Eksamen FIL2405 – Modallogikk, Høsten 2010
Onsdag 8.12. kl. 9.00 (4 timer)

Ingen hjelpemidler er tillatt

Oppgavesettet består av 2 sider

Kandidaten bes om å lese gjennom alle oppgaver først, for deretter å begynne besvarelsene! De fleste av oppgavene er enkle kunnskapstester og krever bare helt korte svar og **svært** lite tidsbruk for de som har tilegnet seg materialet på en forsvarlig måte. Noen andre oppgaver krever en dypere forståelse av de begrepsmessige sammenhenger.

Lykke til!

1. La det primitive språket for modallogikk være gitt ved uendelig mange setningsvariabler p, q, r, s, p', q', r', s', p'', q''…. og ~, ∧ og ◊. Her er ~ som vanlig for negason, ∧ er for konjunksjon og ◊ er mulighetsoperatoren. Hvilke av de følgende uttrykk vil regnes som formler: a) p~, b) r∧s, c) p◊s, d) ◊~(p∧~p)?
2. Angi **kort** standard formasjonsregler for det introduserte språket i forrige spørsmål.
3. Definer den materielle kondisjonal (⊃) og disjunksjon (∨) v.h.a. negasjon og konjunksjon.
4. Definer □p ved hjelp av ◊, ~ og p.
5. Forklart **kort** hva som menes med aksiom, aksiomskjema, slutningsregel og teorem i påstandslogikk og modallogikk? Gi gjerne eksempler. Er modus ponens en slutningsregel eller et aksiomskjema?
6. Hvilke av de følgende er gyldige i påstandslogikk: a) p⊃(p⊃q), b) p⊃(q⊃p), c) (p⊃q)⊃(p⊃~q), d) (~q⊃~p)⊃(p⊃q), e) (p⊃(q⊃r))⊃((p⊃q)⊃(p⊃r)), f) q∧~q, g) ~(p⊃~p)?
7. Gi på bakgrunn av forrige spørsmål en aksiomatisering av Jan Łukasiewicz' påstandslogikk slik den har blitt fremlagt på seminaret og i notatet om påstandslogikkens metalogikk. Vær i denne forbindelse nøye med å uttrykke deg skjematisk med store latinske bokstaver fra begynnelsen av alfabetet som skjema for å sette inn formler oppnådd utfra språket utviklet i oppgave 1 og 2. Hvilken slutningsregel har du med?
8. Skriv opp det aksiomskjemaet som avgrenser det svakeste modallogiske systemet vi har studert, nemlig K. Hvilken slutningsregel må antas i tillegg til den som gjelder for påstandslogikken i forrige spørsmål?
9. Forklar **kort** hvordan begrepet ***evalueringsramme*** ER=<***E***,***R***> har blitt utlagt i seminaret og i notatet. Kom i denne forbindelse inn på hva som menes med en *evaluering*, en v*aluering* (el. også et valuerings*atributt*) og en *tilgjengelighetsrelasjon*, og angi deres forbindelser relativt til en gitt evalueringsramme.
10. Gitt en valuering V i en evaluering ***E*** i en evalueringsramme <***E***, ***R***>, angi nødvendige og tilstrekkelige betingelser for at V~p, Vp∧q og V◊p skal holde. Hva kalles disse sammenhengene i evalueringssemantikken. Forklar hva som menes med V-disjunktivitet og V-apodiktisitet i evalueringssemantikken.
11. Gitt avgrensede prinsipper i forrige oppgave, vis V-kondisjonalitet, dvs. V(p⊃q) omm Vp bare hvis Vq; mer formelt uttrykt: V(p⊃q)⇔(Vp⇒Vq). Pilen og dobbeltpilen er her

henholdsvis metaspråklig implikasjon og ekvivalens. (Merk at det vi i notatet ***An Evaluation Semantics for Modal Propositional Logic*** kalte V-distributivitet er ”halvparten” av V-kondisjonalitet.)

12 Hva menes med V-konsistens og V-fullstendighet i evalueringssemantikken? Kan vi ha $V(p\wedge{\sim}p)$? Kan vi noen ganger ha at verken Vp eller $V{\sim}p$?

13 Hva vil det si at en modallogisk formel er gyldig i en evalueringsramme ER.

14 Gi et intuitivt og **kort** argument for at alle teorem i Łukasiewicz′ påstandslogikk er gyldige i alle evalueringsrammer. Her bes det ikke om et bevis.

15 Vi sier at en modallogisk setning er K-gyldig omm den holder i alle evalueringsrammer ER. Vis at $\Box(A\supset B)\supset(\Box A\supset\Box B)$ er et K-gyldig skjema.

16 Vi har i seminaret festet oss ved fem andre modallogiske skjemaer som vi i seminaret og notatet har kalt $\underline{D}$, $\underline{T}$, $\underline{Br}$, $\underline{4}$ og $\underline{E}$. Bruk disse angitte navnene korrekt på skjemaene som følger: $A\supset\Box\Diamond A$, $\Diamond A\supset\Box\Diamond A$, $\Box A\supset\Box\Box A$, $\Box A\supset\Diamond A$ og $\Box A\supset A$.

17 Gi den korrekte forbindelse mellom skjemaene i forrige oppgave og de følgende betingelser på tilgjengelighetsrelasjonen **R** i evalueringsrammer ER: **R** er evklidsk, dvs. $\forall V, V', V''(V,V',V''\in\mathbf{E}\supset((V\mathbf{R}V' \& V\mathbf{R}V'')\rightarrow V'\mathbf{R}V''))$; **R** er refleksiv, dvs. $\forall V(V\in\mathbf{E}\rightarrow V\mathbf{R}V)$; **R** er symmetrisk, dvs. $\forall V,V'(V,V'\in\mathbf{E}\rightarrow(V\mathbf{R}V'\rightarrow V'\mathbf{R}V))$; **R** er transitiv, dvs. $\forall V, V', V''(V,V',V''\in\mathbf{E}\supset((V\mathbf{R}V' \& V'\mathbf{R}V'')\rightarrow V\mathbf{R}V''))$; **R** er seriell, dvs. $\forall V(V\in\mathbf{E}\rightarrow\exists V'(V'\in\mathbf{E} \& V\mathbf{R}V'))$.

18 Vis at skjemaet $\Box A\supset\Box\Box A$ er gyldig i alle transitive evalueringsrammer.

19 Aksiomatiser de modallogiske systemene D, T, B, S4 og S5.

20 Forklar uttrykkene $\vdash_B$ og $\vDash_{S4}$.

21 Hva vil det si at et modallogisk system er sunt?

22 Hva er den kanoniske evalueringsrammen for et modallogisk system X?

23 Gjengi *det sentral teorem for kanoniske evalueringsrammer*.

24 Forklar hva det betyr at S4 er semantisk fullstendig.

25 Er D, T, B, S4 og S5 semantisk fullstendige?

26 Vis at T er semantisk fullstendig.

27 I oppgave 3.8. a) s. 69 i G.E. Hughes & M.J. Cresswells bok *A New Introduction to Modal Logic* bes leseren om å vise at S5 kan aksiomatiseres ved systemet D+$\underline{E}$=K+$\underline{D}$+$\underline{E}$ (i vår terminologi). Vis at forfatternes antagelse her er feil, og at S5 ikke kan aksiomatiseres som K+ $\underline{D}$+$\underline{E}$, ved å beskrive en evalueringsramme <**E**,**R**> hvor **R** er seriell og evklidsk men ikke en ekvivalensrelasjon (dvs. **R** er ikke refleksiv, transitiv og symmetrisk).