

Bevis av Trilaterasjon til posisjonering av rommskip

Simon Berg, Marius Torsheim

Oktober 2023

Introduksjon

Trilateration er en måte å finne den relative posisjonen av et objekt ved å måle dens avstand fra kjente punkter. I dette tilfelle, skal vi finne posisjonen til et romskip, ved bruk av en radar som gir nøyaktig avstand til legemene i systemet.

Problem

Gitt tre punkter i planet, $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, og $p_3 = (x_3, y_3)$, og avstanden r_1 , r_2 , og r_3 fra et ukjent punkt (x, y) til p_1 , p_2 , og p_3 hhv..

Trilateration' ligninger

Avstanden fra de ukjente punktene til de kjente punktene er gitt av ligningen for en sirkel, med midtpunkt i det kjente punkt:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2,$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2,$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r_3^2.$$

Utledning

Man kan løse dette systemet av ligninger ved substitusjon eller eliminasjon. For enkelheten, bruker vi de to første ligningene for å eliminere x og y , og øæser for disse variablene

Først stokker vi om på ligningene:

$$x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2 = r_1^2,$$

$$x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 = r_2^2.$$

Substrasjon, ved den andre ligningen fra den første:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2.$$

Videre:

$$\begin{aligned} A &= 2(x_2 - x_1), \\ B &= 2(y_2 - y_1), \\ C &= r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2. \end{aligned}$$

Så ligningen blir:

$$Ax + By = C.$$

Ved å gjenta denne prosessen for den andre of tredje ligningen, får vi en ligning på formen:

$$Dx + Ey = F.$$

Vi kan nå løse det lineære systemet:

$$\begin{aligned} Ax + By &= C, \\ Dx + Ey &= F. \end{aligned}$$

Ved Cramers regel:

$$\begin{aligned} x &= \frac{CE - BF}{EA - BD}, \\ y &= \frac{AF - CD}{BD - AE}. \end{aligned}$$

Konklusjon

Koordinatene (x, y) for det ukjente punktet (raketten) kan finnes ved bruk av trilaterasjon ved å løse systemet av lineære ligninger, utledet fra avstandene til kjente punkter (solen og planetene).