

Pensum AST1010: Formler og nøkkeltall

October 3, 2019

1 Formler

Du kan bli bedt om å regne med, eller å resonere med utgangspunkt i, alle disse formlene. Matematikken vil være på barneskolenivå (bortsett fra enkel potensregning). Du trenger heller ikke være ekspert i å løse likninger. Det er absolutt tillatt å prøve å sette inn forskjellige tall og se hvilket tall som gjør at det blir likt på begge sider av likhetstegnet. Det vil bli gitt flere øvingsoppgaver som ligner aktuelle eksamensoppgaver, og du kan få hjelp med disse på gruppetimene. De følgende formlene kan dere risikere å bli konfrontert med på eksamen.

Symbolet \propto brukt nedenfor betyr ”proporsjonal med”. Når vi sier $A \propto B$ så betyr det at hvis vi dobblen B så vil A også dobblen. Hvis $A \propto \frac{1}{B^2}$ så vil det si at hvis vi dobblen B så vil A minke med en faktor $\frac{1}{2^2} = 0.25$.

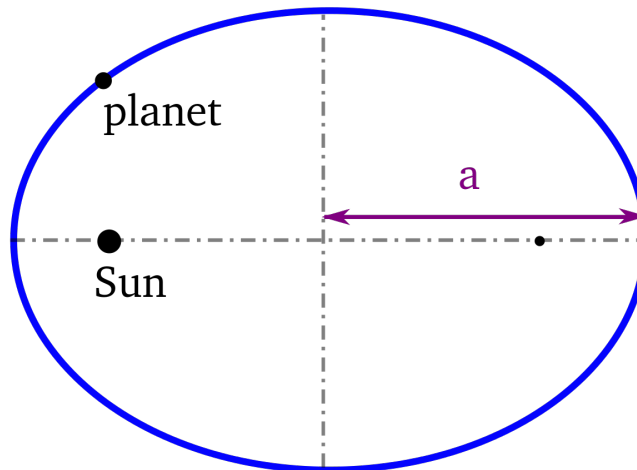


Figure 1: En planet i en elliptisk bane rundt en sol. Middellavstanden mellom planeten og sola er a og tiden planeten bruker på å gjøre et omløp er P .

1.1 Keplers tredje lov

Keplers tredje lov sier at når vi har et objekt A som går i bane rundt et objekt B (for eksempel planet i bane rundt sola, se Figur 1) så er

$$P^2 = ka^3$$

hvor P er perioden (omløpstiden), a er middellavstanden mellom objektene og k er en konstant. Dere trenger ikke huske uttrykket for k , men dere må huske at k avhenger av massene ($k \propto \frac{1}{m_A + m_B}$) og at dette kan brukes til å ”veie” en planet. Dere må huske at i solsystemet så er $k = 1$ hvis P måles i år og a i astronomiske enheter. Dere må kunne gjøre enkle utregninger som for eksempel å finne avstanden hvis perioden er gitt.

Eksempel oppgave: En planet går i bane rundt en sol som har halvparten av massen som vår egen sol (så $k = 2$). Den har en periode på 4 år, hva er middellavstanden til sola?

Løsning: Keplers tredje lov sier at $P^2 = ka^3$ hvor $k = 2$ og P er målt i år og a i astronomiske enheter. Vi har $P^2 = 4^2 = 16$ så $16 = 2a^3$ noe som vil si $a^3 = 8$. Vi ser at løsningen er $a = 2$ så middellavstanden er 2 astronomiske enheter.

1.2 Tyngdeaksellerasjonen

Tyngdeaksellerasjonen på overflaten av et objekt (for eksempel planet) er gitt ved

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

hvor M er massen til objektet, r er radiusen og G er gravitasjons konstanten. Dere må kunne bruke denne formelen til å si noe om hvordan tyngdeaksellerasjonen endrer seg når vi endrer massen eller radiusen (eller begge) og gjøre enkle utregninger basert på denne.

Eksempel oppgave: En planet har dobbel så stor masse som jorda og har samme radius. Hva er tyngdeaksellerasjonen på overflaten?

Løsning: Vi vet at $g_{\text{planet}} = \frac{GM_{\text{planet}}}{r_{\text{planet}}^2}$ samt at $g_{\text{jord}} = \frac{GM_{\text{jord}}}{r_{\text{jord}}^2}$. Siden $M_{\text{planet}} = 2M_{\text{jord}}$ og $r_{\text{planet}} = r_{\text{jord}}$ så finner vi at $g_{\text{planet}} = \frac{2GM_{\text{jord}}}{r_{\text{jord}}^2} = 2g_{\text{jord}}$. Alternativ resonering: siden det kun er massen som varierer og kraften er proporsjonal med massen så vil kraften øke med en faktor 2. Tyngdeaksellerasjonen er dermed dobbelt så stor som på jorda.

1.3 Newtons gravitasjonslov

Kraften som virker mellom to objekter (for eksempel sol og planet) er gitt ved

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

hvor M og m er massene til de to objektene, r er avstanden mellom dem og G er gravitasjonskonstanten. Dere må kunne forklare enkle ting basert på denne som hvordan kraften endrer seg hvis vi endrer massene eller avstanden mellom dem.

Eksempel oppgave: Hvor mye øker gravitasjonskraften mellom to objekter når vi halverer avstanden?

Løsning: Newtons gravitasjonslov sier at $F \propto \frac{1}{r^2}$ så hvis vi halverer avstanden så øker kraften med en faktor $\frac{1}{(1/2)^2} = \frac{1}{(1/4)} = 4$.

1.4 Parallakse

Hvis vi observerer at et objekt har en parallaksevinkel p så er avstanden gitt ved

$$d = \frac{1}{p}$$

hvor p måles i buesekunder og du får avstanden i parsec (1 parsec er ca. 3.3 lysår). Dere må kunne forklare hvordan vi finner avstanden til en stjerne og kunne gjøre enkle utregninger basert på denne.

Eksempel oppgave: Vi observerer parallakse vinkelen til en stjerne, den er 2 buesekunder. Hvor langt unna er stjerna?

Løsning: Siden den oppgitte vinkelen er gitt i buesekunder så kan vi sette direkte inn i likningen og finner at $d = \frac{1}{2} = 0.5$ parsec.

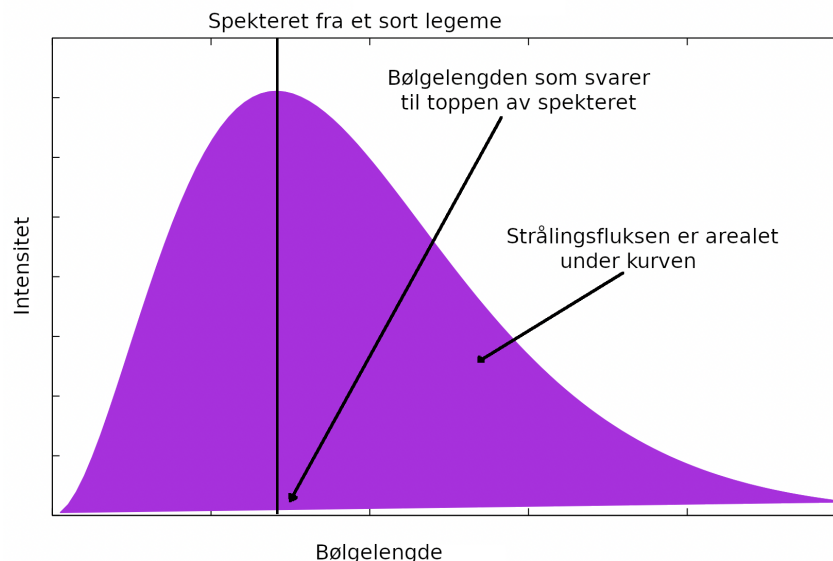


Figure 2: Spekteret fra et sort legeme: intensiteten av strålingen som funksjon av bølgelengde. Bølgelengden som svarer til toppen av spekteret er den som brukes i Wiens lov til å gi oss temperaturen. Arealet (integralet) under spekteret er strålingsfluksen som kan relateres til temperaturen ved å bruke Stefan-Boltzmanns lov.

1.5 Wiens forskyvningslov

Toppen til spektret fra et sort legeme (se Figur 2) ligger ved en bølgelengde

$$\lambda = \frac{b}{T}$$

hvor T er temperaturen (i Kelvin) og b er en konstant. Dere må kunne forklare hvordan dere kan finne temperaturen til sort legeme fra spektret (vi finner bølgelengden som svarer til toppen av spekteret og så finner vi temperaturen ved å bruke formelen). Dere må kunne bruke denne formelen til å forklare hvordan denne bølgelengden endrer seg hvis vi endrer temperaturen (og omvendt).

Eksempel oppgave: Spekteret fra en stjerne har maksimum ved en bølgelengde som er halvparten så stor som den tilsvarende bølgelengden for sola vår. Hva er temperaturen til stjerna?

Løsning: Vi vet at $\lambda \propto \frac{1}{T}$ så $T \propto \frac{1}{\lambda}$. Hvis bølgelengden er halvparten så må temperaturen være større med en faktor $\frac{1}{(1/2)} = 2$ i forhold til sola vår. Temperaturen til sola er ca. 5800K så temperaturen til stjerna er det dobbelte ca. 11600 K.

1.6 Stefan-Boltzmanns lov

Strålingsfluksen (utstrålt effekt pr. arealenhet, målt i watt per kvadratmeter) fra et sort legeme (se Figur 2) er gitt ved

$$F = \sigma T^4$$

hvor T er temperaturen (i Kelvin) og σ er en konstant. Dette er strålingsfluksen på overflaten av objektet. Dere må vite hvordan strålingsfluksen kan finnes fra spekteret (den svarer til arealet som ligger under spekteret). Dere må kunne bruke denne til å si noe om hvordan utsendt stråling endrer seg hvis vi endrer temperaturen.

Eksempel oppgave: Vi har to stjerner. Den første har dobbelt så stor temperatur som den andre, hvor mye sterkere (fluks) stråler den første stjerna med i forhold til den andre?

Løsning: Vi vet at fluksen er gitt ved $F \propto T^4$ så hvis vi dobblen temperaturen så ser vi at fluksen øker med en faktor $2^4 = 16$. Den første stjerna stråler 16 ganger sterkere enn den andre stjerna.

1.7 Strålingsfluks som funksjon av avstand

Når et objekt (som sola) stråler mot oss så vil strålingsfluksen vi mottar fra objektet avhenge av hvor langt unna vi observerer objektet fra. Det minker med avstanden r som

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

Dette er fordi strålingsfluks er effekt per areal og arealet til en kuleoverflate med radius r vokser proporsjonalt med r^2 . Dette forklarer for eksempel hvorfor planeter nærmere sola mottar mer energi fra sola enn planeter lengre unna.

Eksempel oppgave: Jupiter er i en avstand på ca. 5 AU fra sola. Hvor mye mindre er strålingsfluksen som Jupiter får fra sola sammenliknet med den Jorda vår får?

Løsning: Jorda er i en avstand 1 AU fra sola så Jupiter er ca. 5 ganger så langt fra sola som jorda. Siden strålingsfluksen faller av som $\frac{1}{r^2}$ så er strålingsfluksen en faktor $\frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ mindre på Jupiter. Det vil si at en liten flekk på jordoverflaten vil motta 25 ganger så mye energi som en tilsvarende flekk på Jupiter.

1.8 Hubbles lov

Den tilsynelatende hastigheten vi observerer at en fjern galakse fjerner seg fra oss med er gitt ved

$$v = H_0 d$$

hvor v er hastigheten, d er avstanden til galaksen og H_0 er Hubble konstanten. Hvis vi antar at v er uendret gjennom universets historie (en grov antagelse) så gir denne formelen at universets alder er $t_0 = \frac{1}{H_0}$ som er ca. 14 milliarder år (dette stemmer bra med mer nøyaktige utregninger).

Eksempel oppgave: Vi observerer to galakser der den første beveger seg mye raskere bort fra oss enn den andre. Hvilken galakse ligger nærmest jorda?

Løsning: Vi har at $v \propto d$ så hastigheten øker med avstand. Den første galaksen ligger derfor lengst unna og det er den andre galaksen som ligger nærmest jorda.

2 Nøkkeltall

Dere burde huske noen tall som...

- Sammenhengen mellom grad, bueminutter (60 av disse i en grad) og buesekunder (60 av disse i et bueminutt, 3600 av disse i en grad).
- At en parsec er ca. 3.3 lysår.
- At middelavstanden mellom sola og jorda er ca. 150 millioner kilometer (kalles en astronomisk enhet).
- Sammenhengen mellom Kelvin og Celcius (samme skala, men Kelvin starter på 0 ved ca -273 grader celsius så 27 grader celsius er ca. 300 grader Kelvin).
- At temperaturen til sola er ca. 5800K (også godt å vite at maksimum i solspekteret er ved ca. 500 nanometer som svarer til grønt lys).
- At universet er ca. 14 milliarder år.