UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST1100, 1. desember 2009, 14.30 – 17.30

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 15 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling for kurset finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side enn selve oppgaven

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

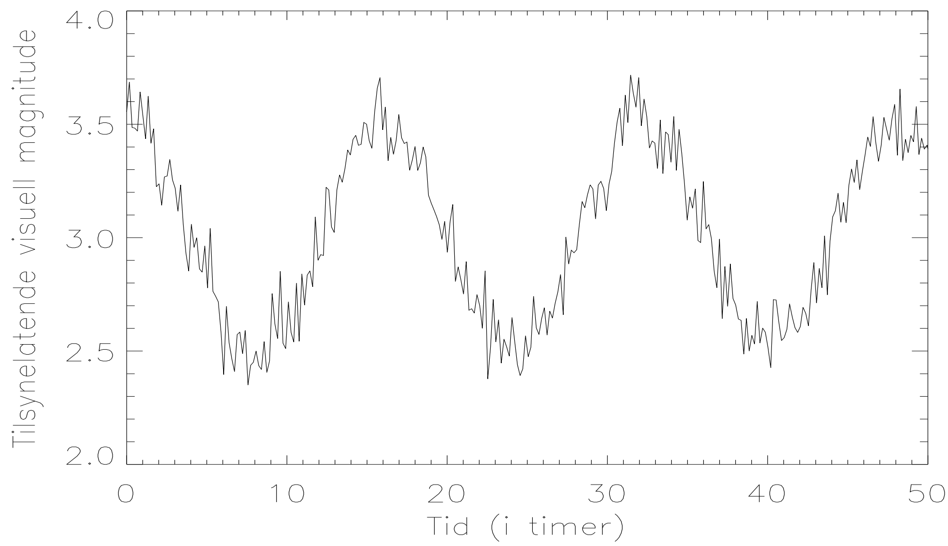
Det gies 9 poeng på hver deloppgave, med unntak av siste oppgave (2.2) hvor det gies totalt 10 poeng på hele oppgaven (hver av deloppgavene er veldig små)

Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

Oppgave 1

Vi er i år 3152 og du er på vei med rombussen for å besøke familie som har flyttet til en fjern planet mange lysår borte. Plutselig oppstår det et alvorlig problem med rombussen og du må gå over i et nødromskip som kort tid etter krasjlander på en ukjent planet. Heldigvis har planeten både oksygen og vegetasjon som du kan livnære deg på. Du har med teleskopet ditt og begynner å prøve å orientere deg litt om hvor du er.

1. Om natta ser du en veldig sterk stjerne på himmelen (vi kaller den stjerne B) som ser ut til å forandre lysstyrke regelmessig. I figur 1 ser du hvordan den tilsynelatende lysstyrken varierer med tiden. Du finner ut at det er



Figur 1: For oppgave 1:Observert tilsynelatende (visuell) magnitude som funksjon av tiden for Cepheiden.

en Cepheidestjerne. Omtrent hvor langt unna er stjerna? (hvis du ikke får til denne oppgaven, kan du bruke 200 ly (som ikke er riktig svar) i andre oppgaver)

2. Beregn sammenhengen mellom intensiteten $I(\lambda)$ og fluksen $F(\lambda)$ (det er en konstant faktor som skiller disse to, beregn denne faktoren) som vi mottar fra stjerna. Forklar hvordan du tenker, det bør være en figur i forklaringen som viser at du forstår hva du gjør.

3. Stjerna som planeten går i bane rundt (altså 'sola' i dette ukjente solsystemet), vi kaller den stjerne A, lyser med et sterkt blått lys som gjør at hele landskapet ser blått ut. Du anslår at fargen er så sterk at den meste strålingen nok kommer fra ultraviolett lys omkring $\lambda = 300$nm. Kan du gi et røft estimat av massen til stjerne A (du kan bruke det du vet om sola) ?

4. Du lurer på hvor langt unna stjerne A egentlig er. For å finne det ut, tar du kontakt over radio med en venn som reiste sammen med deg, men som ble evakuert i et annen nødromskip som styrtet et annet sted på den samme planeten som deg. Dere har funnet ut at dere befinner dere ca. 3000 km fra hverandre. Planeten som dere er på har en måne som stadig vekk formørker stjerna A. I figur 2 (øverste bilde) ser du et bilde som du

tar av stjerne A ved en slik formørkelse. I bakgrunnen ser du noen andre fjerne stjerner. På den samme figuren (nederste bilde) så ser du et bilde tatt samtidig fra vennen som befinner seg 3000 km unna (det er forskjell mellom de to bildene, sjekk høyden til stjerne A). Hva er avstanden til stjerne A? (hvis du ikke får til denne oppgaven, så bruk avstanden 3 AU videre (merk: dette er ikke det riktige svaret))

5. Du skal nå finne massen til stjerne A mer nøyaktig ved å bruke gravitasjonslinsing. Ved den samme formørkelsen så ser du stjerne B (som du fant avstanden til tidligere) helt ved randen av stjerne A (se igjen figur 2). I figur 3 ser du stjernehimmelen slik den ser ut i dette området av himmelen på en annen tid av året (legg merke til at det er mange stjerner som er felles på denne og den foregående figuren). Hvis du ser nøye etter så er posisjonen til stjerne B litt forskjellig på de to figurene. Dette kommer av gravitasjonslinsing, dvs. at lyset fra stjerne B har blitt avbøyd av gravitasjonsfeltet til stjerne A. I figur 4 ser du situasjonen, og i figur 5 er geometrien skissert i mer detalj. Ved å måle vinkler på figurene 2 og 3 kombinert med litt geometri, så kan du ganske enkelt finne frem til vinklene α, γ, δ, κ samt høyden h som er nødvendige for å beregne massen til stjerne A (husk at noen av vinklene er små). Du trenger å vite at vinkelutstrekningen (diameteren) til stjerne A på himmelen er nøyaktig en grad.

   (a) Vis at massen til stjerne A kan uttrykkes som:

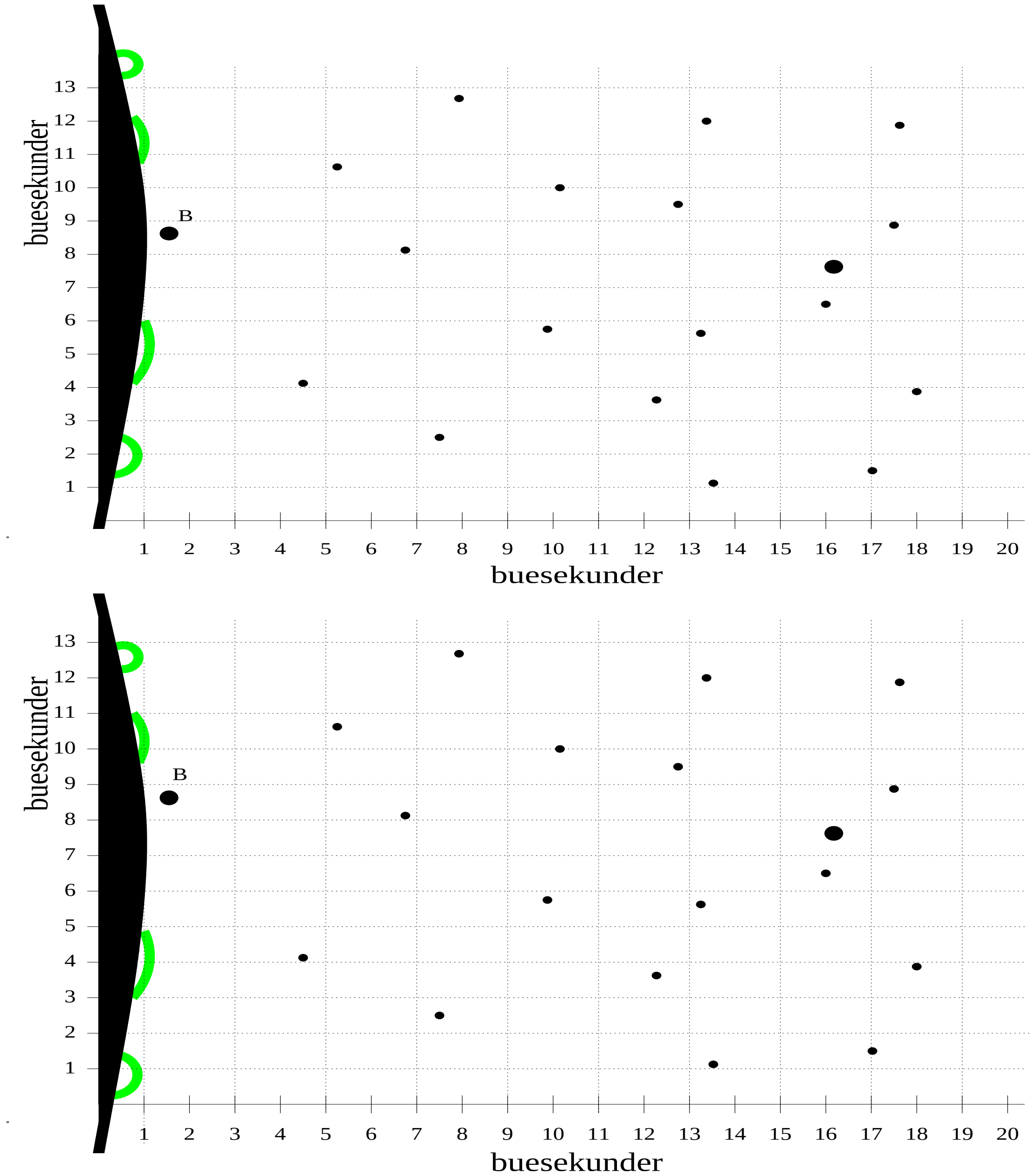
   $$M \approx \frac{d_L(\alpha+\delta)}{4}\left[\frac{d_L\alpha}{d_s-d_L}+\alpha\right]$$

   der d_L er avstanden til stjerne A og d_S er avstanden til stjerne B (hint: du trenger egentlig ikke vinkelen κ, men det er lettere å uttrykke vinkelen γ ved κ siden κ er en liten vinkel)

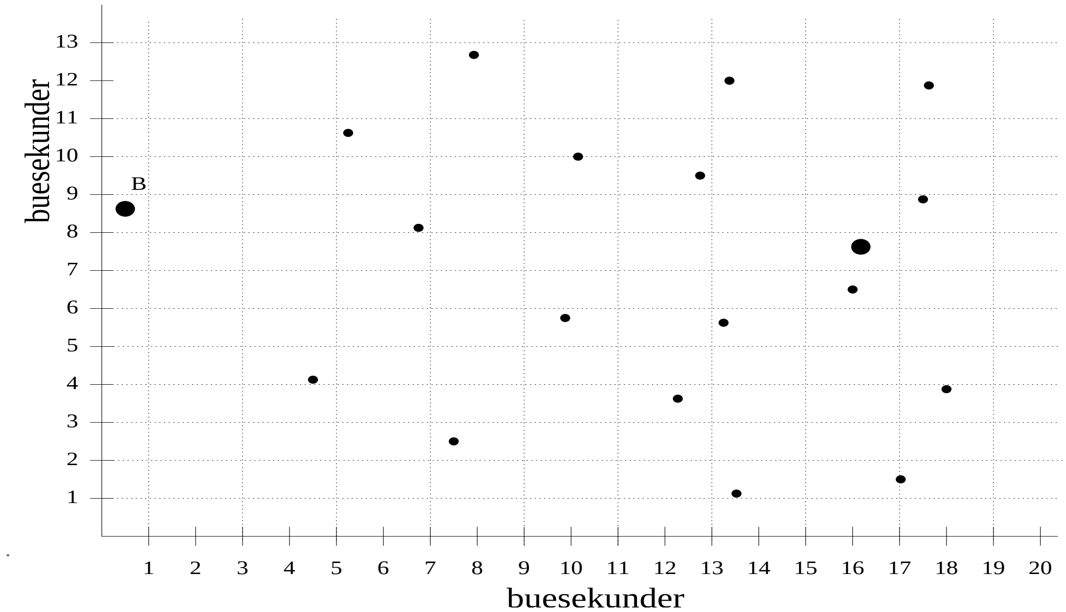
   (b) Beregn massen til stjerne A ved å bruke dette uttrykket og **gi svaret i solmasser**

6. Hvis stjerne A hadde vært et sort hull i steden for en stjerne, hvor stor masse måtte dette sorte hullet hatt hvis lysstrålen vi så på i forrige punkt (nøyaktig den samme lysstrålen) skulle ha blitt slukt av det sorte hullet? (hvilken tilnærmelse bruker du for å gjøre denne oppgaven enkel å regne på?)

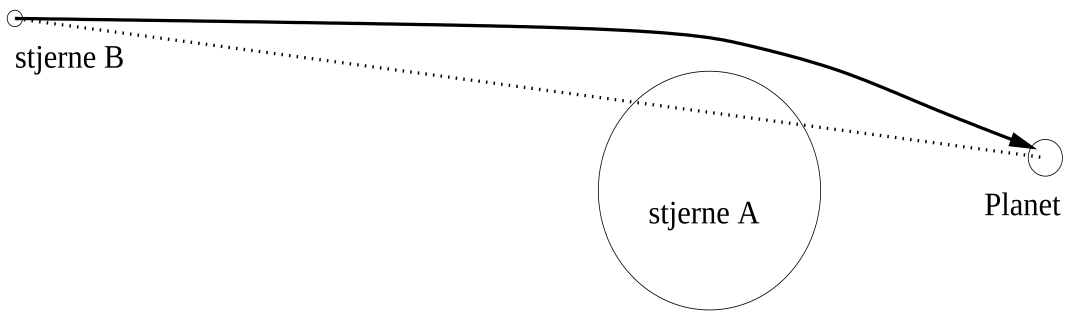
NB! Oppgave 2 kommer etter figurene!



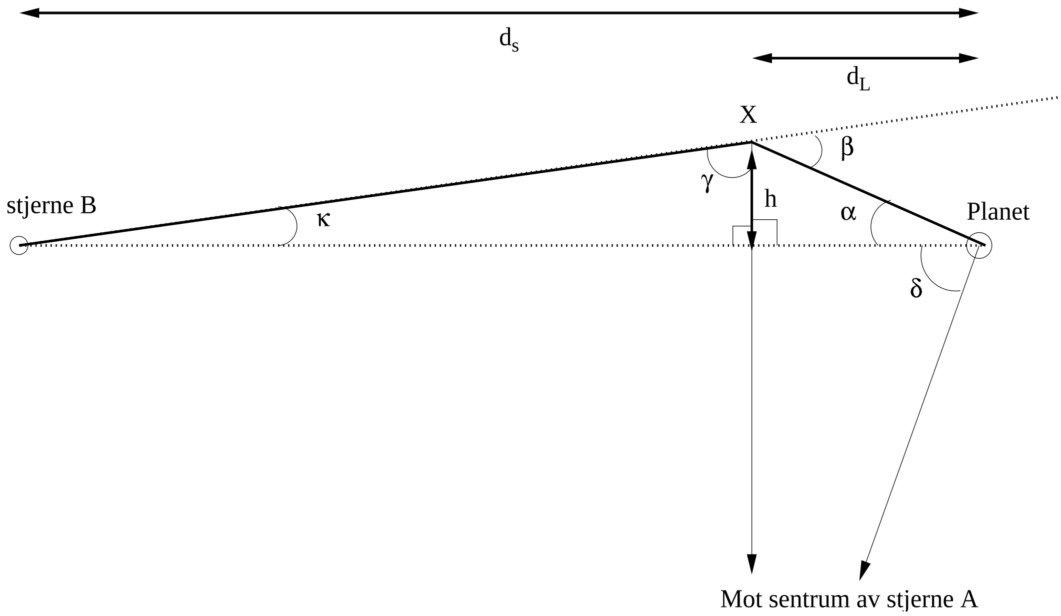
Figur 2: For oppgave 1: De små punktene er bakrunnsstjerner, det store punktet merket B er stjerne B. Helt til venstre i hvert bilde ser vi stjerne A formørket, de grå løkkene som stikker ut fra overflaten er deler av koronaen (ytre atmosfæren) til stjerne A som er synlige ved formørkelsen. Bildet over er ditt, bildet under er det som er tatt fra vennen din 3000 km unna.



Figur 3: For oppgave 1:Samme bilde (sett fra deg) som i figur 2, men tatt på en annen tid av året når stjerne A ikke var i nærheten.



Figur 4: For oppgave 1: (NB! Figuren er ikke skalert riktig!) Gravitasjonslinsing, den prikkete linjen er veien som lyset hadde tatt hvis ikke stjerne A hadde vært der, den heltrukne linjen viser hvordan lyset blitt bøyd og kommer frem til deg slik at du ser stjernen.



Figur 5: For oppgave 1:(NB! Figuren er ikke skalert riktig!) Gravitasjonslinsing, samme som figur 4 men mer detaljert: Vi antar nå at all lysavbøyningen skjer i et punkt (merket X på figuren) som er det punktet hvor lysstrålen er nærmest stjerne A. De to pilene nederst på figuren går begge rett inn mot sentrum av stjerne A. Den prikkede horisontale linjen er fortsatt linjen som lyset hadde gått hvis ikke stjerne A hadde vært der. Avstandene d_L og d_S, dvs. avstanden mellom observatør og linsa, og mellom observatør og kilden, er markert øverst. NB! Stjerne A har ikke blitt tegnet inn i figuren for å unngå for mange forvirrende linjer, men ved å sammenlikne med figur 4 ser du hvor den skulle ha ligget.

Oppgave 2

1. Vi skal nå beregne gasstrykket inne i en stjerne ved å lage en datasimulering av partiklene i gassen og måle trykket på en imaginær vegg inne i stjerna. Skisser hvordan du vil gå frem for å lage et dataprogram som simulerer gasspartikler inne i stjerna og hvordan du kan bruke disse simulerte partiklene til å finne gasstrykket i stjerna (anta ideel gass og ikke-relativistiske partikler). Forklar prinsippet du bruker og skriv en liten kode (kan være psuedo-kode, dvs. kode som ikke nødvendigvis følger et spesielt programmeringsspråk, men som viser hvordan du definerer arrayer, hvor du bruker for-løkker osv.) som beregener trykket ved å lage en imaginær liten boks inne i stjerna og se på trykket som partiklene i boksen utøver på veggene i boksen. Legg spesielt vekt på å forklare:

   (a) Hvordan simulerer du posisjonen til partiklene i boksen?

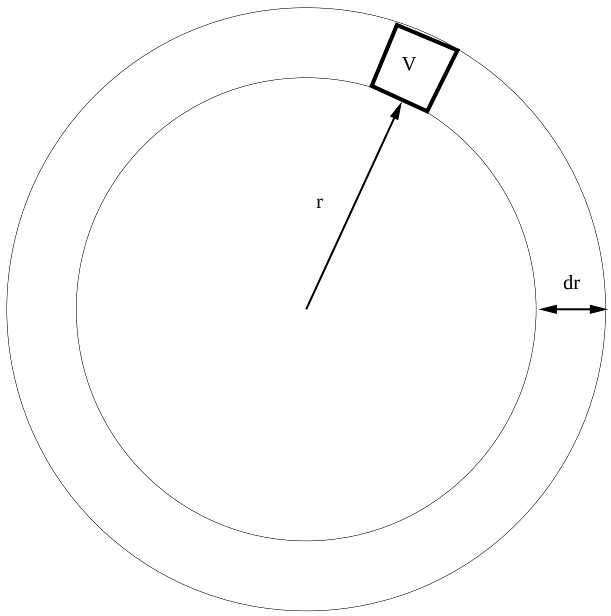
   (b) Hvordan simulerer du hastigheten til partiklene i boksen? (trenger her ikke matematiske detaljer, men må vite hvilken likning som brukes)

   (c) Hvordan går du nå frem for å bruke de simulerte partiklene til å finne trykket? (anta elastiske støt) (**hint** Ta utgangspunkt i de partiklene som treffer veggen i løpet av et kort tidsrom Δt, og sum opp bidraget til trykket fra hvert av partiklene i dette tidsrommet.)

2. Vi skal nå kikke nærmere på det som i kosmologien kalles Olbers' paradoks (NB! Du trenger ikke å bruke kosmologi for å løse oppgaven, det dreier seg kun om stråling) Du vil i oppgaven selv finne ut hva paradokset går ut på. Du skal anta at universet er uendelig stort og at det er en homogen fordeling av stjerner overalt i universet. Det er N stjerner per volum V av universet, så det er en konstant tettheten $n = N/V$ av stjerner i universet. Vi skal anta at de midlere egenskapene til stjernene i universet er som sola, dvs. vi antar at alle stjerner i universet er som sola med luminositet $L_\odot$ og radius $R_\odot$. Alle disse antakelsene er rimelig fornuftige for å kunne få rimelige tall i beregningen vi nå skal gjøre. Vi skal nå finne hvor stor total fluks F_{tot} vi mottar fra alle stjernene i universet fra alle himmelretninger (også de som vi ikke ser direkte, lyset vil jo likevel komme frem). (NB! Hver deloppgave i denne oppgaven er svært kort, aldri mer enn omtrent en linje med regning)

   (a) Se på et kuleskall med tykkelse dr i avstand r fra oss. Forklar at den totale strålingsfluksen f som vi mottar fra alle stjernene i et lite volumelement V i avstand r fra oss (se figur 6) er gitt ved

   $$f = \frac{nL_\odot}{4\pi r^2}$$



Figur 6: Et skall fylt med stjerner (stjernetetthet n) med tykkelse dr i avstand r fra oss. Vi ser på strålingen som kommer fra et lite volum V

(b) Integrer opp dette over hele universet og vis at den totale fluksen som vi mottar fra alle stjernene i universet (integrert over bidraget fra alle retninger) er gitt ved

$$F_{\mathrm{tot}} = \int_0^\infty nL_\odot dr \rightarrow \infty$$

(c) Med denne modellen så skulle strålingen som vi mottar vært uendelig stor hvis vi summerer opp bidraget fra alle stjernene i universet. Dette er Olbers' paradoks. Men vi har gjort en feil: I en gitt retning vil du kun motta stråling fra en stjerne, nemlig den nærmeste i den gitte retningen: grunnen er at denne stjernen da vil skygge for alle andre som ligger bak og vi kan derfor ikke integrere opp bidraget over alle stjernene som ligger bak slik som vi gjorde. Vi må derfor kun integrere opp ut til en radius r_{max} som er slik at hele arealet av himmelkulen er dekket med stjerner når vi har summert opp bidraget fra alle stjerner frem til r_{max}. Vi vil da ikke lenger se stjerner som ligger lenger bak siden alle stjerner innenfor r_{max} vil skygge for all strålingen fra stjerner lenger ut. Vis at en enkel stjerne i avstand r vil dekke et en andel av overflatearealet til himmelkulen gitt ved

$$\Delta\Omega = \frac{R_\odot^2}{4r^2}$$

(d) Bruk dette til å vise at

$$r_{\max} = \frac{1}{n\pi R_\odot^2}$$

(**hint:** begynn med å finne den andelen av overflatearealet til himmelkulen som dekkes av alle stjernene i et gitt volum.)

(e) Vis at den totale (integrert over alle retninger) fluksen som du skulle motta fra alle stjernene i universet er gitt ved

$$F_{\mathrm{tot}} = \frac{L_\odot}{\pi R_\odot^2}$$

og angi hvor stor andel dette er av strålingsfluksen ved soloverflaten.

(f) Hvorfor blir vi ikke alle stekt? Hvordan kan himmelen egentlig være mørk om natten? Hvilken alvorlig feil har vi gjort i resonnementet vårt? Her kan du godt tenkte litt kosmologisk (ingen regning nødvendig) **hint:** Er det noen grense på hvor stor $r_{\max}$ kan være?

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_n = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_{max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

$$P^2 = a^3$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

$$\ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

$$p = h^2/m$$

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{(ellipse)}$$

$$p = a(e^2 - 1) \quad \text{(hyperbel)}$$

$$p = 1/2a \quad \text{(parabel)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = M\vec{R}$$

$$m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\rho(r) = \frac{v^2(r)}{4\pi G r^2}$$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + (r/R)^2}$$

$$< K >= -\frac{1}{2} < U >$$

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

$$I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dA dt d\nu}$$

$$L = \frac{dE}{dt}$$

$$F = \frac{dE}{dA dt}$$

$$F = \sigma T^4$$

$$n(v)dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$$

$$\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT \ln 2}{m}}$$

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right)$$

$$U - B = M_U - M_B = m_U - m_B$$

$$B - V = M_B - M_V = m_B - m_V$$

$$M_V = -2.81 \log_{10} P_d - 1.43$$

$$M_V = -3.53 \log_{10} P_d - 2.13 + 2.13(B - V)$$

$$v = H_0 d_p$$

$$\tau(\lambda) = \int_0^r dr' n(r')\sigma(\lambda, r')$$

$$m(\lambda) = M(\lambda) + 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right) + 1.086\tau(\lambda)$$

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mathrm{rel}} & -v_{\mathrm{rel}}\gamma_{\mathrm{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\mathrm{rel}}\gamma_{\mathrm{rel}} & \gamma_{\mathrm{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_\mu = \gamma(1, \vec{v})$$

$$< E_K >= \frac{3}{2}kT$$

$$N = \frac{M}{\mu m_H}$$

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}.$$

$$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr}$$

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$$

$$P_r = \frac{1}{3}aT^4$$

$$\rho_r = aT^4$$

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2\Delta\phi^2$$

$$\frac{M_{\mathrm{m}}}{M_{\mathrm{kg}}} = \frac{G}{c^2}$$

$$\Delta t_{\mathrm{shell}} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\Delta t$$

$$\Delta r_{\mathrm{shell}} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}$$

$$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \Delta\tau$$

$$\Delta\phi = \frac{L/m}{r^2} \Delta\tau$$

$$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \Delta\tau$$

$$\frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$$

$$\frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]}$$

$$\Delta r = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}} \Delta t$$

$$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t$$

$$b = \frac{L}{p}$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$b_{\text{crit}} = 3\sqrt{3}M$$

$$\Delta\phi = \frac{4M}{R}$$

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4M(d_{\text{source}} - d_{\text{lens}})}{d_{\text{lens}} d_{\text{source}}}}$$

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_A Z_B e^2}{r}$$

$$r_{AB} = \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2} \frac{n_A n_B}{\sqrt{\mu\pi}} \int_0^E dE e^{-E/kt} \sigma(E)$$

$$r_{AB} \propto X_A X_B \rho^{\alpha'} T^\beta$$

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 X_A X_B \rho^\alpha T^\beta$$

$$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4$$

$$\varepsilon_{0,pp} = 1.08 \times 10^{-12} \text{Wm}^3/\text{kg}^2$$

$$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20}$$

$$\varepsilon_{0,CNO} = 8.24 \times 10^{-31}\mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha}\rho^2 X_{He}^3 T_8^{41}$$

$$\varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86 \times 10^{-18}\mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$$

$$L \propto M^4$$

$$t \propto 1/M^3$$

$$M \propto T_{\mathrm{eff}}^2$$

$$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty p\, v\, n(p)\, dp$$

$$n(\vec{p}) = n\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{3/2} e^{-p^2/(2mkT)}$$

$$n(E) = \frac{g(E)}{e^{(E-E_F)/(kT)}+1}$$

$$n(\vec{p}) = \frac{1}{e^{(p^2-p_F^2)/(2mkT)}+1}\frac{2}{h^3}$$

$$E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$$

$$P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_e}n_e^{5/3}$$

$$P = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3}$$

$$< E_K >= \frac{3}{5}E_F$$

$$R_{\mathrm{WD}} \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{20m_eG}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^{5/3} M^{-1/3}$$

$$M_{\mathrm{Ch}} \approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^2 \approx 1.4M_\odot$$

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - R^2(t)\left[\frac{\Delta r^2}{1-kr^2} + r^2\Delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\Delta\phi^2\right]$$

$$H(t) = \frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}$$

$$z = \frac{R_0}{R(t)} - 1$$

$$\dot{R}^2(t) - \frac{8}{3}\pi G\rho(t)R^2(t) - \frac{\Lambda}{3}R(t)^2 = -k$$

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4}{3}\pi G(\rho(t) + 3P(t))R(t) + \frac{\Lambda}{3}R(t)$$

$$\rho_C(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_C(t)}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho R^{3(1+w)}) = 0$$

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^{3(1+w)}$$

$$R(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

$$q(t) = -\frac{1}{R(t)H^2(t)}\frac{d^2R(t)}{dt^2}$$

$$q(t) = \frac{1}{2}\Omega(t)$$

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

$$d_L = r(1+z)R_0$$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$P_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{(m_n - m_p)/kT}$$

$$\frac{n(t_1)}{n(t_2)} = e^{-\ln 2(t_1 - t_2)/\tau}$$

$$d_L = \frac{1}{H_0 q_0^2}[q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2zq_0} - 1)]$$

$$v = H_0 d_p$$