

Eksamen FIL2405 – Modallogikk,
Utsatt prøve januar 2011
Mandag 10.1. kl. 9.00 (4 timer)

Ingen hjelpemidler er tillatt

Oppgavesettet består av 2 sider

Kandidaten bes om å lese gjennom alle oppgaver først, for deretter å begynne besvarelsene! De fleste av oppgavene er enkle kunnskapstester og krever bare helt korte svar og **svært** lite tidsbruk for de som har tilegnet seg materialet på en forsvarlig måte. Noen andre oppgaver krever en dypere forståelse av de begrepsmessige sammenhenger.

Lykke til!

- 1 La det primitive språket for modallogikk være gitt ved uendelig mange setningsvariabler $p, q, r, s, p', q', r', s', p'', q'', \dots$ og \sim, \supset og \Box . Her er \sim som vanlig for negasjon, \supset er for materiell implikasjon og \Box er nødvendighetsoperatoren. Hvilke av de følgende uttrykk vil regnes som formler: a) $p \sim$, b) $r \supset s$, c) $p \diamond s$, d) $\Box \sim (p \supset \sim p)$?
- 2 Angi **kort** standard formasjonsregler for det introduserte språket i forrige spørsmål.
- 3 Definer konjunksjon (\wedge) og disjunksjon (\vee) v.h.a. negasjon og implikasjon.
- 4 Definer $\diamond p$ ved hjelp av \Box, \sim og p .
- 5 Forklar **kort** hva som menes med aksiom, aksiomskjema, slutningsregel og teorem i påstandsløggikk og modallogikk? Gi gjerne eksempler. Er modus ponens en slutningsregel eller et aksiomskjema?
- 6 Hvilke av de følgende er gyldige i påstandsløggikk: a) $p \supset (p \supset q)$, b) $p \supset (q \supset p)$, c) $(p \supset q) \supset (p \supset \sim q)$, d) $(\sim q \supset \sim p) \supset (p \supset q)$, e) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$, f) $q \wedge \sim q$, g) $\sim (p \supset \sim p)$?
- 7 Gi på bakgrunn av forrige spørsmål en aksiomatisering av Jan Łukasiewicz' påstandsløggikk slik den har blitt fremlagt på seminaret og i notatet om påstandsløggikkens metalogikk. Vær i denne forbindelse nøye med å uttrykke deg skjematisk med store latinske bokstaver fra begynnelsen av alfabetet som skjema for å sette inn formler oppnådd utfra språket utviklet i oppgave 1 og 2. Hvilken slutningsregel har du med?
- 8 Skriv opp det aksiomskjemaet som avgrensner det svakeste modallogiske systemet vi har studert, nemlig K. Hvilken slutningsregel må antas i tillegg til den som gjelder for påstandsløggikken i forrige spørsmål?
- 9 Forklar **kort** hvordan begrepet *evalueringsramme* $ER = \langle E, R \rangle$ har blitt utlagt i seminaret og i notatet. Kom i denne forbindelse inn på hva som menes med en *evaluering*, en *valuering* (el. også et *valueringsattributt*) og en *tilgjengelighetsrelasjon*, og angi deres forbindelser relativt til en gitt evalueringsramme.
- 10 Gitt en valuering V i en evaluering E i en evalueringsramme $\langle E, R \rangle$, angi nødvendige og tilstrekkelige betingelser for at $V \sim p$, $V p \wedge q$ og $V \diamond p$ skal holde. Hva kalles disse sammenhengene i evalueringssemantikken. Forklar hva som menes med V -disjunktivitet og V -apodiktisitet i evalueringssemantikken.

- 11 Gitt avgrensede prinsipper i forrige oppgave, vis V-kondisjonalitet, dvs. $V(p \supset q)$ omm Vp bare hvis Vq ; mer formelt uttrykt: $V(p \supset q) \Leftrightarrow (Vp \Rightarrow Vq)$. Pilen og dobbelpilen er her henholdsvis metaspråklig implikasjon og ekvivalens. (Merk at det vi i notatet *An Evaluation Semantics for Modal Propositional Logic* kalte V-distributivitet er ”halvparten” av V-kondisjonalitet.)
- 12 Hva menes med V-konsistens og V-fullstendighet i evalueringsemantikken? Kan vi ha $V(p \wedge \sim p)$? Kan vi noen ganger ha at verken Vp eller $V \sim p$?
- 13 Hva vil det si at en modallogisk formel er gyldig i en evalueringsramme ER.
- 14 Gi et intuitivt og **kort** argument for at alle teorem i Łukasiewicz’ påstandsløikk er gyldige i alle evalueringsrammer. Her bes det ikke om et bevis.
- 15 Vi sier at en modallogisk setning er K-gyldig omm den holder i alle evalueringsrammer ER. Vis at $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$ er et K-gyldig skjema.
- 16 Vi har i seminaret festet oss ved fem andre modallogiske skjemaer som vi i seminaret og notatet har kalt D, T, B, 4 og E. Bruk disse angitte navnene korrekt på skjemaene som følger: $A \supset \Box \Diamond A$, $\Diamond A \supset \Box \Diamond A$, $\Box A \supset \Box \Box A$, $\Box A \supset \Diamond A$ og $\Box A \supset A$.
- 17 Gi den korrekte forbindelse mellom skjemaene i forrige oppgave og de følgende betingelser på tilgjengelighetsrelasjonen **R** i evalueringsrammer ER: **R** er evklidsk, dvs. $\forall V, V', V'' (V, V', V'' \in E \supset ((VRV' \& VRV'') \rightarrow V'RV''))$; **R** er refleksiv, dvs. $\forall V (V \in E \rightarrow VRV)$; **R** er symmetrisk, dvs. $\forall V, V' (V, V' \in E \rightarrow (VRV' \rightarrow V'RV))$; **R** er transitiv, dvs. $\forall V, V', V'' (V, V', V'' \in E \supset ((VRV' \& V'RV'') \rightarrow VRV''))$; **R** er seriell, dvs. $\forall V (V \in E \rightarrow \exists V' (V' \in E \& VRV'))$.
- 18 Vis at skjemaet $\Diamond A \supset \Box \Diamond A$ er gyldig i alle evklidske evalueringsrammer.
- 19 Aksiomatiser de modallogiske systemene D, T, B, S4 og S5.
- 20 Forklar uttrykkene \vdash_B og \models_{S4} .
- 21 Hva vil det si at et modallogisk system er sunt?
- 22 Hva er den kanoniske evalueringsrammen for et modallogisk system X?
- 23 Gjengi *det sentral teorem for kanoniske evalueringsrammer*.
- 24 Forklar hva det betyr at S4 er semantisk fullstendig.
- 25 Er D, T, B, S4 og S5 semantisk fullstendige?
- 26 Vis at B er semantisk fullstendig.
- 27 I oppgave 3.8. a) s. 69 i G.E. Hughes & M.J. Cresswells bok *A New Introduction to Modal Logic* bes leseren om å vise at S5 kan aksiomatiseres ved systemet $D + \underline{E} = K + \underline{D} + \underline{E}$ (i vår terminologi). Vis at forfatterens antagelse her er feil, og at S5 ikke kan aksiomatiseres som $K + \underline{D} + \underline{E}$, ved å beskrive en evalueringsramme $\langle E, R \rangle$ hvor **R** er seriell og evklidsk men ikke en ekvivalensrelasjon (dvs. **R** er ikke refleksiv, transitiv og symmetrisk).