Utledning av atmosfæriske tillstander

Berg, S. & Torsheim, M.

November 18, 2023

1 Introduksjon

Dette er et kort dokument om hvor likningene vi bruker i del 6 oppgave c er utledet fra

2 Utledning av likningene

2.1 Tempratur

2.1.1 Adabatiske gasser

For adiabatiske gasser har vi formelen

$$P^{1-\gamma}T^{\gamma} = C \tag{1}$$

For isoterme gasser

$$T = K \tag{2}$$

I både (1) og (2) er C og K konstanter

Ettersom både P og T er avhengige av r kan vi finne endreingene i de i henhold til r ved å derivere likningen med r

$$(1-\gamma)\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma}}\frac{dP}{dr} + P^{1-\gamma}T^{1-\gamma}\gamma\frac{dT}{dr} = 0 \tag{3}$$

Ved å skrive om ligningen får man:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{P(r)}{T(r)}\frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{dT}{dr} \tag{4}$$

$$P = \frac{\rho(r)kT(r)}{\mu m_H} \implies \rho(r) = \frac{P(r)\mu m_H}{kT(r)} \tag{5}$$

ligningen for hydrostatisk likevekt er gitt ved

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r) \tag{6}$$

Selv om oppgaven nevnte at man kan sette $g(r) = g$ så vil vi løse numerisk og det blir da lett å bruke $g(r)$ Sett så (5) in i (6). Vi får da

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{P(r)\mu m_H}{kT(r)} g(r) \tag{7}$$

Ettersom vi nå har to utrykk for $\frac{dP}{dr}$ setter vi de lik hverandre

$$\frac{P(r)}{T(r)} \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{dT}{dr} = \frac{dP}{dr} = -\frac{P(r)\mu m_H}{kT(r)} g(r) \tag{8}$$

Som vi kan skrive om

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{\mu m_H g(r)}{k} \tag{9}$$

Nå har vi en ligning for temperaturendringer i forhold til høyde

2.1.2 Isoterme gasser

Definisjonen på en isotermisk prosess er: "En isotermisk prosess er en type termodynamisk prosess hvor temperaturen T i et system er konstant: $\Delta T = 0$" (wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Isothermal$_{process}$)

2.2 Tetthet

2.2.1 Adabatiske gasser

For å finne en ligning for endring i tetthet per endring i høyde $\frac{d\rho}{dr}$ for Adabatiske gasser

Vi deriverer ligningen for ideell gass ((5))

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho(r)kT(r)}{\mu m_h}\right) = -\rho(r)g(r) \tag{10}$$

Vi flytter over konstantene og deriverer igjen med bruk av produktregelen

$$\frac{d\rho(r)}{dr} T(r) + \rho(r)\frac{dT(r)}{dr} = \frac{\rho(r)g(r)\mu m_H}{k} \tag{11}$$

Etter vi stokker om får vi

$$\frac{d\rho(r)}{dr} = -\frac{\rho(r)}{T(r)} \frac{dT(r)}{dr} - \frac{\rho(r)}{T(r)} \frac{g(r)\mu m_H}{k} \tag{12}$$

Igjen ettersom vi skal løse numerisk kan vi bruke denne likningen

2.2.2 Isoterme gasser

Vi bruker hva vi fikk for (12), nå med betingelsen $\frac{dT}{dr} = 0$ da får vi

$$-\frac{\rho(r)}{T(r)}\frac{dT(r)}{dr} = 0 \tag{13}$$

og $T(r) = T_0/2$

$$\frac{d\rho(r)}{dr} = -\frac{2\rho(r)}{T_0}\frac{g(r)\mu m_H}{k} \tag{14}$$

2.3 Videre definisjoner

$$g(r) = G\frac{M}{(r_{radius} + r)^2} \tag{15}$$

Hvor G er den gravitasjonskonstant, M er massen til planeten r_{radius} er planetens radius og r er høyden over overflaten Om vi hadde løst oppgaven analytisk ville vi brukt $g(r) = g$