UNIVERSITETET I OSLO

Det matetmatisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST1100, 4 desember 2007, 14.30 – 17.30

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 14 sider

Konstanter og formelsamling finner du bakerst

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

Noen oppgaver er merket 'krevende' eller 'kort':

- 'krevende': Oppgaven vil gi flere poeng enn de andre oppgavene hvis den er besvart i sin helhet, men flere overganger er nødvendig for å komme frem til svaret. På disse oppgavene vil det bli gitt poeng for alle skritt i riktig retning. (Det betyr ikke nødvendigvis at oppgaven er veldig vanskelig eller krever mye regning, det betyr bare at man trenger å bruke litt fysisk forståelse og mer enn en utregning for å komme frem til svaret)
- 'kort': Oppgaven gir litt færre poeng enn gjennomsnittet og det forventes ikke en lang besvarelse.

Spørsmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.
Medbrakt kalkulator er tillatt.

Oppgave 1

De fleste galakser ser ut til å ha et massivt sort hull i sentrum. I denne oppgaven skal vi se litt på hvordan vi kan finne ut om det er et sort hull i sentrum av en galakse og hvordan vi kan finne ut noe om dette sorte hullet. (Merk: Virkeligheten er mye mer komplisert enn det som blir fremstilt i denne oppgaven. Bevisene for et sort hull i sentrum av galaksen er mindre klare enn det du kan få inntrykk av her)

1. Anta en gang i fremtiden at en hvit dvergstjerne (white dwarf) blir observert i veldig nær bane rundt det massive objektet som kan være et sort hull (vi kaller det objekt X) i sentrum av Melkeveien. Vi skal anta at banen er sirkulær. Spekteret til denne stjernen blir observert over tid. I figur 1 ser vi variasjonen i posisjonen til en absorpsjonslinje i helium. Forklar

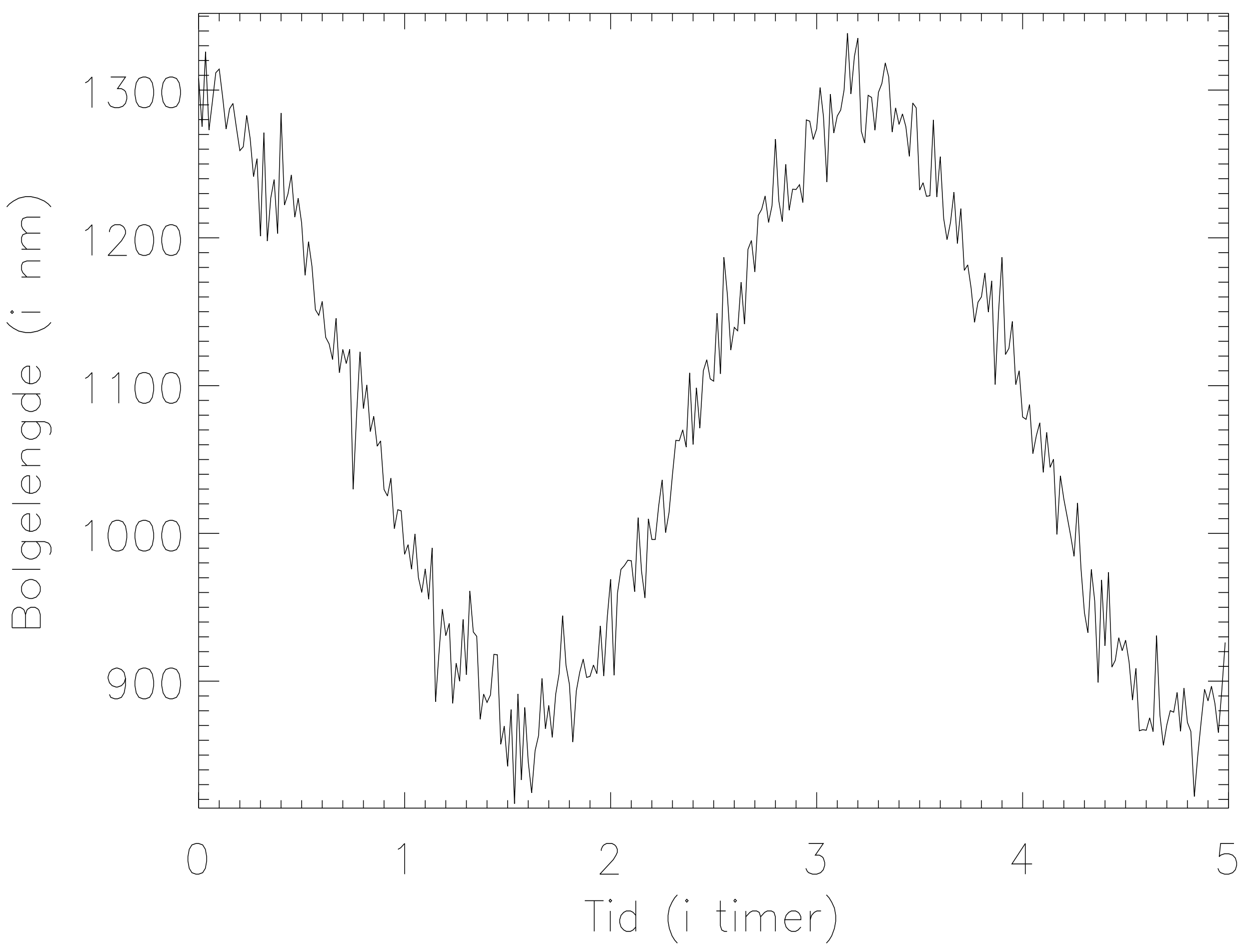

Figure 1: For oppgave 1.

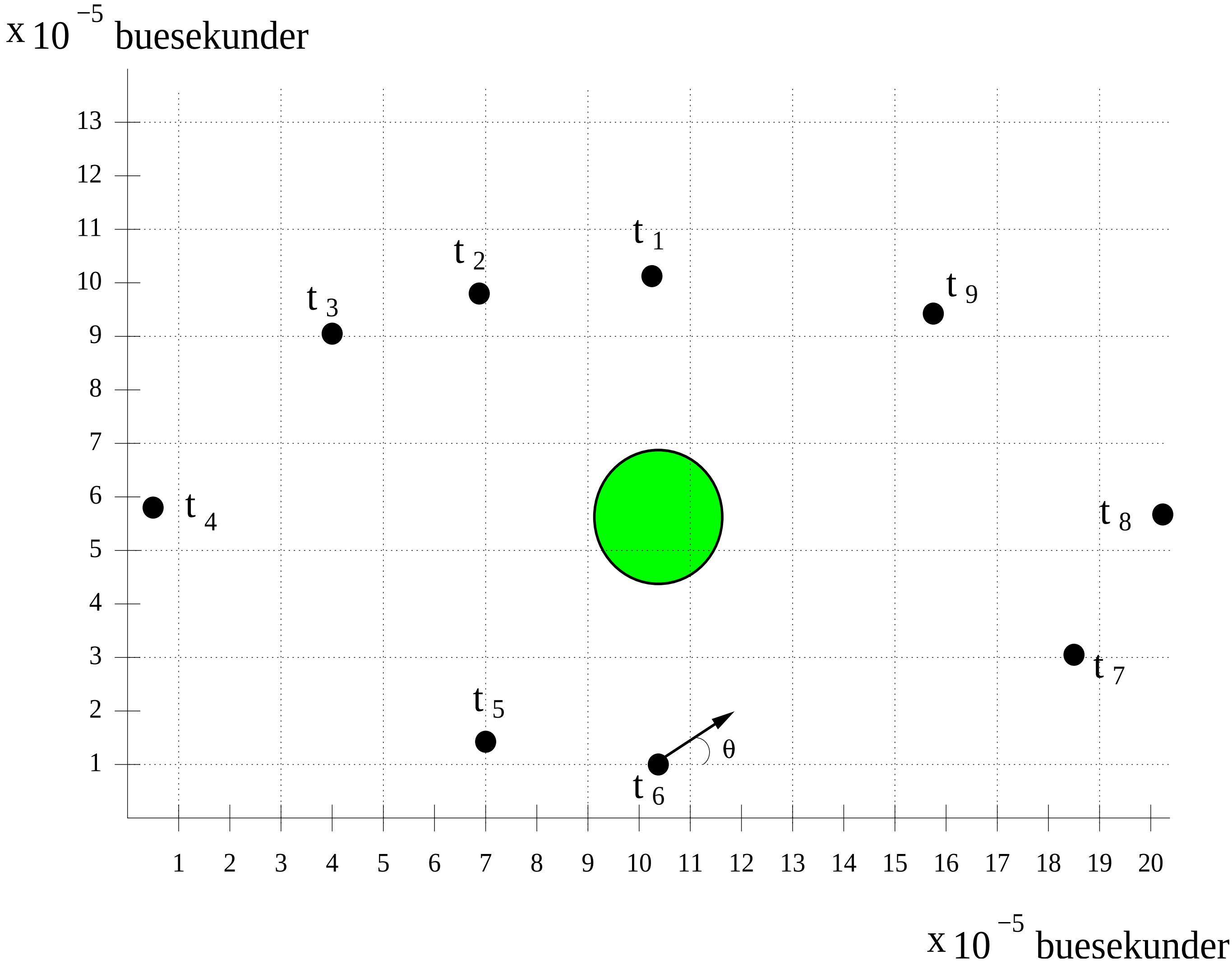

Figure 2: For oppgave 1. Posisjonen til den hvite dvergen er markert på 9 tilfeldig valgte observasjonstidspunkter. Det grå området i midten er der hvor man registerer sterk røntgenstråling: det sentrale objekt X må befinne seg innenfor her. Ved tiden t_6 skjer det en eksplosjon på den hvite dvergstjerna som kaster materie utover i den retningen som er vist. De prikkede linjene er laget for å hjelpe avlesningen.(Merk: Skiven som markerer den hvite dvergen er kun en skive for å markere posisjonen, den gjenspeiler ikke den faktiske størrelsen på den hvite dvergen)

kort (gjerne med figur) hvorfor kurven ser ut som den gjør: (a) hvorfor er den bølgeformet? og (b) hvorfor er det ikke en glatt bølgeformet linje men isteden en linje som hopper opp og ned på tilsynelatende tilfeldig måte?

2. Bruk figuren til å finne minste mulige banehastigheten til stjernen (se bort fra relativistiske effekter). Forklar med en tegning hvorfor dette er minste mulige hastighet. **Vær veldig nøye med avlesningen** slik at vi kan se at du har forstått hvilket tall som skal leses av.

3. I siste oppgave skal du ha funnet at banehastigheten til stjerna er nær lyshastigheten. Det betyr at vi må være forsiktig og bruke relativistisk formel for Dopplerforskyvning (Doppler shift). Vi skal nå se hvordan den kan utledes. Vi definerer en x retning som går fra jorda mot stjerna, positiv retning er mot stjerna. Hastigheten langs denne aksen (den radielle hastigheten til stjerna) er gitt ved v som da også er positiv når den beveger seg bort fra oss. Lys med bølgelengde λ i hvilesystemet til stjerna blir sendt ut fra stjerna mot oss. Vi observerer at lyset har bølgelengde λ'. Skriv ned energi-moment-firer-vektoren (momenergy four-vector) til et foton i dette lyset både i stjernas hvilesystem og i vårt referansesystem uttrykt ved λ og λ'.

4. Bruk transformasjonsegenskaper til firer-vektorer til å komme frem til den relativistiske Dopplerformelen.

5. *(kort oppgave)* Hvilken hastighet måler du stjerna til å ha hvis du bruker relativistisk Dopplerformel? Var det nødvendig å bruke relativistisk formel her?

6. *(krevende oppgave)* I figur 2 ser du et bilde med observasjoner av stjerna på forskjellige tidspunkter. På figuren har det blitt merket av (grått område) innenfor hvilket område objekt X i sentrum av Melkeveien ser ut til å befinne seg (antar vi). Beregn massen M til objekt X samt størrelsen på området det må befinne seg innenfor og diskuter **kort** om det kan være et sort hull i sentrum av Melkeveien eller ikke. **hint:** Det kan være nyttig å finne korrekt banehastighet, avstanden til sentrum av Melkeveien samt baneradien til stjerna (for de som ikke klarer å finne avstanden til sentrum av Melkeveien skal 7.94 kpc brukes videre i oppgavene). De som ikke får til denne oppgaven bruker $M = 4 \times 10^6 M_\odot$ (som ikke er helt riktig svar) i resten av oppgavene.).

7. Røntgenstråling observeres fra et område nær objekt X. Strålingen er rødforskøvet (red shifted). Vi går i bane omkring dette objektet, så vi kan anta at vi ikke har radiellhastighet i forhold til det. Derfor kan det ikke være snakk om vanlig Dopplereffekt. Forklar fysisk hvorfor lyset er rødforskøvet og vis deretter at rødforskyvningen er gitt ved

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} - 1.$$

Det er ikke nødvendig å starte helt fra Schwarzschild-linjeelementet for å gjøre utledningen: du kan godt bruke oppgitte formler, men du **må** forklare kort hva formelen du bruker betyr, hva symbolene betyr og hvorfor du bruker akkurat denne formelen. Det er veldig viktig at vi ser at du forstår hva du gjør her. Det vil ikke bli gitt poeng på besvarelser hvor det bare settes inn i oppgitte formler uten forklaring.

8. *(kort oppgave)* En spektrallinje i stråling fra objektet i sentrum av Melkeveien blir observert til å ha en rødforskyvning på $\Delta\lambda/\lambda = 2$. Diskuter om dette kan gi noen indikasjon på at vi snakker om et sort hull.

9. *(krevende oppgave)* I en liten eksplosjon på overflaten av den hvite dvergen blir materie slunget ut med en hastighet av $v = 70000$ km/s (målt i forhold til den hvite dvergen) i retning $\theta = 30°$ på beveglesesretningen til stjerna i retning innover mot det sorte hullet (se figur 2). Beregn det relativistiske spinnet og energien (per masse) til materien som blir kastet ut og bruk nødvendige formler til å finne ut om materien kommer til å falle inn i det sorte hullet. **kryptisk hint:** Det er lettere å derivere $f(x)$ enn $\sqrt{f(x)}$, spesielt når den deriverte likevel skal være 0.

10. Beskriv **kort** hvordan du ville skrevet et dataprogram for å finne banen materien tar inn mot det sorte hullet til første orden. Trenger her ikke kommandoer, men strukturen på programmet.

Oppgave 2

Vi skal se på en stjerne på $15M_\odot$ som er i ferd med å eksplodere som en supernova.

1. I HR-diagrammet for en åpen hop i figur 3 er det tegnet inn 5 stjerner A, B, C og D. Forklar hva som er hovedenergikilden til hver av disse stjernene: hvis det er fusjon, forklar hvilket grunnstoff er det hovedsakelig som fusjonerer og om dette skjer i kjernen eller i skall rundt kjernen. Hvilken av disse stjernene kan være stjerna som vi skal se på i denne oppgaven?

2. Anta at kjernen til stjerna rett før en supernovaeksplosjon har radien $R = R_\odot$ og en masse på $M = 2.83M_\odot$. Anta at tettheten er uniform. I løpet av supernovaeksplosjonen blir kjernen presset sammen til alle nøytronene i gassen er degenerert. Hva blir radien til kjernen på det minste? Gi svaret i enheter av kilometer og i enheter av massen M. Er det noe som tyder på at antakelsen om uniform tetthet var dårlig? Argumenter. I det følgende skal du bruke at radien til nøytronkjernen blir 10 km.

3. I det kjernen blir nøytrondegenerert og sammentrekningen plutselig stopper opp, blir energi sendt ut fra kjernen som en sjokkbølge. Anta at ingen kjernereaksjoner eller andre prosesser som bruker eller produserer energi foregår under sammentrekningen av kjernen. Anta også at kjernen var i

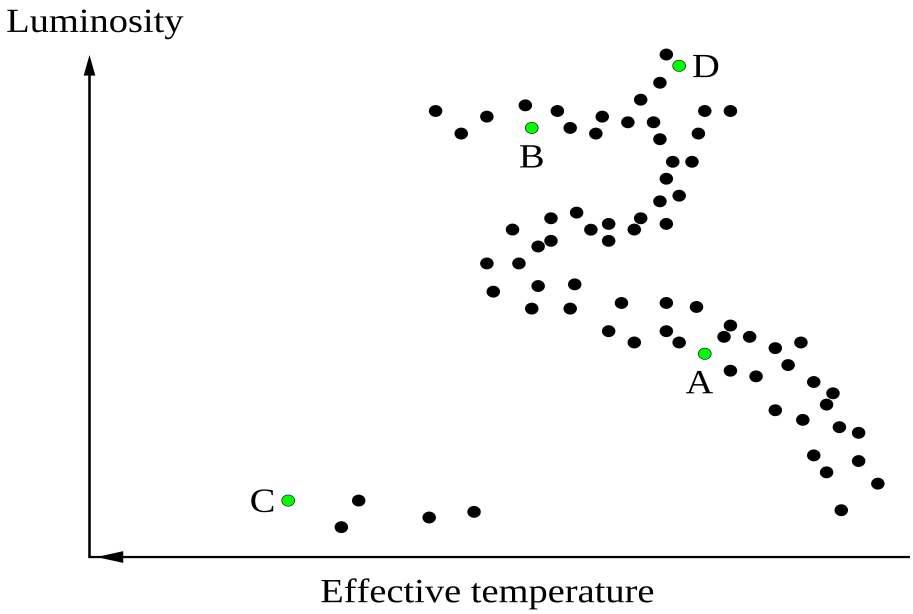

Figure 3: For oppgave 2. HR-diagram.

likevektstilstand før og etter kollaps. Bruk informasjonen du har til å gi et anslag for den totale energien som blir frigitt i denne supernovaeksplosjonen. Du vil finne at denne er omkring 6.4×10^{46}J som er tallet som skal brukes videre. **hint:** Det finnes en nyttig formel i formelsamlingen.

4. *(kort oppgave)* Forklar **kort** hvordan supernovaer kan brukes til å finne universets geometri. Legg vekt på fysikken bak og bruk maks en formel. Du kan gjerne besvare i stikkordsform eller ved et diagram som viser sammenheng mellom magnituder, avstander, rødforskyvning, tetthet og geometri. Bruk maks en halv side, muligens lenger hvis du bruker veldig stor skrift.

5. *(krevende oppgave)* Anta at vi kun har denne supernovaen å forholde oss til: Anta at 1% av energien du regnet ut i forrige spørsmål blir sendt ut som lys i løpet av en periode på et døgn. Anta også at luminositeten til supernovaen var konstant i løpet av denne perioden. Supernovaen blir observert til å ha tilsynelatende magnitude (apparent magnitude) 16.6. Rødforskyvningen til supernovaen blir funnet til å være 1.7. Se bort fra kosmologisk konstant. Finn Ω_0 og finn ut om denne observasjonen er gjort i et åpent, lukket eller flatt univers. **hint:** figur 4 kan være til hjelp.

6. *(kort oppgave)* Anta at den optiske dypden (optical depth) fra støvpartikler til denne supernovaen er beregnet til å være 0.18. Forklar uten bruk av

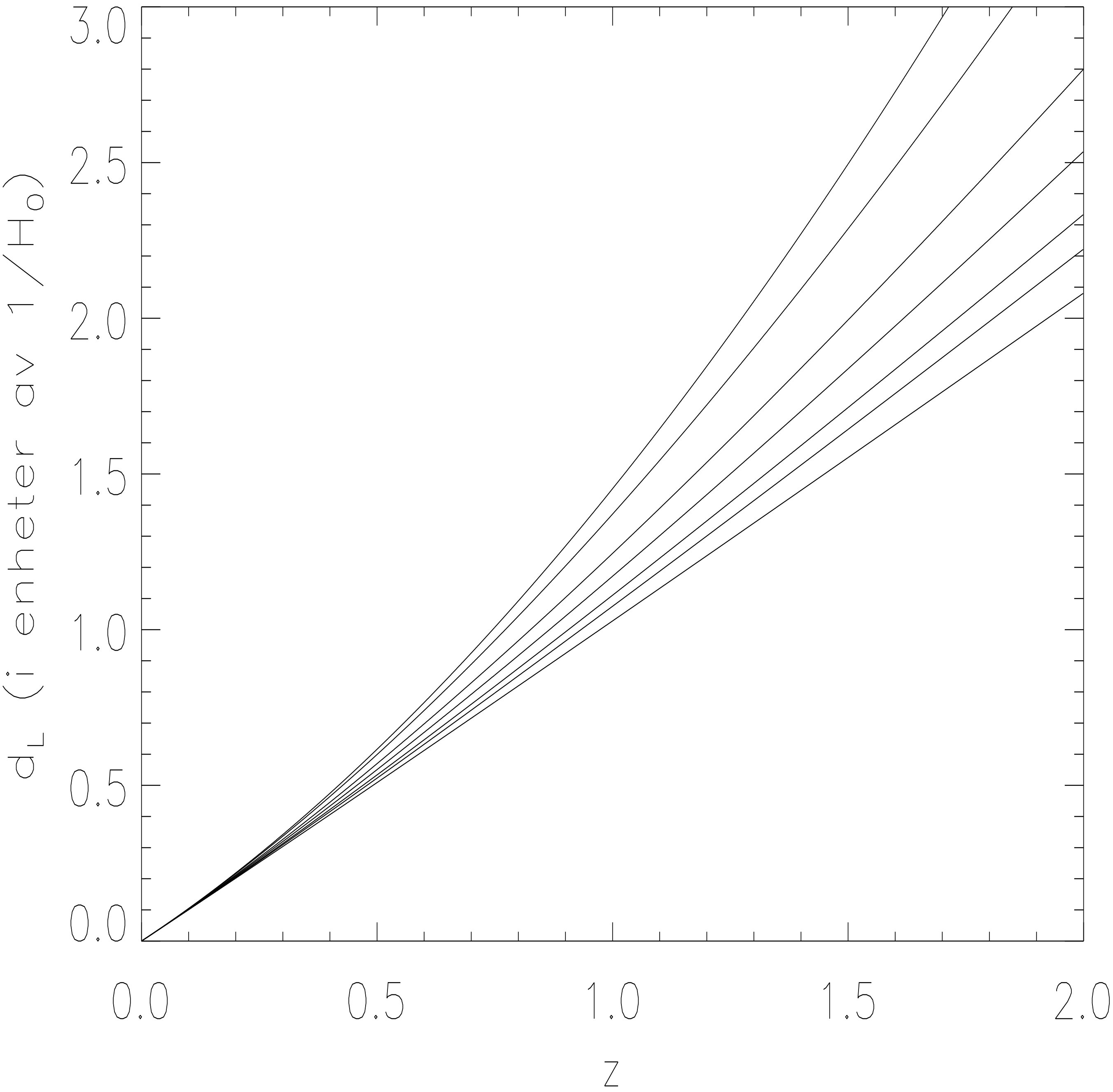

Figure 4: For oppgave 2: Luminositetsavstand d_L i enheter av $1/H_0$ på y-aksen for rødforskyvning z på x-aksen. Kurvene er for følgende verdier av q_0 i rekkefølge ovenfra og nedover: 0.05, 0.15, 0.35, 0.5, 0.65, 0.75, 0.9

formler om vi da kommer til å finne et større eller mindre luminositetsavstand (luminosity distance) for supernovaen enn vi gjorde i forrige spørsmål. Hvilken verdi for Ω_0 finner du da? Forandrer dette konklusjonen om universets geometri?

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_\mathrm{e} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_\mathrm{max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

$$P^2 = a^3$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

$$\ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

$$p = h^2/m$$

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{(ellipse)}$$

$$p = a(e^2 - 1) \quad \text{(hyperbel)}$$

$$p = 1/2a \quad \text{(parabel)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = M\vec{R}$$

$$m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$

$$< K >= -\frac{1}{2} < U >$$

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

$$L = \frac{dE}{dt}$$

$$F = \frac{dE}{dAdt}$$

$$F = \sigma T^4$$

$$n(v)dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$$

$$\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT \ln 2}{m}}$$

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right)$$

$$U - B = M_U - M_B = m_U - m_B$$

$$B - V = M_B - M_V = m_B - m_V$$

$$M_V = -2.81 \log_{10} P_d - 1.43$$

$$M_V = -3.53 \log_{10} P_d - 2.13 + 2.13(B - V)$$

$$v = H_0 d_p$$

$$\tau(\lambda) = \int_0^r dr' n(r') \sigma(\lambda, r')$$

$$m(\lambda) = M(\lambda) + 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right) + 1.086\tau(\lambda)$$

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\rm rel} & -v_{\rm rel}\gamma_{\rm rel} & 0 & 0 \\ -v_{\rm rel}\gamma_{\rm rel} & \gamma_{\rm rel} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$< E_K >= \frac{3}{2}kT$$

$$N = \frac{M}{\mu m_H}$$

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}.$$

$$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr}$$

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$$

$$P_r = \frac{1}{3}aT^4$$

$$\rho_r = aT^4$$

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2\Delta\phi^2$$

$$\frac{M_{\rm m}}{M_{\rm kg}} = \frac{G}{c^2}$$

$$\Delta t_{\rm shell} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\Delta t$$

$$\Delta r_{\rm shell} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$$

$$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$$

$$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$$

$$\Delta\phi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$$

$$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$$

$$\frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$$

$$\frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]}$$

$$\Delta r = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\Delta t$$

$$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\Delta t$$

$$b = \frac{L}{p}$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$b_{\text{crit}} = 3\sqrt{3}M$$

$$\Delta\phi = \frac{4M}{R}$$

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4M(d_{\text{source}} - d_{\text{lens}})}{d_{\text{lens}}d_{\text{source}}}}$$

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_A Z_B e^2}{r}$$

$$r_{AB} = \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2}\frac{n_A n_B}{\sqrt{\mu\pi}}\int_0^E dE e^{-E/kt}\sigma(E)$$

$$r_{AB} \propto X_A X_B \rho^{\alpha'} T^\beta$$

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 X_A X_B \rho^\alpha T^\beta$$

$$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4$$

$$\varepsilon_{0,pp} = 1.08 \times 10^{-12} \text{Wm}^3/\text{kg}^2$$

$$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20}$$

$$\varepsilon_{0,CNO} = 8.24 \times 10^{-31} \text{Wm}^3/\text{kg}^2$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha} \rho^2 X_{He}^3 T_8^{41}$$

$$\varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86 \times 10^{-18} \text{Wm}^3/\text{kg}^2$$

$$L \propto M^4$$

$$t \propto 1/M^3$$

$$M \propto T_{\mathrm{eff}}^2$$

$$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty p\, v\, n(p)\, dp$$

$$n(\vec{p}) = n\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{3/2} e^{-p^2/(2mkT)}$$

$$n(E) = \frac{g(E)}{e^{(E-E_F)/(kT)}+1}$$

$$n(\vec{p}) = \frac{1}{e^{(p^2-p_F^2)/(2mkT)}+1}\frac{2}{h^3}$$

$$E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$$

$$P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{20m_e} n_e^{5/3}$$

$$P = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3}$$

$$< E_K >= \frac{3}{5}E_F$$

$$R_{\mathrm{WD}} \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3} \frac{h^2}{20m_e G}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^{5/3} M^{-1/3}$$

$$M_{\mathrm{Ch}} \approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^2 \approx 1.4M_\odot$$

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - R^2(t)\left[\frac{\Delta r^2}{1-kr^2} + r^2\Delta\theta^2 + r^2\sin^2\theta\Delta\phi^2\right]$$

$$H(t) = \frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}$$

$$z = \frac{R_0}{R(t)} - 1$$

$$\dot{R}^2(t) - \frac{8}{3}\pi G\rho(t)R^2(t) - \frac{\Lambda}{3}R(t)^2 = -k$$

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4}{3}\pi G(\rho(t)+3P(t))R(t) + \frac{\Lambda}{3}R(t)$$

$$\rho_C(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_C(t)}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho R^{3(1+w)}) = 0$$

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^{3(1+w)}$$

$$R(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

$$q(t) = -\frac{1}{R(t)H^2(t)}\frac{d^2R(t)}{dt^2}$$

$$q(t) = \frac{1}{2}\Omega(t)$$

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

$$d_L = r(1+z)R_0$$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$P_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{(m_n - m_p)/kT}$$

$$\frac{n(t_1)}{n(t_2)} = e^{-\ln 2(t_1 - t_2)/\tau}$$

$$d_L = \frac{1}{H_0 q_0^2}[q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2zq_0} - 1)]$$

$$v = H_0 d_p$$