# Total energi til et tolegeme-system sett fra massesenteret

Berg, S. and Torsheim, M.

September 25, 2023

## 1 Introduksjon

Vi ønsker å finne et uttrykk for den totale energien (potensiell energi og kinetisk energi) i et koordinatsystem der massesenteret til tolegeme-systemet ligger i origo. Ved å gjøre det omgjøres problemet til et enkeltlegeme-problem.

## 2 Fremgangsmetode

Vi begynner med å introdusere en ny definisjon. Den reduserte massen $\hat{\mu}$ er gitt ved følgende:

$$\hat{\mu} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Her er $m_1$ og $m_2$ massene til de to legemene som inngår i problemet. Videre har vi at posisjonene til de to legemene kan beskrives med posisjonsvektorene $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$. Da kan vi definere den relative posisjonen $\vec{r}$ til å være

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Tilsvarende kan vi finne den relative hastigheten ved

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2$$

Videre kjenner vi følgende uttrykk for energi i et tyngdefelt:

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

Herfra er trikset å forsøke å uttrykke $m_1 m_2$ ved hjelp av $\hat{\mu}$. Det kan man gjøre på følgende måte:

$$m_1 m_2 = \hat{\mu} M$$

Her er $M$ den totale massen til systemet $(m_1 + m_2)$. Da har vi at

$$U = -\gamma \frac{M\hat{\mu}}{r}$$

Videre skal vi se på den kinetiske energien. Her kan vi begynne med å definere en posisjonsvektor for massesenteret i systemet. Fra massesentersetningen har vi at massesenteret er gitt ved

$$\frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{\sum_i m_i}$$

Fra den finner vi massesenteret gitt ved

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{M}$$

Fra denne kan vi finne posisjonsvektorene til de to legemene gitt ved den relative posisjonen og posisjonen til massesenteret. Gjør vi det får vi

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}$$

og

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

Videre har vi at den kinetiske energien er gitt ved

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1 \dot{r}_1^2 + m_2 \dot{r}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1\left[\dot{R} + \frac{m_2}{M}\dot{r}\right]^2 + m_2\left[\dot{R} - \frac{m_1}{M}\dot{r}\right]^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(M\dot{R}^2 + \frac{m_1 m_2}{M}\dot{r}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\hat{\mu}\dot{r}^2 \end{aligned}$$

Dersom vi velger et referansesystem der massesenteret står stille ser vi at det første leddet faller bort og vi står igjen med

$$T = \frac{1}{2}\hat{\mu}\dot{r}^2 = \frac{1}{2}\hat{\mu}v^2$$

# 3 Konklusjon

Da gjenstår det bare å summere den kinetiske og potensielle energien for å finne den totale energien. Vi får

$$E = T + U = \frac{1}{2}\hat{\mu}v^2 - \gamma\frac{M\hat{\mu}}{r}$$