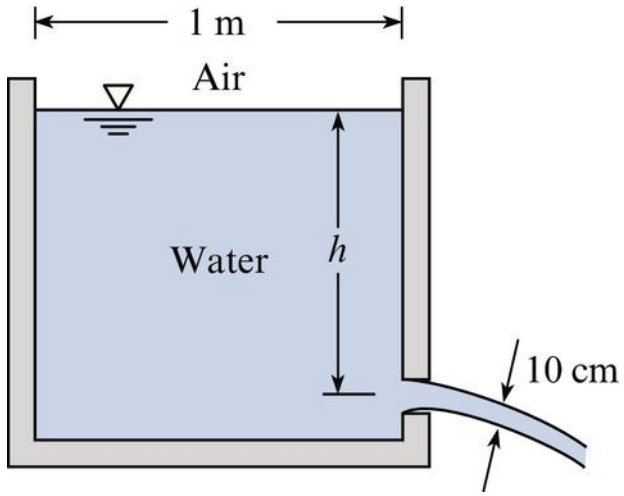
- En sylindrisk tank tømmes for vann



Individuell: Hva er hastigheten ut av tanken uttrykt ved høyden h og gravitasjonskonstanten g (ikke sett inn tall)?

- En sylindrisk tank tømmes for vann
- Torricellis lov gjelder (fra Bernoulli):

$$V = \sqrt{2gh}$$

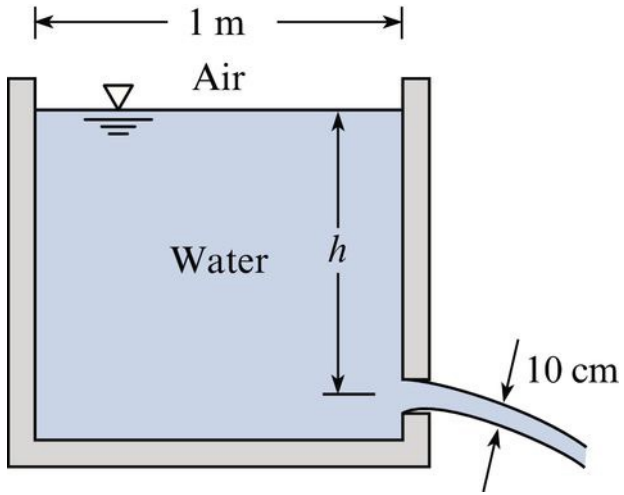


Individuell: Hva er hastigheten ut av tanken uttrykt ved høyden h og gravitasjonskonstanten g (ikke sett inn tall)?

- En sylindrisk tank tømmes for vann
- Torricellis lov gjelder (fra Bernoulli):

$$V_1 = \sqrt{2gh}$$

- Hvor lang tid tar det for vannivået h å synke fra 2 m til 0.5 m?

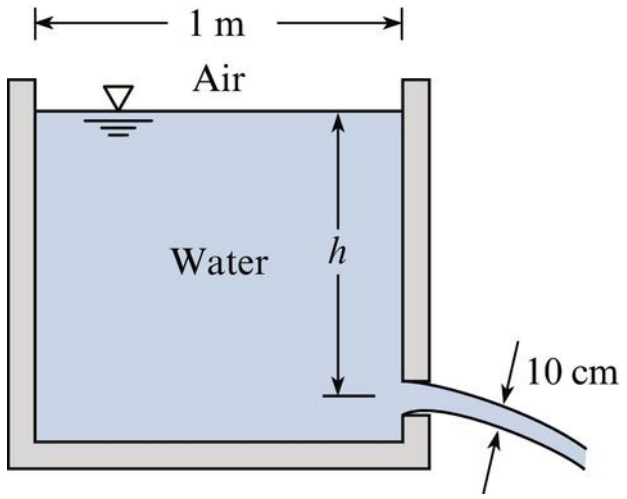


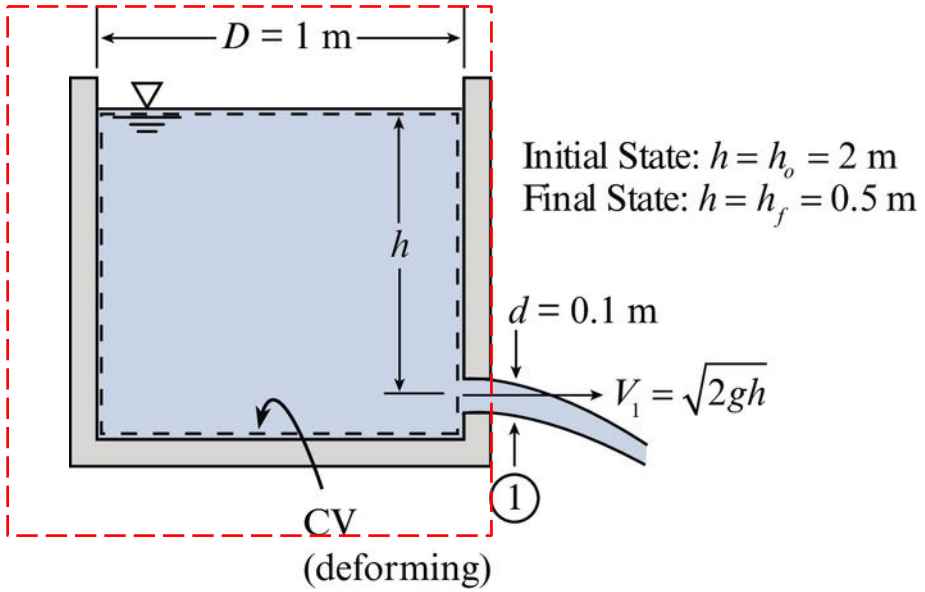
EFM Eksempel 5.6

- Hvor lang tid tar det for vannivået h å synke fra 2 m til 0.5 m?
- Lærebok: Kontrollvolum som deformeres slik at det kun inneholder vann til enhver tid
- Her: Fast kontrollvolum og vi bruker kontinuitetslikningen på følgende form

$$\frac{d\cancel{V}_{\text{cv}}}{dt} + \sum_{\text{cs}} Q_{\text{ut}} - \sum_{\text{cs}} Q_{\text{inn}} = 0$$

  - Her angir $\cancel{V}_{\text{cv}}$ innholdet av vann i CV til enhver tid





EFM Eksempel 5.6

- Hvor lang tid tar det for vannivået h å synke fra 2 m til 0.5 m?
- Kontinuitetslikningen

$$\frac{d\cancel{V}_{cv}}{dt} + \sum_{cs} Q_{ut} - \sum_{cs} Q_{inn} = 0$$

Egentlig litt mer under utløpet, men det får ikke noe å si når vi deriverer

$$\cancel{V}_{cv} = Ah = \frac{\pi D^2}{4} h$$

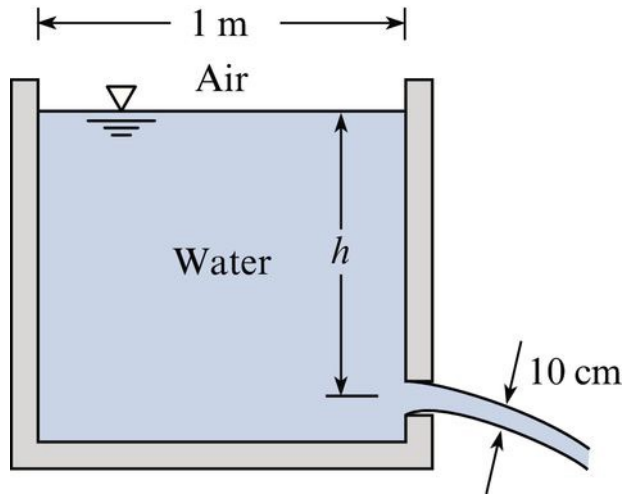
$$Q_{inn} = 0$$

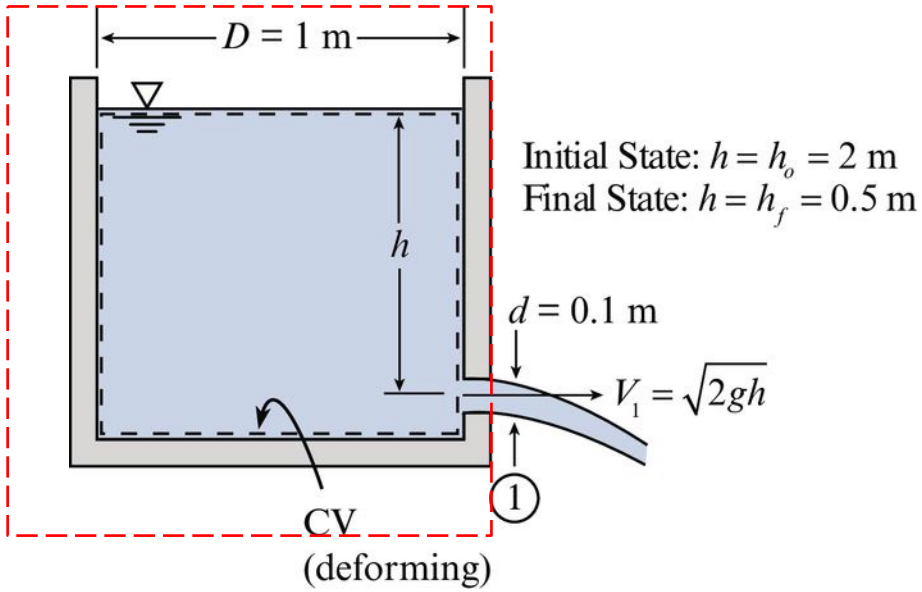
$$Q_{ut} = A_1 V_1 = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh}$$

- Vi får

$$\frac{\pi D^2}{4}\frac{dh}{dt} + \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh} - 0 = 0$$

$$\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh}$$





EFM Eksempel 5.6

- Hvor lang tid tar det for vannivået h å synke fra 2 m til 0.5 m?
- Vi har

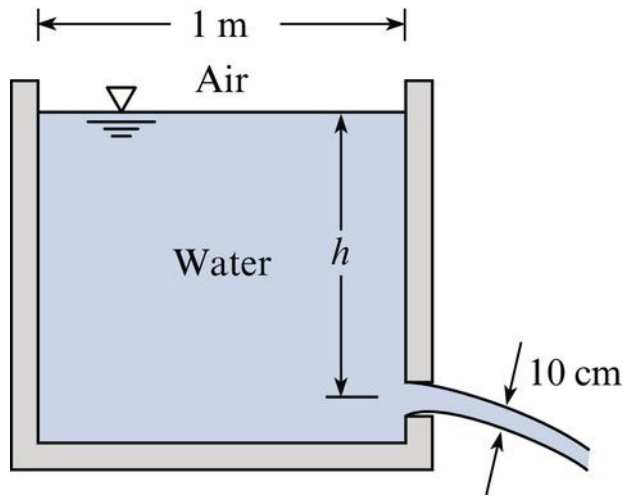
$$\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh}$$

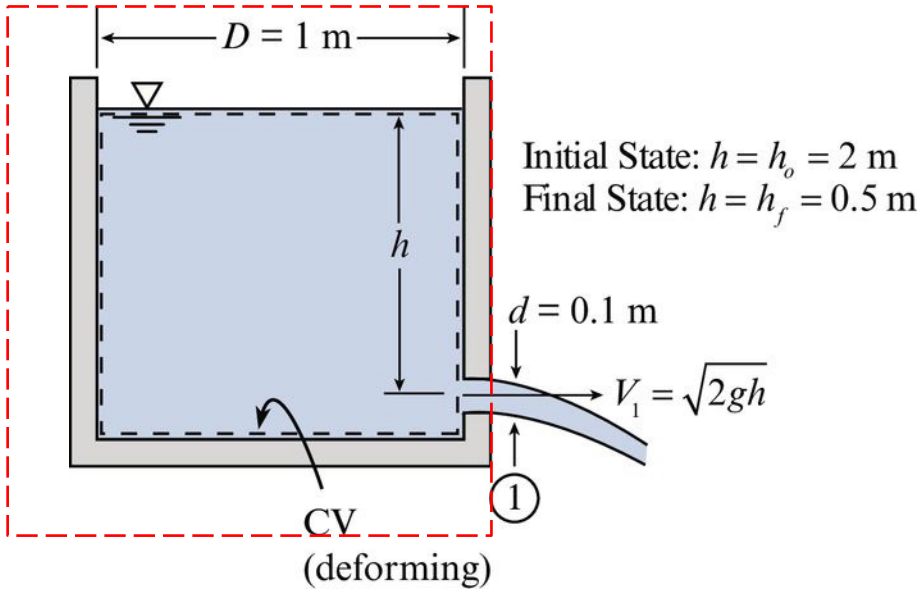
$$h^{-\frac{1}{2}}\, dh = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}\, dt$$

- Integrerer

$$\int h^{-\frac{1}{2}}\, dh = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g} \int dt$$

$$2h^{\frac{1}{2}} + C = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}\, t$$





EFM Eksempel 5.6

- Hvor lang tid tar det for vannivået h å synke fra 2 m til 0.5 m?
- Vi har

$$2h^{\frac{1}{2}} + C = -\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}\, t$$

- Bruker at $h = h_0 = 2$ m ved $t = 0$

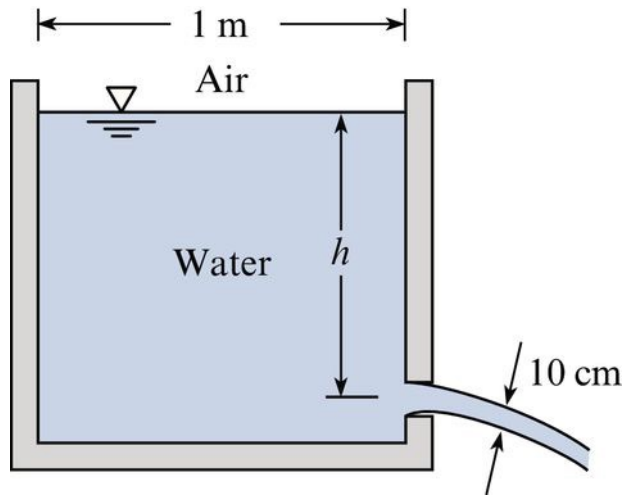
$$\Rightarrow C = -2\sqrt{2}$$

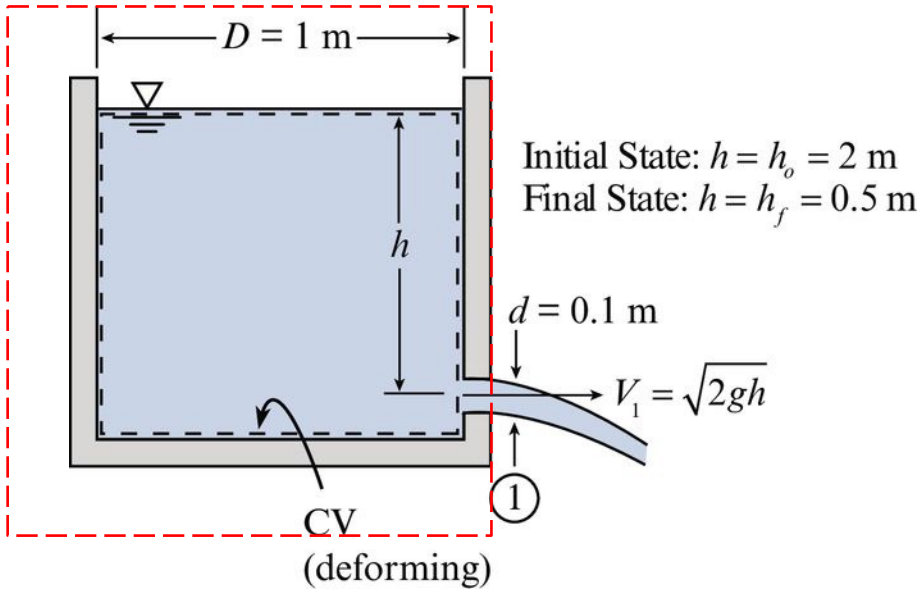
- Vi får

$$t = -\left(\frac{D}{d}\right)^2 \frac{2\left(\sqrt{h} - \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2g}} = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \frac{2\left(\sqrt{2} - \sqrt{h}\right)}{\sqrt{2g}}$$

- Setter inn tall med $h = h_f = 0.5$ m

$$t = \left(\frac{1}{0.1}\right)^2 \frac{2\left(\sqrt{2} - \sqrt{0.5}\right)}{\sqrt{19.61}}\ \text{s} = 31.9\ \text{s}$$





Agenda

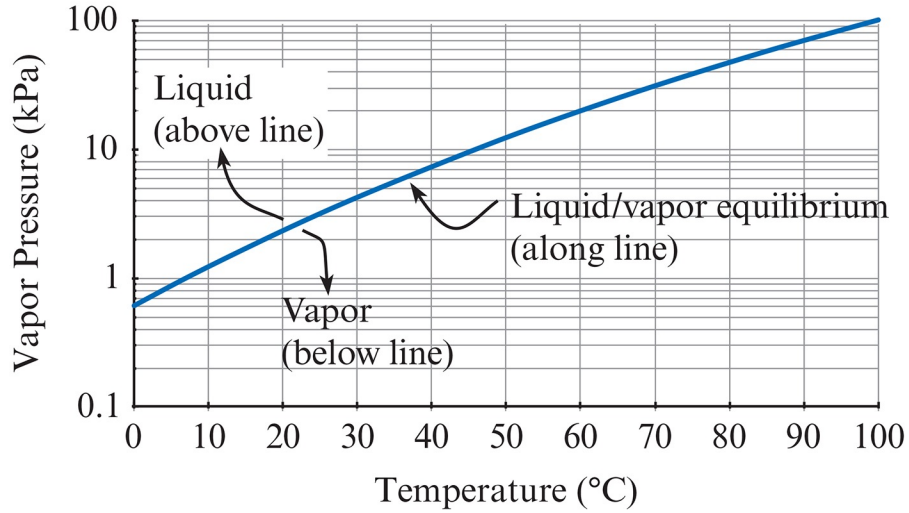
- Kontinuitetslikningen: Introduksjon
- Eksempler – stasjonær rørstrømning
- Eksempler – ikke-stasjonær strømning
- Kavitasjon (egenstudie) som vi dekket tidligere i kurset og som dere har lært om i laben



Kavitasjon

- Kavitasjon: Dannelse av dampblærer inne i en væskestrømning fordi væsketrykket (absolutt) synker til damptrykket (metningstrykket) for væsken, dvs. væsken koker
- Når dampblærene kollapser mot faste flater oppstår en kraft som kan erodere materialer over tid
  - Støy, vibrasjoner, lavere virkningsgrad i hydrauliske maskiner
- Dette vil dere se i labøvelse 2





Målt et *trykk* opptil 800 MPa (8000 ganger atmosfæretrykket, ca. 800 meter vannsøyle)

Kavitasjon

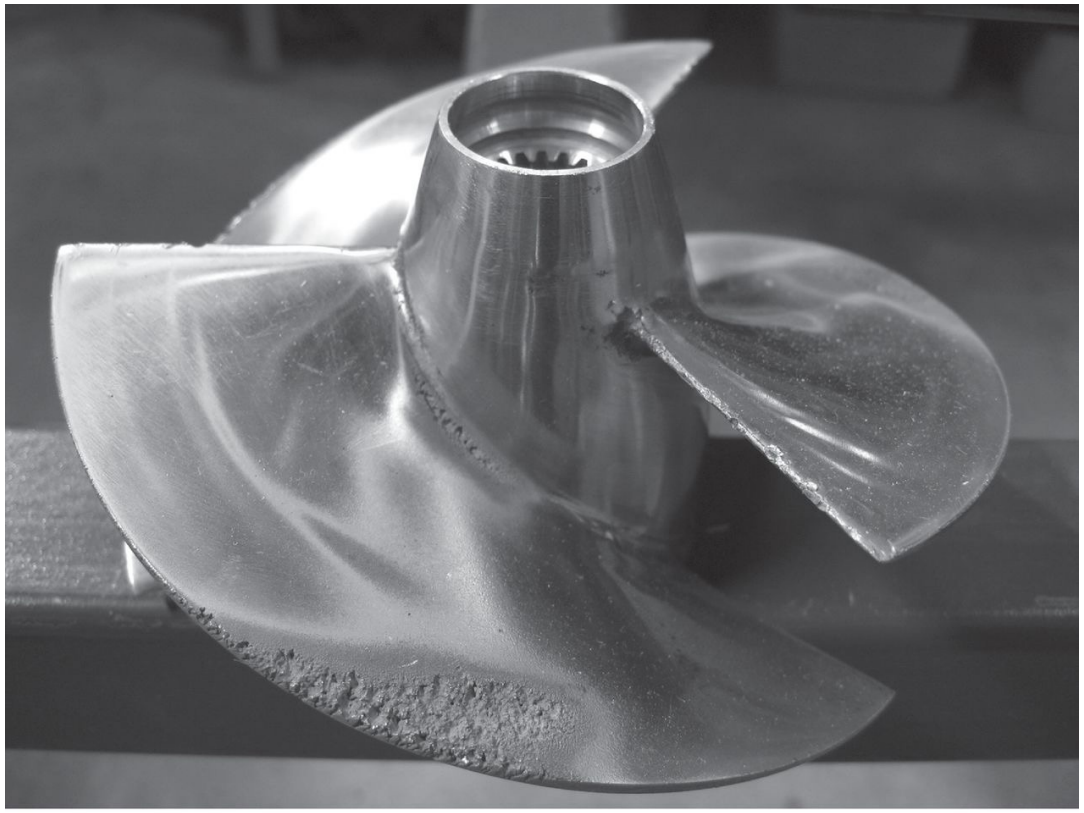


Photo by Erik Axdahl.

Tunnel (flomløp) fra dam i USA



U.S. Bureau of Reclamation

Hvordan forutsi kavitasjon?

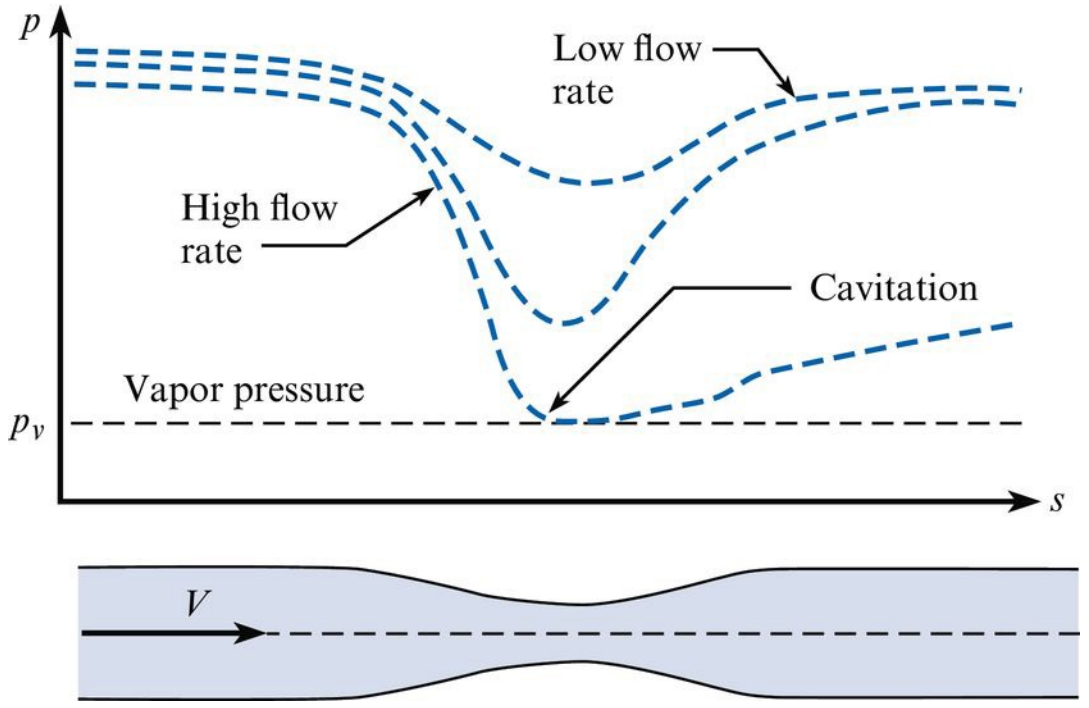
- Risikoområder med lavt trykk:
  - Områder med høy hastighet
  - Høytliggende punkt i rørtrasé
  - Sugesiden på pumper (TPS210)
- Pga. kontinuitetslikningen må hastigheten øke i enn innsnevring

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

- Pga. Bernoullis likning må det tilhørende trykket synke

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Her har vi sløyfet z-leddene



Kavitasjon

- Tid mellom dannelse og kollaps av dampblærer er som regel veldig kort
- Når kavitasjon først har oppstått: Enda høyere volumstrøm og hastighet gir ikke lavere trykk enn damptrykket, kun kraftigere koking
  - Kan få dannelse av større dampblærer som fyller tverrsnittet (ifbm. trykkstøt (TPS210) kalles det *kolonneseparasjon*)

