

# UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Slutt-eksamen i AST1100, 16 desember 2005, 14.30 – 17.30

Oppgavesettet er på 3 sider

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten:  $c = 2.98 \times 10^8$  m/s

Plancks konstant:  $h = 6.626 \times 10^{-34}$  Js

Gravitasjonskonstanten:  $G = 6.673 \times 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

Boltzmanns konstant:  $k = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K

Strålingskonstanten:  $a = 7.56 \times 10^{-16}$  J/m<sup>3</sup>K<sup>4</sup>

Stefans konstant:  $\sigma = ac/4 = 5.670 \times 10^{-8}$  W/m<sup>2</sup>K<sup>4</sup>.

Elementærladningen:  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C

Elektronets hvilemasse:  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg

Protonets hvilemasse:  $m_p = 1.6725 \times 10^{-27}$  kg

Vakuumperrmittivitet:  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  N<sup>-1</sup>m<sup>-2</sup>C<sup>2</sup>

Solens luminositet  $L = 3.84 \times 10^{26}$  W, Solradien:  $R_S = 6.98 \times 10^8$  m

Solmassen:  $M_S = 2 \times 10^{30}$  kg

Astronomisk enhet: 1 AU =  $1.5 \times 10^{11}$  m

lysår: 1 ly =  $9.47 \times 10^{15}$  m

parsec: 1 pc = 206 265 AE = 3.27 ly

Hubbles konstant:  $H_0 = 70$  km/s/Mpc

*Spørsmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.*

*Medbrakt kalkulator er tillatt.*

1. **Melkeveien's dynamikk.** Solen går i en tilnærmet sirkulær bane i en avstand  $R_0 = 8.0$  kpc fra galaksens sentrum, med en hastighet på ca.  $\Theta_0 = 220$  km/s. I tillegg til den sirkulære bevegelsen har Solen en spesiell periodisk bevegelse loddrett på galakseplanet. For tiden befinner Solen seg i en avstand  $z_S = 30$  pc nord for galaksens midtplan og beveger seg med en hastighet  $w_S = 7$  km/s nordover.

(a) Beskriv kort hvordan en kan måle avstanden fra Solen til Melkeveiens sentrum.

(b) Hva er massen til Melkeveien innefor Solens bane.

Anta at Melkeveien har en radius som er mye større enn tykkelsen. Det vil si at dersom vi holder oss nær midtplanet vil galaksekiven virke uendelig i  $z = 0$  planet og gravitasjonsakselerasjonen vil kun virke i  $\pm z$ -retningen.

- (c) Neglisjer den radielle akselerasjonen, konstruer en passende flate og bruk Gauss formulering av Newtons gravitasjonslov

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi GM_{in},$$

til å utlede et uttrykk for gravitasjonsakselerasjonen i en høyde  $z$  over Melkeveiens midtplan.

Anta at Solen alltid befinner seg i et område av konstant massetetthet  $\rho$  (med andre ord at Solen beveger seg lite i  $z$ -retningen i forhold til galaksekivens vertikale skalahøyde  $h_z$ ).

- (d) Bruk Newtons andre lov, og vis at Solens bevegelse i  $z$ -retningen kan beskrives ved en differensialligning av formen

$$\frac{d^2z}{dt^2} + kz = 0.$$

Uttrykk konstanten  $k$  ved massetettheten  $\rho$  og gravitasjonskonstanten  $G$ .

Dette er ligningen for enkel harmonisk bevegelse.

- (e) Finn uttrykk for  $z$  og  $w$  som funksjoner av tiden.

Anta at massetettheten i Solens nabolag (stjerner, gass, støv, og mørk materie innbefattet) er  $0.15 M_S/\text{pc}^3$ .

- (f) Anslå perioden for oscillasjoner i  $z$ -retningen.

2. **Melkeveien og kosmologi.** Rotasjonshastigheten til Melkeveiens skive er tilnærmet konstant, gitt ved  $V = 220 \text{ km/s}$  fra 1 kpc fra galaksens sentrum og utover, langt forbi Solens bane.

Newtons annen lov anvendt på en stjerne i galaksekiven viser at endringen av masse innenfor skiven,  $dM_r/dr$ , er konstant med avstand.

- (a) Vis at verdien av denne konstanten er  $V^2/G$ , der  $V$  er rotasjonshastigheten og  $G$  er gravitasjonskonstanten.

Anta at materien i galaksen er sfærisk fordelt slik at

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

- (b) Hva er massetetthetsfordelingen som funksjon av avstand fra galaksens sentrum? Hva er massetettheten i Solens nabolag?

Synlig lys vil oppleve ekstinksjon grunnet interstellær støv. Midlere fri veilengde  $l$  for lys er gitt ved  $l = 1/nA$  der  $n$  er nummertettheten av støv og  $A$  er arealet av et typisk støvkorn. I Solens nabolag er det målt at  $l = 1 \text{ kpc}$ .

- (c) Beregn nummertettheten  $n$  av støv i Solens nabolag antatt at et typisk støvkorn har dimensjon  $R = 10^{-7}$  m.

Fast materie har typisk en tetthet  $2000 \text{ kg/m}^3$ . La  $V$  være volumet en typisk finner en stjerne (masse  $1 M_S$ ) i Melkeveien i Solens nabolag.

- (d) Dersom  $V = 10 \text{ pc}^3$  hva er da massen  $M$  av støv innenfor dette volumet? Hva er massebrøken av støv kontra stjerner i Solens nabolag?
- (e) Hvor stort er bidraget av støv og stjerner sammenlignet med den massetettheten som kreves for å forklare galakseskivens rotasjon i Solens nabolag beregnet i punkt 2b?

Friedmanns ligning kan skrives

$$(H^2 - \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon) = -\frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}.$$

Denne ligningen definerer, blant annet, en kritisk tetthet  $\rho_c$ .

- (f) Sammenlign den kritiske massetettheten i dag,  $\rho_{0c}$ , med tetthetene beregnet over i punkt 2e.

Fotoner må også taes hensyn til når en beregner Universets energitetthet. Anta at stjerner i Solens nabolag har masse  $1 M_S$ .

- (g) Gi et overslag over energitettheten og fotontettheten ved disse stjernenes overflate. Hva er den omtrentlige gjennomsnittsenergien til et foton der?
- (h) Hva er den gjennomsnittelige energitettheten og fotontettheten i et volum  $V = 10 \text{ pc}^3$  dersom strålingen kun skyldes én typisk stjerne i dette volumet?
- (i) Sammenlign disse tallene, fotontetthet, energitetthet og gjennomsnittelig fotonenergi, med de de finner for den kosmiske bakgrunnsstrålingen ( $T_{cmb} = 2.725 \text{ K}$ ).