UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST1100, 2. desember 2008, 14.30 – 17.30

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 11 sider

Tillatte hjelpemidler: medbrakt kalkulator

Konstanter og formelsamling finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side en selve oppgaven

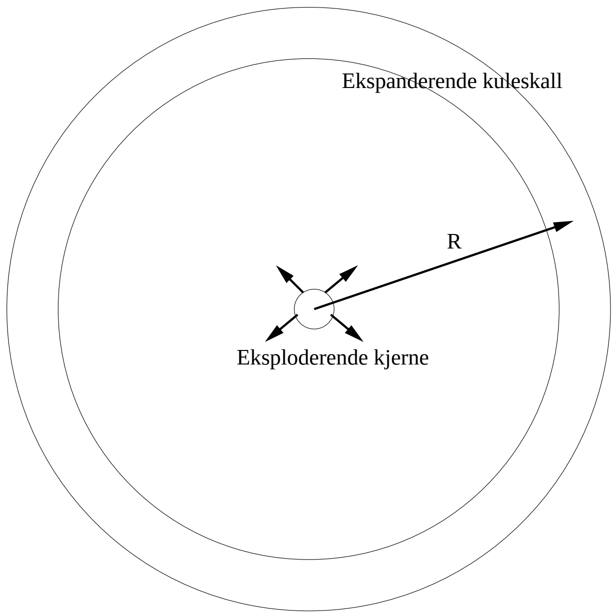
Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises. Noen oppgaver er merket 'krevende' eller 'kort':

- 'krevende': Oppgaven vil gi flere poeng enn de andre oppgavene hvis den er besvart i sin helhet, men flere overganger kan være nødvendig for å komme frem til svaret. På disse oppgavene vil det bli gitt poeng for alle skritt i riktig retning. (Det betyr ikke nødvendigvis at oppgaven er veldig vanskelig eller krever mye regning, det betyr bare at man trenger å bruke litt fysisk forståelse og kanskje mer enn en utregning for å komme frem til svaret)
- 'kort': Oppgaven gir litt færre poeng enn gjennomsnittet og det forventes ikke en lang besvarelse.

Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

Oppgave 1

I flere uavhengige kinesiske nedtegnelser så finner man beskrivelser av en 'gjestestjerne' som dukket opp på himmelen den 4. juli år 1054. Stjernen var synlig selv midt på dagen i noen uker. Nå vet vi at dette har vært en supernovaeksplosjon og restene av denne eksplosjonen kan nå sees som Krabbetåken. Vi skal nå studere en modell for denne supernovaen.



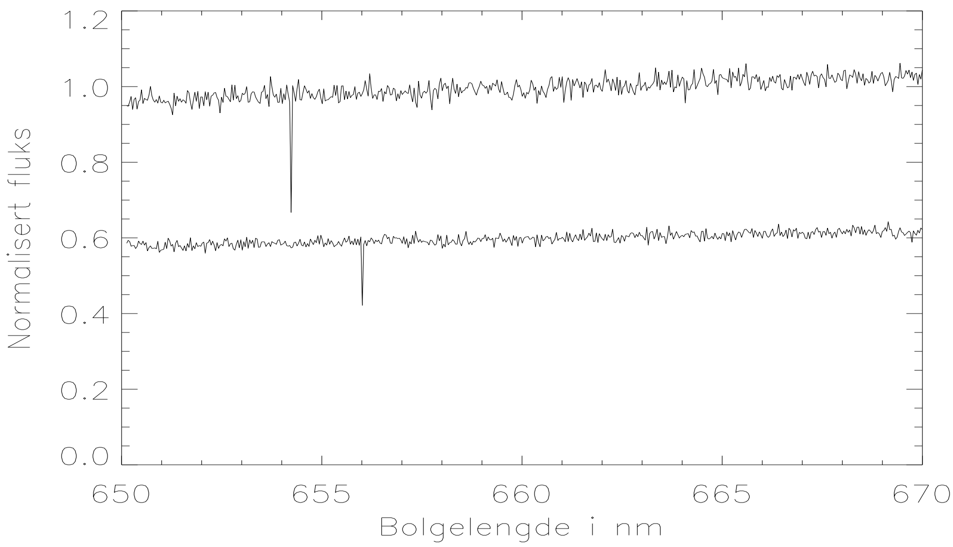
Figur 1: For oppgave 1

1. (a) Forklar **kort** (rundt en halv side) hvorfor jern ikke kan fusjonere til tyngre grunnstoffer.

   (b) Forklar **kort** (rundt en halv side) hva som skjer i en supernovaeksplosjon. Legg vekt på hva det er som utløser eksplosjonen og hvor energien i eksplosjonen kommer fra.

2. *kort oppgave:* I en supernovaeksplosjon blir lagene rundt kjernen i stjerna kastet utover av en sjokkbølge som oppstår i kjernen. Vi kan derfor modellere en supernovaeksplosjon som et kuleskall av gass som øker radien sin hurtig (se figur 1) . I figur 2 viser vi (øverst) spektret til supernovaeksplosjonen og (nederst) spektret til en gass i laboratoriet ved samme temperatur. Anta at stjernen som eksploderer står i ro i forhold til jorda. Med hvilken hastighet beveger skallet seg utover fra kjernen? (Hvis du ikke får til denne oppgaven skal du bruke hastigheten 1000 km/s (som ikke er riktig svar) videre i andre oppgaver)

3. Før supernovaeksplosjonen så antar vi at stjernen som eksploderte var en kjempestjerne med radius 100 ganger solradien. Vi antar at den hadde tilsynelatende magnitude (apparent magnitude) m=8. Under eksplosjonen får skallet hele tiden tilført energi fra den eksploderende kjernen under, så du kan anta at temperaturen til gassen i det ekspanderende skallet er hele tiden konstant lik overflatetemperaturen som stjerna hadde rett før eksplosjonen. Anta at kuleskallet er et sort legeme (black body) og ekspan-



Figur 2: For oppgave 1

derer med konstant hastighet. Hvilken tilsynelatende magnitude (apparent magnitude) har supernovaen etter 1 dag (forklar alle mellomregninger)? Har supernovaen ved dette tidspunktet allerede blitt synlig uten kikkert? (argumenter)

4. *krevende oppgave:* Det som ble igjen av supernovaeksplosjonen var en nøytronstjerne. **Integrer opp** likningen for hydrostatisk likevekt (equation of hydrostatic equilibrium) for å vise at radien til en nøytronstjerne kan skrives som
$$R = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3} \frac{h^2}{10 m_n^{8/3} G} M^{-1/3}.$$
Anta at nøytronstjerna har uniform tetthet. Begrunn alle formler og tilnærmelser/antagelser du bruker. **hint:** (1) Finn ut hvordan man kan skrive antalltettheten n_n av nøytroner uttrykt ved massetettheten ρ og nøytronmassen m_n. (2) Hva må trykket være på overflaten av stjerna? (3) Hvor stor er tyngdeakselerasjonen i en avstand r fra sentrum? (4) Anta ikke-relativistiske nøytroner.

Oppgave 2

1. En gang i fremtiden blir en rakett med en romsonde sendt mot nøytronstjernen i Krabbetåken. Denne nøytronstjernen roterer om sin egen akse 30 ganger

i sekundet og er en pulsar. Man skal bruke pulsene fra pulsaren til å måle hastigheten til raketten på et gitt tidspunkt. Vi antar at hastigheten v til raketten er relativistisk. Vi antar at jorda og nøytronstjerna står i ro i forhold til hverandre. Vi skal bruke koordinater (x, t) i jordas referansesystem og (x', t') i rakettens referansesystem. Ved $t = t' = 0$ starter raketten fra jorda. Etter en tid $t = t_A$ så skjer event A, nemlig at raketten treffes av en puls fra pulsaren. En tidsperiode Δt senere (målt i jordas referansesystem) så skjer event B som er at raketten treffes av den neste pulsen fra pulsaren.

Det er lett å vise at (du trenger **ikke** vise det her) forholdet mellom perioden Δt mellom hver gang romskipet treffes av en puls målt i jordas ref. system og perioden Δt_0 som er perioden mellom utsendelsen av pulser fra pulsaren (også målt i jordas ref. system) er gitt ved

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{1 + v}.$$

Her er $c = 1$. Denne formelen skal du bruke i det følgende.

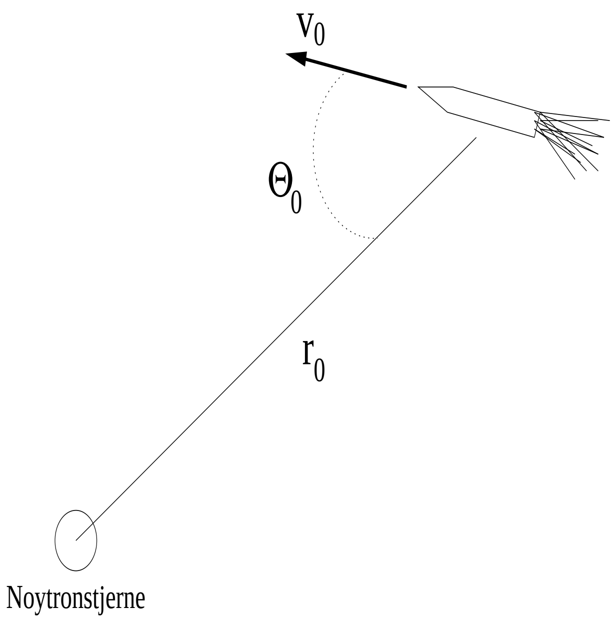
(a) Skriv opp posisjon og tid (x, t) og (x', t') for eventene A og B uttrykt ved t_A, t'_A, Δt_0, $\Delta t'$ og v. Her er t_A og t'_A de (ukjente) tidspunktene for event A målt i jordas og romskipets ref. system. $\Delta t'$ er perioden mellom hver gang romskipet treffes av en puls målt i romskipets ref. system.

(b) **Bruk invarians av linjeelementet** mellom event A og B til å finne hastigheten til raketten uttrykt ved perioden Δt_0 til pulsaren målt i jordas referansesystem og perioden $\Delta t'$ som er perioden som måles mellom hver mottakelse av en puls i rakettsystemet. **Hint:** Du kan få bruk for at $(1 - v^2) = (1 - v)(1 + v)$

(c) Når instrumentene i raketten måler at det er 1/100 sekund mellom hver puls, hva er da hastigheten til raketten?

2. *kort oppgave:* I figur 3 ser vi romsonden som nå er i en avstand $r_0 = 15000\text{km}$ fra nøytronstjernen. På dette punktet blir motoren i romsonden slått av og den begynner å gå i bane rundt nøytronstjerna. For å gjøre vitenskapelige undersøkelser av stjerna er det ønskelig at sonden går i en bane der punktet i banen som er nærmest nøytronstjerna er $r_1 = 500\text{km}$ fra sentrum av nøytronstjerna. Nøytronstjerna har en masse på 3 solmasser. Ta utgangspunkt i avstanden som sonden har på det nærmeste punktet i banen og forklar hvorfor vi her bør bruke relativistiske likninger for banebevegelse.

3. *krevende oppgave:* Vi skal nå finne ut hvilken hastighet v_0 og vinkel θ_0 (se figuren) sonden må passe på å ha i det øyeblikket den slår av motorene i avstanden r_0 for å kunne komme inn i en bane med perihel i r_1. Vis at følgende relasjon mellom hastighet v_0 og vinkel θ_0 må være oppfylt i det



Figur 3: For oppgave 2

sonden slår motorene av:

$$v_0 = \sqrt{\frac{1}{\frac{r_0^2}{r_1^2}(\sin\theta_0)^2 - 1}\left[\frac{\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)}{\left(1 - \frac{2M}{r_1}\right)} - 1\right]}.$$

hint: (1) Hvordan kan man i relativitetsteorien avgjøre hvor nær sentrum et legeme kommer? (2) Energien og spinnet til et legeme vil vel være en avgjørende faktor? (3) Det kan hjelpe å vise at E/m (generelt) kan skrives

$$E/m = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\gamma_{\text{shell}},$$

(legg merke til rottegnet) hvor

$$\gamma_{\text{shell}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\text{shell}}^2}}.$$

4. *kort oppgave:* Hvis sonden har en vinkel $\theta_0 = 3^\circ$ i det motoren blir slått av, hvilken hastighet v_0 må det da ha for å få den ønskede banen?

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_\mathrm{e} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_{\mathrm{max}} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) $= 1.60 \times 10^{-19}$ J
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU $= 1.5 \times 10^{11}$ m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly $= 9.47 \times 10^{15}$ m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

$$P^2 = a^3$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

$$\ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

$$p = h^2/m$$

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{(ellipse)}$$

$$p = a(e^2 - 1) \quad \text{(hyperbel)}$$

$$p = 1/2a \quad \text{(parabel)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = M\vec{R}$$

$$m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$

$$< K >= -\frac{1}{2} < U >$$

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

$$L = \frac{dE}{dt}$$

$$F = \frac{dE}{dAdt}$$

$$F = \sigma T^4$$

$$n(v)dv = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$$

$$\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT\ln 2}{m}}$$

$$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right)$$

$$U - B = M_U - M_B = m_U - m_B$$

$$B - V = M_B - M_V = m_B - m_V$$

$$M_V = -2.81\log_{10} P_d - 1.43$$

$$M_V = -3.53\log_{10} P_d - 2.13 + 2.13(B - V)$$

$$v = H_0 d_p$$

$$\tau(\lambda) = \int_0^r dr' n(r')\sigma(\lambda, r')$$

$$m(\lambda) = M(\lambda) + 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right) + 1.086\tau(\lambda)$$

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\rm rel} & -v_{\rm rel}\gamma_{\rm rel} & 0 & 0 \\ -v_{\rm rel}\gamma_{\rm rel} & \gamma_{\rm rel} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$< E_K >= \frac{3}{2}kT$$

$$N = \frac{M}{\mu m_H}$$

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}.$$

$$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr}$$

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$$

$$P_r = \frac{1}{3}aT^4$$

$$\rho_r = aT^4$$

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2\Delta\phi^2$$

$$\frac{M_{\rm m}}{M_{\rm kg}} = \frac{G}{c^2}$$

$$\Delta t_{\rm shell} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\Delta t$$

$$\Delta r_{\rm shell} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

$$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$$

$$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$$

$$\Delta\phi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$$

$$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$$

$$\frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$$

$$\frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]}$$

$$\Delta r = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\Delta t$$

$$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t$$

$$b = \frac{L}{p}$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$b_{\text{crit}} = 3\sqrt{3}M$$

$$\Delta\phi = \frac{4M}{R}$$

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4M(d_{\text{source}} - d_{\text{lens}})}{d_{\text{lens}}d_{\text{source}}}}$$

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_A Z_B e^2}{r}$$

$$r_{AB} = \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2}\frac{n_A n_B}{\sqrt{\mu\pi}}\int_0^E dE e^{-E/kt}\sigma(E)$$

$$r_{AB} \propto X_A X_B \rho^{\alpha'} T^\beta$$

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 X_A X_B \rho^\alpha T^\beta$$

$$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4$$

$$\varepsilon_{0,pp} = 1.08 \times 10^{-12}\text{Wm}^3/\text{kg}^2$$

$$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20}$$

$$\varepsilon_{0,CNO} = 8.24 \times 10^{-31}\text{Wm}^3/\text{kg}^2$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha}\rho^2 X_{He}^3 T_8^{41}$$

$$\varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86 \times 10^{-18}\text{Wm}^3/\text{kg}^2$$

$$L \propto M^4$$

$$t \propto 1/M^3$$

$$M \propto T_{\mathrm{eff}}^2$$

$$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty p\, v\, n(p)\, dp$$

$$n(\vec{p}) = n\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{3/2} e^{-p^2/(2mkT)}$$

$$n(E) = \frac{g(E)}{e^{(E-E_F)/(kT)}+1}$$

$$n(\vec{p}) = \frac{1}{e^{(p^2-p_F^2)/(2mkT)}+1}\frac{2}{h^3}$$

$$E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$$

$$P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_e}n_e^{5/3}$$

$$P = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}n_e^{4/3}$$

$$< E_K >= \frac{3}{5}E_F$$

$$R_{\mathrm{WD}} \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{20m_eG}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^{5/3}M^{-1/3}$$

$$M_{\mathrm{Ch}} \approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^2 \approx 1.4M_\odot$$

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - R^2(t)\left[\frac{\Delta r^2}{1-kr^2} + r^2\Delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\Delta\phi^2\right]$$

$$H(t) = \frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}$$

$$z = \frac{R_0}{R(t)} - 1$$

$$\dot{R}^2(t) - \frac{8}{3}\pi G\rho(t)R^2(t) - \frac{\Lambda}{3}R(t)^2 = -k$$

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4}{3}\pi G(\rho(t)+3P(t))R(t) + \frac{\Lambda}{3}R(t)$$

$$\rho_C(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_C(t)}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho R^{3(1+w)}) = 0$$

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^{3(1+w)}$$

$$R(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

$$q(t) = -\frac{1}{R(t)H^2(t)}\frac{d^2R(t)}{dt^2}$$

$$q(t) = \frac{1}{2}\Omega(t)$$

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

$$d_L = r(1+z)R_0$$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$P_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{(m_n - m_p)/kT}$$

$$\frac{n(t_1)}{n(t_2)} = e^{-\ln 2(t_1 - t_2)/\tau}$$

$$d_L = \frac{1}{H_0 q_0^2}[q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2zq_0} - 1)]$$

$$v = H_0 d_p$$