

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

“Midtveis”-eksamen i AST2000, 11. oktober 2019, 09.00 – 12.00

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 7 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling finner du bakerst

Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side enn selve oppgaven

Hver av de 8 (del)oppgavene i eksamenssettet teller likt.

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevner hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene utledes.

Spørsmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

- **OPPGAVE 1:** Vi skal se på temperaturstatistikk for Kuala Lumpur som har gjennomsnittstemperatur på omtrent 29 grader (Celcius) hele året rundt. Anta at temperaturfluktuationene fra dag til dag er Gaussisk fordelt med standardavvik på 2 grader. Anta at sannsynligheten for at temperaturen er større enn 30 grader er gitt ved p . Finn et uttrykk for den totale sannsynligheten for at temperaturen i Kuala Lumpur i løpet av de neste 4 dager er over 30 grader, og i løpet av de påfølgende 3 dagene er under 30 grader? Anta at temperaturene fra dag til dag er helt uavhengig av hverandre. Beskriv med en kort setning hvilket/hvilke prinsipp(er) du bruker.

• **OPPGAVE 2:**

1. Anta at posisjonsvektoren som peker fra sola til jorda er $\vec{r}$ med lengde r . Vinkelen mellom $\vec{r}$ og store halvakse ved perihel er gitt ved f . Vis at tangensialhastigheten til jorda er gitt ved $v_\theta = r\dot{f}$. Forklar detaljert hvordan du kommer frem til svaret. **Hint:** Det finnes minst to måter å gjøre dette på:
 - (a) Tegn en trekant med en bitteliten vinkel Δf og en bitteliten forflytning Δs . Eller:
 - (b) Finn et uttrykk for $\vec{e}_r$ uttrykt ved $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$. Du kan også anta at du vet at tangensiell enhetsvektor $\vec{e}_\theta = -\sin f \vec{e}_x + \cos f \vec{e}_y$.
2. For hvilke punkter i den elliptiske banen (dvs. for hvilke vinkler f) er hastigheten størst og minst? Bruk en av Keplers lover til å argumentere og vis kort hvordan denne loven gir oss dette resultatet. (evt. hvis du foretrekker kan du fint bruke andre argumenter)
3. Finn et uttrykk for hastigheten til jorda i perihel og i aphel, uttrykt kun ved hjelp av a , e , m_j og $m_\odot$ samt naturkonstanter. **Hint:**
 - Fra utledningen av Keplers 1.lov, så vet vi at

$$p = \frac{h^2}{G(m_j + m_\odot)}$$

der p er konstanten i uttrykket for ellipsen, h er spinn per masse og m_j og $m_\odot$ er jordas og solas masse.

- Spinn per masse er gitt ved

$$h = \left| \frac{\vec{r} \times \vec{p}}{m} \right|$$

- **OPPGAVE 3:** Presisjonen til Dopplermålinger av hastighet er på 1 m/s. Kan en ekstrasolar planet med samme masse som Saturn og samme avstand fra moderstjerna som Saturn, og med en stjerne som har samme masse som sola, bli oppdaget med radiell-hastighetsmetoden? (Hvis svaret ditt bygger på en viktig antakelse, hvilken antakelse er det?)

Hint: Du skal her anta sirkulære planetbaner for å gjøre regningen enklere (dette er ikke antakelsen det spørres om over). Her kan du enten bruke et uttrykk som du utledet i en foregående oppgave, eller, hvis du ikke fikk til den oppgaven, så kan du bruke Keplers 3.lov til å komme frem til det samme uttrykket. Du trenger også et uttrykk fra formelsamlingen bak som kan gi deg hastigheter i forhold til massesenter.

- **OPPGAVE 4:** Anta at de aller svakeste objektene som romteleskopet Hubble (HST) kan observere har tilsynelatende størrelseklasse (appaerent magnitude) 30. Hvor langt unna kan HST se en stjerne med samme luminositet som sola? **Angi svaret i lysår** og forklar hvordan du kommer frem til svaret.

• **OPPGAVE 5:** Her skal vi modellere jordas atmosfære.

1. Finn midlere molekylvekt μ til jordas atmosfære. Anta at den består av 78% nitrogen N_2 (hvert atom har 7 protoner og 7 nøytroner), 21% oksygen O_2 (hvert atom har 8 protoner og 8 nøytroner) og 1% Argon, Ar (18 protoner og 22 nøytroner).
2. Vi skal anta isotherm atmosfære, altså at temperaturen overalt er T . Anta at vi kan se bort ifra endringer i gravitasjonsakselerasjonen g med høyde. Anta videre at atmosfæren er en ideel gass som er i hydrostatisk likevekt. Finn et uttrykk for trykket $P(h)$ som funksjon av høyden h over overflaten. Uttrykket skal inneholde en referansehøyde h_0 samt trykket $P(h_0)$ ved denne referansehøyden, gravitasjonsakselerasjonen g , midlere molekylvekt μ , temperaturen T , samt naturkonstanter.

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s

Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s

Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m²/kg²

Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K

Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$ W/m²K⁴.

Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg

Protonets hvilemasse: $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg

Nøytronets hvilemasse: $m_n = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg

Wiens forskyvningslov: $\lambda_{\max} T = 0.0029$ m K

1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J

Massen til jorda: $M_j = 5.97 \times 10^{24}$ kg

Radien til jorda: $R_j = 6378 \times 10^3$ m

Solmassen: $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg

Solradien: $R_{\odot} = 6.98 \times 10^8$ m.

Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$

Solas absolutte magnitude: $M = 4.83$

Solas luminositet: $L_{\odot} = 3.827 \times 10^{26}$ W

Massen til Saturn: 5.68×10^{26} kg

Middelavstand til Saturn: 1.433×10^{12} m

Temperaturen på solens overflate: 5780 K

Astronomisk enhet: 1 AU = 1.5×10^{11} m

Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc

lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m

parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

$$P^2 = a^3$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

$$\ddot{\vec{r}} + m \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}$$

$$m = G(m_1 + m_2)$$

$$p = h^2/m$$

$$E = \frac{1}{2} \hat{\mu} v^2 - G \frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\hat{\mu} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$E = \frac{G m_1 m_2}{2p} (e^2 - 1)$$

$$p = a(1 - e^2) \quad (\text{ellipse})$$

$$p = a(e^2 - 1) \quad (\text{hyperbel})$$

$$p = 2a \quad (\text{parabel})$$

$$\vec{r}_1^{\text{CM}} = -\frac{\hat{\mu}}{m_1} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2^{\text{CM}} = \frac{\hat{\mu}}{m_2} \vec{r}$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = M \vec{R}$$

$$m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$

$$\frac{m_p}{m_*} = \frac{v_*}{v_p}$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\rho(r) = \frac{v^2(r)}{4\pi Gr^2}$$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1+(r/R)^2}$$

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

$$I(\nu) = \frac{dE}{\cos\theta d\Omega dA dt d\nu}$$

$$L = \frac{dE}{dt}$$

$$F = \frac{dE}{dA dt}$$

$$F = \sigma T^4$$

$$\lambda_{\mathrm{max}}T = 0.0029 \text{ m K}$$

$$\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT\ln 2}{m}}$$

$$m_1-m_2=-2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$m-M=5\log_{10}\left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right)$$

$$<E_K>=\frac{3}{2}kT$$

$$n=\frac{M}{\mu m_H}$$

$$P=\frac{\rho kT}{\mu m_H}$$

$$P(v)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/(2kT)}4\pi v^2$$

$$P(\vec{v})=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/(2kT)}$$

$$n(\vec{p})=\frac{1}{e^{(p^2-p_F^2)/(2mkT)}+1}\frac{2}{h^3}$$

$$n(E) = \frac{g(E)}{e^{(E-E_F)/(kT)} + 1}$$

$$E_F=\frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$$

$$\frac{T}{n_e^{2/3}}<\frac{h^2}{12m_ek}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}$$

$$P=\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_e}n_e^{5/3}$$

$$P=\frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}n_e^{4/3}$$

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{5} E_F$$

$$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2}=-\rho(r)g(r)-\frac{dP(r)}{dr}$$

$$P_r=\frac{1}{3}aT^4$$

$$P=\frac{1}{3}\int_0^\infty p\,v\,n(p)\,dp$$