UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST2000, 9. desember 2025, 09.00 – 13.00

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 13 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling for kurset finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side enn selve oppgaven

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppgitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

Oppgave 1 og oppgave 2 teller hver 50% av evalueringen. Deloppgavene innen hver av disse to oppgavene teller likt innenfor den gitte oppgaven. (8 deloppgaver for oppgave 1, 5 deloppgaver for oppgave 2: 2.1a, 2.1b, 2.2a, 2.2b, 2.3). **Merk at det finnes en bonusoppgave, oppgave 3:** Du kan få 100 poeng (full pott) på eksamen uten denne, men får du til denne bruker vi poengene til å fylle ut med poeng der du ellers mistet poeng enten ved feil/ufullstendig svar eller ubesvarte oppgaver.

Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

Oppgave 1: Kortsvarsoppgaver (8 deloppgaver).

I de fleste av disse oppgavene får du **kun poeng på at begrunnelsen** viser at du forstår resonnementet. **Selve svaret gir ingen poeng selv om det er riktig.**

Oppgave 2 (5 deloppgaver)

Oppgave 2.1 NB!NB!!!!!!!!!!!! Dette er et EKSEMPEL, det blir andre oppgaver på faktisk eksamen, men ideen og strukturen/formen på oppgavene kommer til å være veldig lik!!!!!!!!!!!!!!!!

Dette er oppgaven som også kan gi deg en boost for poengsummen som du fikk på innleveringer. (dette gjøres kun dersom det gir deg en fordel)

a) Den relevante delen av oppgaveteksten for den første innleveringsoppgaven er vedlagt. Det er også den delen av sjekklista som går på metode. Skriv opp punktvis hva du bør skrive om i metode-delen for en vitenskaplig artikkel for den delen av oppgaven som går på simulering av partiklene i boksen og beregning av denne ene boksens akselrasjon. Du trenger ikke å skrive en full metodedel (men det er helt greit om du gjør det), du får full pott så lenge du punktvis lister opp alle temaer/detaljer/formler/evt. viktige illustrasjoner som bør være med i forklaringen av metoden (krever ikke fullstendige setninger, men du må få med det som kreves fra sjekklista). Få med så mange metodepunkter (deler av fremgangsmåten, nødvendige formler med forklaring, figurer, argumenter etc.) som mulig. Minst 6 forskjellige punkter kreves for full pott på oppgaven.

b) Den relevante delen av oppgaveteksten for den tredje innleveringsoppgaven er vedlagt. I Figur 1 ser du deler av en kodesnutt for denne oppgaven. Du skal skrive **den delen av koden som estimerer parameterene ved minste kvadraters metode)** ved å fylle ut de tomme linjene angitt i kodesnutten ved (A), (B), (C) og (D). Merk hver kodedelene dine med (A), (B), (C) og (D). MERK at det skal være kode, nøyaktig slik som du hadde skrevet det i en py-fil med alle nødvendige paranteser, insteg, indekser, etc. **Det holder å kun skrive kode, ingen kommentarer eller forklaring er nødvendig.**

Figur 1

```
#avleser temp_min, temp_max, p_min, p_max og t0_min og t0_max
temp_min = tall
temp_max = tall
p_min = tall
p_max = tall
t0_min = tall
t0_max = tall
n_temp = 30 #antall prøve-verdier
n_p = 30 #antall prøve-verdier
n_t0 = 30  #antall prøve-verdier

# leser inn data for lambda og lager hastighetsarray
vr_data = lambdas/lambda0*c
times = array med tidspunktene

# trekker fra egenfart
vr_data -= peculiar_vel

# Her begynner ditt bidrag:

# (A) her trenger du kanskje å lage noen arrayer?

# (B) hvilke for-løkker kan være relevante? Eller kanskje du ikke bruker for-løkker men gjør det på en annen måte?

# (C) her beregner du minste kvadrat

# (D) Her finner du beste parametre for t0, P og v_r
```

Oppgave 2.2

a) Første deloppgave

b) Andre deloppgave

Oppgave 2.3

Oppgave 3

Dette er en bonusoppgave. Du kan få 100 poeng (full pott) på eksamen uten denne, men får du til denne bruker vi poengene til å fylle ut med poeng der du ellers mistet poeng enten ved feil/ufullstendig svar eller ubesvarte oppgaver.

Oppgave 1A6 (du skal ikke løse denne oppgaven, den er her kun som hjelp for oppgave 2.1) NB! EKSEMPEL, en annen innleveringsoppgave kan komme her på den faktiske eksamen!!!!!!!!!

The only information you need here is the mass and radius of your home planet. In this exercise you will create a rocket engine to make a satellite escape the gravitational potential of your home planet. Your task is to create a simplified rocket engine which can accelerate a satellite with the weight of 1000 kg (plus the weight of **the fuel which we will ignore for the moment**) to escape velocity. Assume the size of your box is $L = 10^{-6}$m, the temperature of the gas is $T = 10000$K and the number of particles in the box $N = 10^5$. Assume all gas particles are hydrogen molecules H_2. We will do this step by step:

1. Start the code by creating two arrays, one with the (x, y, z) positions of all N particles and another with the (v_x, v_y, v_z) velocities of all N particles. Draw these random positions and velocities from their respective distributions.

2. Now we are ready to test the pressure of the gas.

   - First look at one particle with its given velocity and think how this particle will continue moving, How can you find the new position of this particle after a short time step?
   - When you have realised this, move all the particles during a **total period of** $\Delta T = 10^{-9}$ seconds with 1000 time steps **(each step of** $\Delta t = 10^{-12}$ **seconds)** during this period (you may try with longer or shorter periods and time steps).
   - At each time step, check for particles which hit each of the walls in the box.
   - Make a drawing of a particle with a given velocity vector on the way to collide with one if the walls. In the drawing, include also the velocities, momentum, force and then how the new momentum and velocities need to look like after the collision, assuming it was elastic.
   - Correct positions and velocities for all particles colliding during this time step assuming elastic collisions (see again the text). Make sure the particles do not continue to move outside the walls of the box.

3. All you need to do now is to make a hole in the box. To make it easy, just use the same wall as you used to measure pressure. Make a quadratic hole of length $L/2$ and count all the particles which escape the hole. Note that you will need to count (a) the momentum (in which direction?) and (b) the number of particles escaping. The first will be used to calculate the acceleration the rocket gains, the second to calculate the corresponding fuel loss. For simplicity we will assume that the fuel consists solely of hydrogen and that the total fuel loss corresponds to the total mass of fuel you need to bring. Note that in order for the density in the box to remain constant, the box is constantly being refilled from the combustion chamber above. How can you include this in the code? There is an extremely easy way and a slightly more complicated way. Which one do you choose? (no hints here)

4. Use the momentum loss to calculate the total speed gain Δv of the box (and thereby of the satellite) after the period ΔT.

Oppgave 1C4 (du skal ikke løse denne oppgaven, den er her kun som hjelp for oppgave 2.1) NB! EKSEMPEL, en annen innleveringsoppgave kan komme her på den faktiske eksamen!!!!!!!!!

At the following link you will find directories containing some files with velocity and light curves: Real data contain several additional complicated systematic effects which are not included in these files. For instance, changes in the velocity of the Earth need to be corrected for in velocity measurements. Here we assume that these corrections have already been made. Even if these data do not show you all the complications of real life, they will still give an impression of how data from observations may look like and how to use them to say something about extrasolar planets. Each file contains three columns, the first column is the time of observation, counted in days from the first observation which we define to be $t = 0$. We assume that these data is a collection of data from several telescopes around the world, studying these stars intensively for a given period of time. The second column gives the observed wavelength λ of a spectral line (The $H\alpha$ line) at $\lambda_0 = 656.3$ nm in nm $= 10^{-9}$ m (the line is really at 656.28 nm but has been approximated to 656.3 nm in this exercise and this is what you should use). You need to use the Doppler formula to obtain radial velocities yourself. You will see that this is not a smooth curve, several systematic effects, i.e. atmospheric instabilities give rise to what we call 'noise'. As you will see, this noise makes exact observations difficult. The third column shows the measured flux of light relative to the maximum flux for the given star. Again, also these data contain noise.

Use Python, Matlab or other software/programming languages to solve the following problems:

1. Estimate the peculiar velocity for each of the 5 stars, taking the mean of the velocity over all observations. Plot the velocity curves (subtract the mean velocity from the velocity for each observation) and light curves for the 5 stars. Which of the stars appear to have a planet orbiting? Which of these planets are eclipsing their mother star? Explain how you reach your conclusions.

2. By looking at the velocity curves (velocity as a function of time), find the lower limit for the mass of the planet for the stars where you detected a planet. Find the numbers for the periods and max radial velocities by eye. Explain well/draw how you extract these numbers.

3. If you, by looking at the light curve, discovered that some of the planets are actually eclipsing the star, you may also estimate the radius and density of these planets. Again, you will need to estimate the time of eclipse by eye. For some light curves you do not have sufficient information to estimate the radius of the planet. If this is the case with your stars, explain how you can see that you cannot estimate planet radius from your data.

4. You have made estimates of mass and radius using 'by-eye' measurements. This is not the way that astrophysicists are working. Often, advanced signal processing methods are employed in order to get the best possible estimates. Also, scientific measurements always have uncertainties. The detailed methods for analyzing these data are outside the scope of this course, but you will encounter this in more advanced courses in astrophysics. Here we will use the least squares approach to obtain estimates which are more exact than the 'by-eye' observations above. We employ the model

$$v_r^{\text{model}}(t) = v_r \cos(\frac{2\pi}{P}(t - t_0)), \tag{1}$$

where $v_r^{\rm model}(t)$ is the theoretical model of the radial velocity as a function of time. The unknown parameters in this model are v_r, P and t_0. Only the two first parameters, v_r and P, are necessary in order to estimate the mass of the planet, but we need to estimate all three in order to have consistent estimates of the first two. We will now try to find a combination of these three parameters, such that equation (1) gives a good description of the data. To do this, you need to write a computer code which calculates the least squares function of the data and your model for a large number of values for the three parameters t_0, P and v_r. You need to define a function (an array in you computer) $\Delta(t_0, P, v_r)$ given as

$$\Delta(t_0, P, v_r) = \sum_t (v_r^{\rm data}(t) - v_r^{\rm model}(t, t_0, P, v_r))^2$$

where you sum over all the observed data points. This function gives you the difference between the data and your model for different values of t_0, P and v_r. What you want to find is the function which best fits your data, that is, the model which gives the minimum difference between the data and your model. You simply want to find for which parameters t_0, P and v_r that the function $\Delta(t_0, P, v_r)$ is minimal. How do you find the parameters t_0, P and v_r which minimize Δ? In this case it is quite easy, try to follow these steps:

(a) Choose one of your stars which clearly has a planet orbiting.

(b) Look at your data: You know that for $t = t_0$, the velocity is maximal. Look for the first peak in the curve and define a range in time around this curve for which you think that the exact peak must be. Define a minimum possible t_0 and a maximum possible t_0 (being sure that exact peak is somewhere between these two values). Then define a set of, say 20 (you choose what is more convenient in each case) values of t_0 which are equally spaced between the minimum and maximum value.

(c) Do the same for v_r, try to find a minimum and a maximum v_r which are such that you see by eye that the real exact v_r is between these two values. Then divide this range into about 20 equally spaced values (maybe less depending on the case).

(d) Do the same thing for the period. Look at the time difference between two peaks, and find a set of possible periods.

(e) Now, calculate the function Δ for all these values of t_0, P and v_r which you have found to be possible values. Find which of these about 20^3 combination of values which gave the smallest Δ, thus the smallest difference between data and model. These values are now your best estimates of P and v_r.

(f) Calculate the mass of the planet again with these values for P and v_r and compare with your previous 'by-eye' estimates. How well did you do in estimating 'by-eye'?

Sjekkliste punkt 2b: Metode (for oppgave 2.1) NB! EKSEMPEL, en annen del av sjekklista kan komme her på den faktiske eksamen!!!!!!!!!

1. Overordnet forklaring av metoden(e) du bruker?
2. Mer detaljert forkaring av hvert steg i metoden(e) du bruker? Skal her ikke ha kode, men du skal forklare hvordan du tenker, og **hvorfor** slik, bit for bit. Hvordan beregner du delresultat og hovedresultat og **hvorfor** på denne måten. Sjekk alle punkter som skal besvares i oppgaven, og pass på at du har forklart metode for alle punktene.**Merk at det ikke holder med en helt generell forklaring av metoden, du må forklare hvordan du faktisk anvendte metoden i akkurat denne problemstillingen**.
3. Det er en fordel å ha med figurer som viser hvordan du tenker når du finner frem til størrelser (leser av fra figur), etc. som du trenger til løsningen.
4. Tenk at leseren ikke har sett oppgaveteksten eller aner noe om hvordan dette løses. Klarer du å få løsningsmetoden klart frem?
5. Vil man etter å ha lest metodeseksjonen kunne reprodusere resultatene dine? (altså at man forstår fremgangsmåten og tenkemåten godt nok til at leseren nå vil kunne ta de samme dataene og gjøre tilsvarende beregninger og få se samme svarene?) **Merk at koden ikke er relevant her, du skal ikke forklare koden men løsningsmåten**.
6. Har du med relevante tall/størrelser som du bruker til å løse problemet? (ref. forrige underpunkt)
7. Hvis det er størrelser som du må justere/prøve deg frem til etc. så skal du forklare hvordan du gjorde dette og hvilke tall du brukte. Hva var utgangspunktet ditt for prøvingen/feilingen?

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_{\mathrm{e}} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_{\mathrm{p}} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_{\mathrm{n}} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_{\mathrm{max}} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) $= 1.60 \times 10^{-19}$ J
Massen til jorda: $M_j = 5.97 \times 10^{24}$ kg
Radien til jorda: $R_j = 6378 \times 10^3$ m
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas absolutte magnitude: $M = 4.83$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Solas forventede levetid: $t_{\mathrm{life}} = 10^{10}$år
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU $= 1.5 \times 10^{11}$ m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly $= 9.47 \times 10^{15}$ m
parsec: 1 pc $= 206\,265$ AU $= 3.27$ ly

Formler vi har brukt/utledet i emnet:

Statistikk og gasser:

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2}kT \qquad N = \frac{M}{\mu m_H}$$
$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H} \qquad P(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2$$
$$P(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} \qquad \rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr}$$
$$P_r = \frac{1}{3}aT^4 \qquad P = \frac{1}{3}\int_0^\infty p\, v\, n(p)\, dp$$
$$\rho_r = aT^4 \qquad P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Baneberegninger, ekstrasolare planeter og mørk materie:

$$P^2 = a^3 \qquad P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3$$
$$\ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \qquad r = \frac{p}{1+e\cos f}$$
$$m = G(m_1+m_2) \qquad p = h^2/m$$
$$E = \frac{1}{2}\hat{\mu}v^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} \qquad \hat{\mu} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$
$$E = \frac{Gm_1m_2}{2p}(e^2-1) \qquad p = a(1-e^2) \quad \text{(ellipse)}$$
$$p = a(e^2-1) \quad \text{(hyperbel)} \qquad p = 2a \quad \text{(parabel)}$$
$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = M\vec{R} \qquad m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$
$$\frac{m_p}{m_*} = \frac{v_*}{v_p} \qquad v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$
$$\rho(r) = \frac{v^2(r)}{4\pi G r^2} \qquad \rho(r) = \frac{\rho_0}{1+(r/R)^2}$$

Stråling og avstandsmålinger:

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1} \qquad I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dA dt d\nu}$$
$$L = \frac{dE}{dt} \qquad F = \frac{dE}{dA dt}$$
$$F = \sigma T^4 \qquad \lambda_{\max} T = 0.0029 \text{ m K}$$
$$\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT\ln 2}{m}} \qquad m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$
$$m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\text{pc}}\right) \qquad v = H_0 d_p$$
$$M_V = -2.81\log_{10} P_d - 1.43$$

spesiell relativitetsteori:

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 \qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right) \qquad V_\mu = \gamma(1,\vec{v}) \qquad m^2 = E^2 - p^2$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{rel}} & -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & \gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

generell relativitetsteori:

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2\Delta\phi^2 \qquad \frac{M_{\mathrm{m}}}{M_{\mathrm{kg}}} = \frac{G}{c^2}$$

$$\Delta t_{\mathrm{shell}} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\Delta t \qquad \Delta r_{\mathrm{shell}} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$$

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} \qquad \frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$$

$$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau \qquad \Delta\phi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$$

$$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau \qquad V_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$$

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]} \qquad \Delta r = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\Delta t$$

$$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t \qquad b = \frac{L}{p}$$

$$V_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \qquad b_{\mathrm{crit}} = 3\sqrt{3}M$$

kjernereaksjoner:

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_A Z_B e^2}{r} \qquad \varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 X_A X_B \rho^\alpha T^\beta$$

$$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4 \qquad \varepsilon_{0,pp} = 1.08 \times 10^{-12}\mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$$

$$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20} \qquad \varepsilon_{0,CNO} = 8.24 \times 10^{-31}\mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha}\rho^2 X_{He}^3 T_8^{41} \qquad \varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86 \times 10^{-18}\mathrm{Wm}^6/\mathrm{kg}^3$$