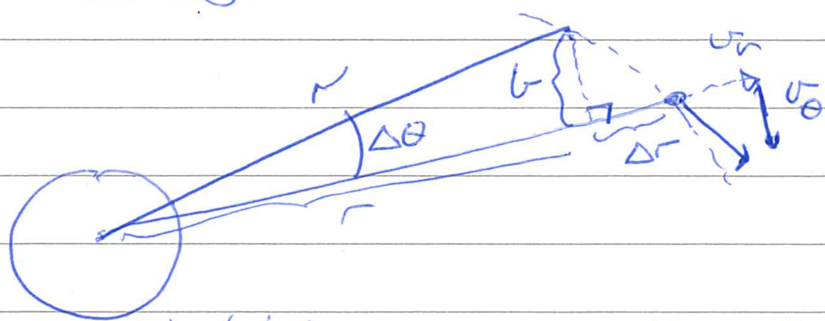
Eksamen i AST2000, 2022

I Kortsvarsoppgaver

1.



Tangensialhastigheten v_θ er gitt ved

$$v_\theta = \frac{b}{\Delta t} = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = \underline{\underline{r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}}}$$

2. Jo nærmere planeten er stjerna, desto større blir tyngdekraften den utøver på den, og desto større blir farta til stjerna i banen rundt massesenteret. Jo høyere farta er, desto større dopplerforskyvning, og dermed desto lettere å oppdage

3 Stefan - Boltzmanns lov

$$F = \sigma T^4$$

utstrålt effekt per areal, konstant, overflatetemperatur

(antar svart stråling)

Luminositeten til ei kuleformet stjerne:

$$L = F \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

der R er stjernas radius.

$$L_{maks} = 6{,}1 \cdot 10^9 \, L_0$$

L_0 opprinnelig luminositet

R_{maks} : radius ved maksimal ekspansjon

Må ha

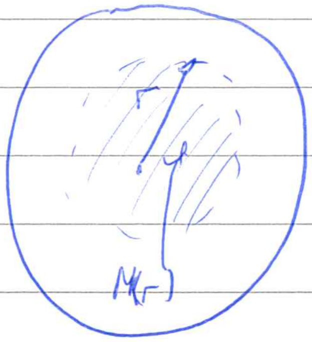
$$L_{maks} = 4\pi R_{maks}^2 \sigma T^4 = 6{,}1 \cdot 10^9 \cdot 4\pi R_0^2 \sigma T^4$$

R_0 opprinnelig radius

$$\Rightarrow \quad R_{maks} = R_0 \sqrt{6{,}1 \cdot 10^9} = R_0 \sqrt{61 \cdot 10^8}$$
$$= \underline{\underline{8 \cdot 10^4 \, R_0}}$$

4. Ligninger for hydrostatisk likevekt:

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G M(r) \rho(r)}{r^2}$$



r = avstand fra sentrum av sfærisk massefordeling

$M(r)$ = masse innenfor avstand r fra sentrum,

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') \, dr'$$

$\rho(r)$ = tetthet i avstand r

$P(r)$ = trykk i avstand r

$\frac{dP}{dr}$ = trykkgradient i avstand r

Det er trykkgradienten dP/dr som må balansere tyngdekraften. Dersom trykket er konstant er $dP/dr = 0$, og atmosfæren kan ikke være i hydrostatisk likevekt

5 Degenerasjonstrykk kommer av PaulIprinsippet: Identiske fermioner (f.eks. elektroner) kan ikke være i samme kvantetilstand. Ved $T=0$ vil klassisk teori si at midlere kinetisk energi og trykk $= 0$, men Pauliprinsippet tilsier at det bare er plass til to elektroner (spinn opp og spinn ned) i tilstander med bevegelsesmengde $p=0$. Resten må ha $p>0$, og jo flere elektroner vi har i systemet, desto høyere bevegelsesmengdetilstander vil være okkupert. Derfor har en gass av fermioner et trykk også ved $T=0$, og dette kalles degenerasjonstrykk.

6. Tidromsavstand = tidromsintervall

$$= \Delta s^2 = \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

Hendelser på samme sted:

$$\Delta s^2 = \Delta t^2,$$

så har blir $\underline{\Delta s = \Delta t = 10 s}$

7. Firevektor:

$$A_\mu' = \underset{\uparrow}{c_{\mu\nu}} A_\nu$$

Lorentztransformasjon

Med $V_\mu = \frac{dx_\mu}{dt}$ blir $\underbrace{\gamma}$ $\frac{dx_\mu}{\gamma}$ er 4-vektor

$$V_\mu' = \frac{dx_\mu'}{dt'} = \frac{c_{\mu\nu} dx_\mu}{dt}$$

γ ↗ tidsdilatasjon

$$= \gamma c_{\mu\nu} V_\nu \neq c_{\mu\nu} V_\nu$$

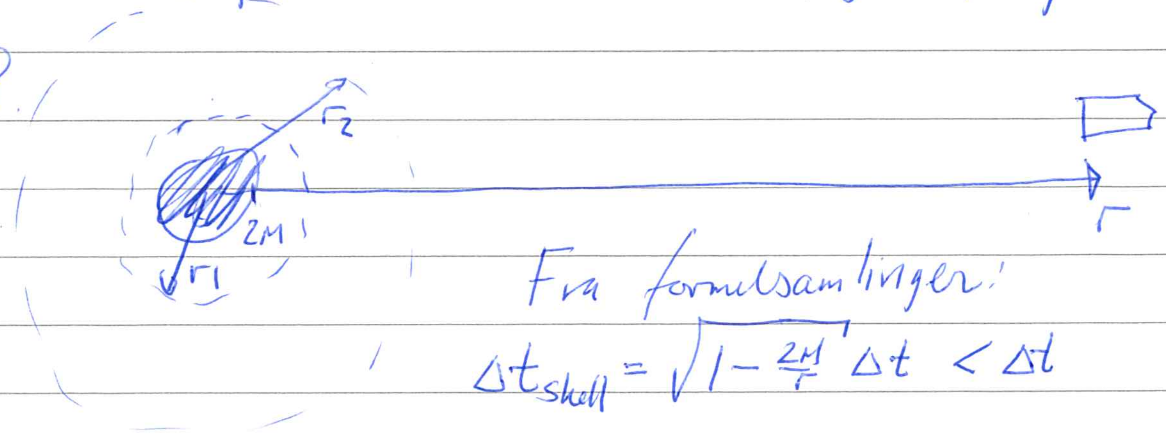
τ = egentid = skalar, så med

$$V_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

får vi $V_\mu' = \frac{dx_\mu'}{d\tau'} = \frac{c_{\mu\nu} dx_\nu}{d\tau} = c_{\mu\nu} V_\nu$

Konklusjon: (2) er den riktige definisjonen

8.



Fra formelsamlinger:

$$\Delta t_{shell} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\, \Delta t < \Delta t$$

der Δt_{shell} = tid på klokke på skall med koordinat r

Δt = tid på klokka til langt-unna-observatør

M = massen til det svarte hullet
(Schwazschildradius = 2M)

Du vil se at skallklokkene går saktere enn din klokke, og derfor at skallobservatørene eldes saktere enn deg. Jo nærmere hendelseshorisonten ved $r = 2M$, desto saktere. Riktig svar er derfor (b).

9. Nei, bare skyer med masse større enn Jeansmassen

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho_0}\right)^{1/2}$$

temperatur; midlere molekylær vekt; H-masse; tetthet

kan kollapse og danne stjerner. Hvis $M < M_J$, er ikke tyngdekreftene sterke nok til at skyen vil kollapse.

10. For å fusjonere, må protonene tunnellere gjennom coulombbarrieren. Tunnelleringsraten blir større ved høy temperatur (høyere midlere kinetisk energi for protonene + hyppigere kollisjoner) og høy tetthet (høyere kollisjonsrate)

11. Levetid på hovedserien (som er mesteparten av det totale livet til ei stjerne)

$$t_{HS} \propto \frac{1}{M^3}$$

Normalisert til sola:

$$t_{HS} = 10^{10} \text{ år} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^3$$

$$M = 2M_\odot \Rightarrow t_{HS} = 10^{10} \text{ år} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \approx \underline{10^9 \text{ år}}$$

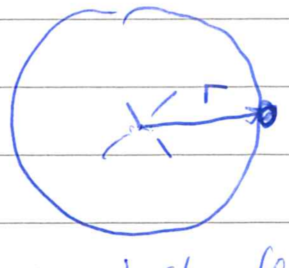
12. Nøytronstjerne: Rest etter kjernekollaps-supernova, ball av nøytroner som holdes oppe av degenerasjonstrykket til nøytronene.

Oppgave 2

1 a) Dette uttrykket er allerede skrevet ned og forklart i kortsvarsoppgave 3:

$$\underline{\underline{L = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2}}$$

b)



Isotrop stråling, energien spres jevnt utover et kuleskall med radius r

$$\Rightarrow \text{mottatt strålingsfluks} = F = \frac{L}{4\pi r^2} = \underline{\underline{\sigma T^4 \left(\frac{R}{r}\right)^2}}$$

c) Mottatt strålingsenergi per tid

$$= \frac{dE}{dt} = F \pi R_p^2 = \sigma T^4 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \pi R_p^2$$

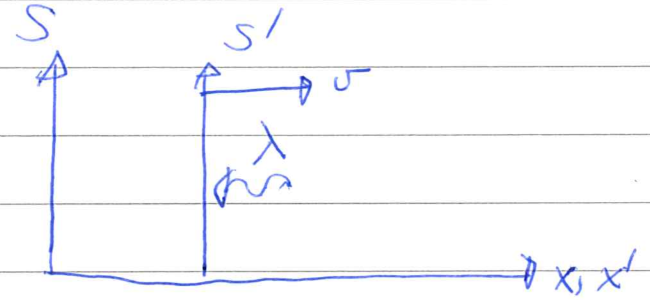
$$= \pi \sigma T^4 \left(\frac{R R_p}{r}\right)^2$$

d) Planeten et svart legeme, stråler ut all absorbert energi

$$\Rightarrow \quad L_p = 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4 = \frac{dE}{dt} = \pi \sigma T^4 \left(\frac{R R_p}{r}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T_p = T\left(\frac{R}{2r}\right)^{1/2}}}$$

2. a)



λ = bølgelengde i S' OBS!
λ' = bølgelengde i S

relativistisk bevegelsesmengde

4-impuls: $P_\mu = (E, \vec{p})$

Fotonet beveger seg mot oss langs x- (og x'-) aksen

Har $E = \sqrt{p^2 - m^2}$ Foton: $m = 0$

$$\Rightarrow \quad E = p = \frac{h}{\lambda} \quad (c = 1)$$

$$\Rightarrow \quad P_\mu = \left(\frac{h}{\lambda'}, -\frac{h}{\lambda'}, 0, 0\right) \quad (\text{i } S)$$

$$P'_\mu = \left(\frac{h}{\lambda}, -\frac{h}{\lambda}, 0, 0\right) \quad (\text{i } S')$$

b) Transformerer fra S' til S:
Sett fra S', beveger S seg med fart lik $-v$ langs x'-aksen:

$$P_\mu = \begin{pmatrix} \cancel{v\gamma}\,\gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_\mu$$

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{\lambda'} \\ -\frac{h}{\lambda'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{h}{\lambda} \\ -\frac{h}{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{h}{\lambda'} = \gamma \frac{h}{\lambda} - v\gamma \frac{h}{\lambda} \\ -\frac{h}{\lambda'} = v\gamma \frac{h}{\lambda} - \gamma \frac{h}{\lambda} \end{array}\right\} \text{samme ligning}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda'} = \frac{\gamma}{\lambda}(1-v) = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1-v)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$$

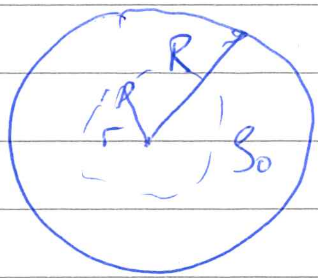
$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}}}$$

evt

$$\underline{\underline{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda'-\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1}}$$

3.

a)



Konstant tetthet, så massen innenfor en avstand r blir

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3, \quad r \leq R$$

$$(M(R) = M_0)$$

b) Ideell gass: Tilstandslikning

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H} = \frac{\rho_0 k T}{\mu m_H}$$

$\frac{\rho_0 k}{\mu m_H} \longrightarrow$ konstant

μ: midlere molekylær vekt

T: temperatur

m_H: hydrogen-massen ($\simeq$ protonmassen)

$\Rightarrow \quad T = T(r)$ for at $dP/dr \neq 0$

Hydrostatisk likevekt (forklart i kortsvarsoppgave 4)

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G M(r)\rho(r)}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left[\frac{\rho_0 k}{\mu m_H} T\right] = -\frac{G}{r^2}\cdot\frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \cdot \rho_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{\mu m_H}{k}\cdot\frac{4\pi}{3} G \rho_0 r$$

c) Integrerer:

$$\int_{T(0)}^{T(R)} dT = -\frac{4\pi}{3} G \rho_0 \frac{\mu m_H}{k} \int_0^R r\,dr$$

$T(R)$ = overflatetemp.

$T(0) = T_c$

$$\Rightarrow \quad T(R) - T_c = -\frac{2\pi}{3} G \rho_0 R^2 \frac{\mu m_H}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T_c = T(R) + \frac{2\pi G \rho_0}{3} R^2 \frac{\mu m_H}{k}}}$$

d) Kun protoner $\Rightarrow \mu = 1$

Konstant tetthet, så

$$\rho_0 = \frac{3M_\odot}{4\pi R^3} \quad \leftarrow \text{solmassen}$$

$$\Rightarrow \quad T_c = T(R) + \frac{2\pi G}{3} \cdot \frac{3M_\odot}{4\pi R^3} R^2 \frac{m_H}{k}$$

$$= T(R) \cdot \frac{1}{2} \frac{GM_\odot}{R} \cdot \frac{m_H}{k}$$

$$= 5780\,K + \frac{1}{4} \cdot \frac{2GM_\odot}{c^2 R} \cdot \frac{m_H c^2}{k}$$

$r_{S,\odot} = 3\,km$

$$\simeq 5780\,K \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3 \cdot 10^3 m}{7 \cdot 10^8 m} \cdot \frac{10^9 eV}{10^{-4} eV/K}$$

$$\simeq 5780\,K + 10^{-6} \cdot 10^{13}\,K$$

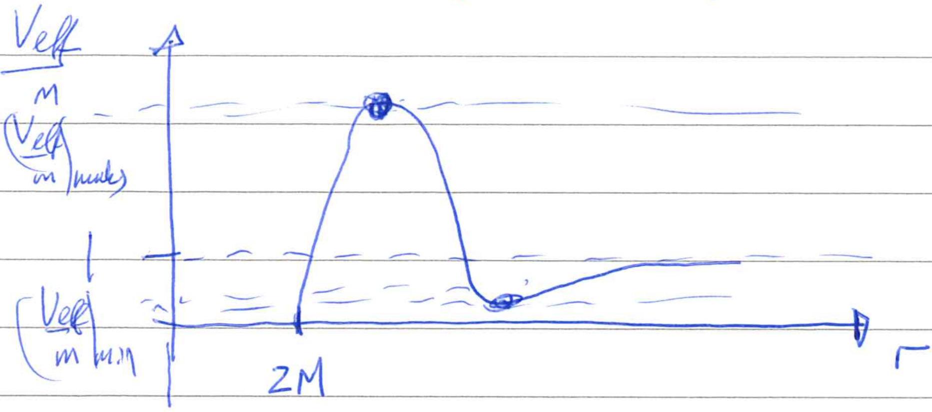
$$\simeq \underline{10^7\,K}$$

Merk at solmassen bare er gitt med ett gjeldende siffer

$\Rightarrow$ Bare ett gjeldende siffer i svaret (og overflatetemp. treng ikke.)

4. a) Fra formelsamlingen:

$$\left[\frac{V_{eff}(r)}{m}\right]^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right)$$



b) (V_{eff}/m) inngår i likningen

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(\frac{V_{eff}(r)}{m}\right)^2$$

Siden $(dr/dt)^2 \geq 0$, må vi ha

$$\left(\frac{E}{m}\right) \geq \left(\frac{V_{eff}(r)}{m}\right)^2$$

Partikkelen kan ikke bevege seg inn i områder der $\left(\frac{E}{m}\right)^2 < \left(\frac{V_{eff}}{m}\right)^2$

Hvis $\left(\frac{E}{m}\right)^2 = \left(\frac{V_{eff}}{m}\right)_{min/maks}$,

er bare én r-verdi mulig. Partikkelen er imidlertid ikke i ro (hvis $L/m > 0$), den beveger seg i ϕ-retningen. Vinkelbevegelse med konstant r ⇒ sirkel.

c) Finner først r-verdiene som gir lokale ekstrema:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{V_{eff}}{m}\right)^2 = \frac{d}{dr}\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{2M(L/m)^2}{r^3}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2M}{r^2} - \frac{2(L/m)^2}{r^3} + \frac{6M(L/m)^2}{r^4} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 2Mr^2 - 2\left(\frac{L}{m}\right)^2 r + 6M\left(\frac{L}{m}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow Mr^2 - \left(\frac{L}{m}\right)^2 r + 3M\left(\frac{L}{m}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{(L/m)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{L}{m}\right)^4 - 12M^2\left(\frac{L}{m}\right)^2}}{2M}$$

− gir maks, ustabil sirkelbane
\+ gir min., stabil sirkelbane

Dette trenger man ikke å vise

Må ha r reell

$$\Rightarrow \left(\frac{L}{m}\right)^4 \geq 12M^2\left(\frac{L}{m}\right)^2$$

Minste r ved likhetstegn

$$\Rightarrow \left(\frac{L}{m}\right)^2 = 12M^2$$

som gir $r = \frac{12M^2}{2M} = \underline{\underline{6M}}$