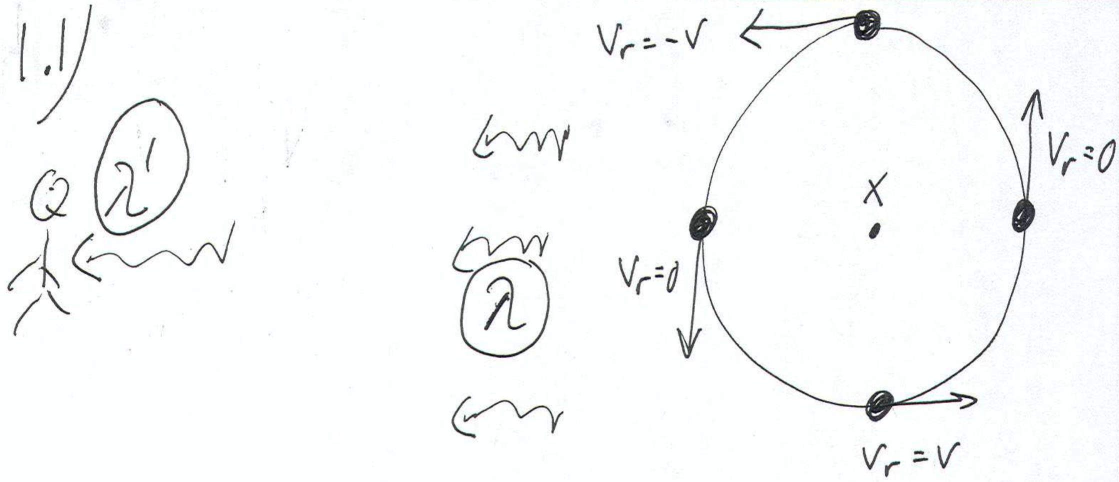
1.1)



Dopplerformelen gir $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{V_r}{c}$

Når stjerna kommer mot oss blir lyset blåforskøvet ($\lambda' < \lambda$), når det går fra oss blir det rødforskøvet ($\lambda' > \lambda$) og når den beveger seg ortogonalt på synsretningen ($V_r = 0$) er $\lambda = \lambda'$

Usikkerheter i observasjonene gjør at kurven ikke er glatt.

(NB! Mange har skrevet at varierende hastighet på partiklene i gassen er årsak til dette, det er IKKE tilfelle, det er så mange partikler i gassen at det ikke er noen forandring i midlere hast. over tid. Derimot vil det faktum at ikke alle gasspartikler har den midlere hast. medføre at linjen blir bred.)

1.2)

Finner virkelige bølgelengden til spektrallinje når $V_r = 0$ dvs. midt mellom topp og bunn i bølgen.

Topp $\lambda_{topp} \approx 1300nm$

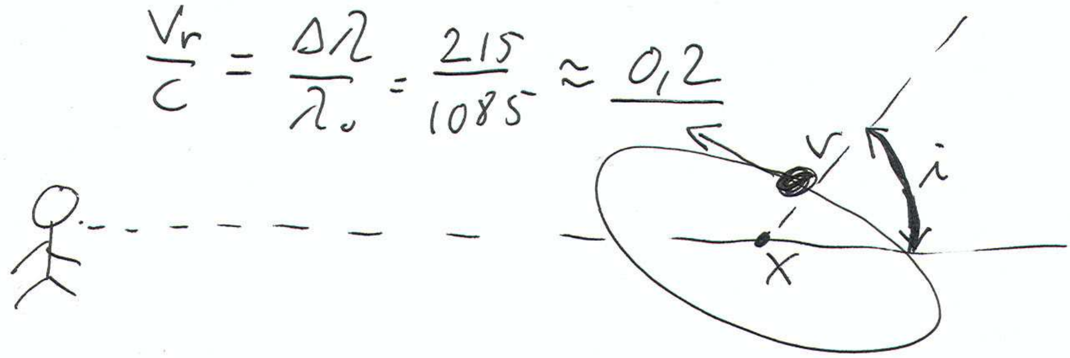
Bunn $\lambda_{bunn} \approx 870nm$

$$2\Delta\lambda \approx 1300nm - 870nm \approx 430nm$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta\lambda \approx 215nm}$$

Virkelige bølgelengde $\lambda_0 = \lambda_{bunn} + \Delta\lambda \approx \underline{1085nm}$

$$\frac{V_r}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{215}{1085} \approx \underline{0,2}$$



i er inklinasjonen.

Virkelig hast. $V = \frac{V_r}{\sin i}$

Hvis $i \neq 90°$ er $V > V_r$, derfor er V_r minste mulige V.

1.3) Energi-mom. 4-vektor: $P_\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$

Har kun bev. i x-retning $\underline{p = p_x}$

For fotoner: $E = |p|$

$\Rightarrow \quad P_\mu = (E, -E, 0, 0)$ for fotoner (med $p_x = -p$)

Foton energi $E = \frac{h}{\lambda}$ (bruker $c = 1$)

Stjernesystem $P_\mu = h\left(\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}, 0, 0\right)$

Vårt system $P'_\mu = h\left(\frac{1}{\lambda'}, -\frac{1}{\lambda'}, 0, 0\right)$

1.4) 4-vektorer transformerer med Lorentzmatrisen:

$$P_\mu = C_{\mu\nu} P_\nu'$$

(OBS! V_{rel} i Lorentzmatrisen er positiv ($V_{rel} = v$) hvis syst. som observerer P_μ beveger seg i positiv x-retn. i forhold til syst som obs. P_μ')

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \\ -\frac{1}{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda'} \\ -\frac{1}{\lambda'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Første linje gir: $\frac{1}{\lambda} = (\gamma + v\gamma)\frac{1}{\lambda'}$ der $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \gamma(1+v) = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$$

eller $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1}}$$

1.5)

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}+1\right)^2 = \frac{1+v}{1-v}$$

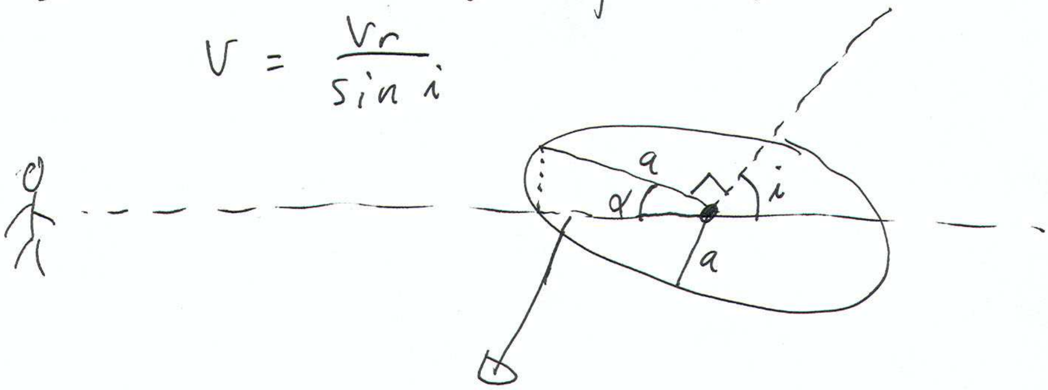
$$\Rightarrow \quad (1-v)\left[\frac{\Delta\lambda}{\lambda}+1\right]^2 = 1+v$$

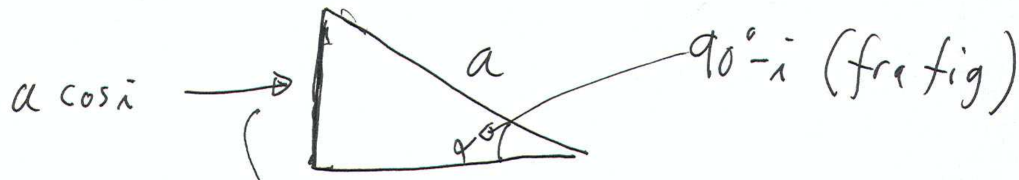
$$\Rightarrow \quad v = \frac{\left[\frac{\Delta\lambda}{\lambda}+1\right]^2-1}{\left[\frac{\Delta\lambda}{\lambda}+1\right]^2+1} \approx \underline{\underline{0{,}18}}$$

Omkring 10% feil, greit å bruke rel. fo

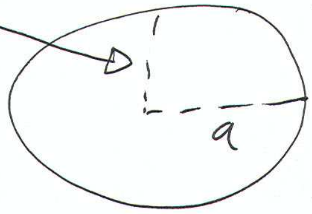
1.6) Finner inklinasjonen for å finne v:

$$v = \frac{v_r}{\sin i}$$





Banen slik vi ser den:



~~Leser av fra fig: a cos i~~

$$\cos i = \frac{a\cos i}{a} = \frac{\frac{9}{2}\cdot 10^{-5}{}''}{\frac{19{,}5}{2}\cdot 10^{-5}{}''} \Rightarrow \underline{i \approx 62{,}5^\circ}$$

Lest av fra fig

$$\Rightarrow \quad v = \frac{0{,}18}{\sin i} = \underline{\underline{0{,}2}}$$

Vi bruker Kepler 3 for å finne massen:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$ Leser av Periode fra fig $P \approx \underline{3{,}2\text{h}}$

1.6 forts

Vi trenger baneradie a:

$$v = \frac{2\pi a}{P} \Rightarrow a = \frac{vP}{2\pi} \approx \underline{0{,}73\,AU}$$

Fra Kepler $M = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} \approx \underline{2{,}9 \cdot 10^6 M_\odot}$

Avstand til sentrum av Melkeveien blir da

$$d \cdot \Delta\theta = a \Rightarrow d = \frac{0{,}73\,AU}{\frac{19{,}5}{2} \cdot 10^{-5}{}'' \cdot \frac{\pi}{3600 \cdot 180}} \approx \underline{7{,}51\,kpc}$$

Vinkelradie til grå sone $\approx \frac{2{,}3 \cdot 10^{-5}{}''}{2}$

Radien til grå sone: $7{,}51\,kpc \cdot \frac{2{,}3 \cdot 10^{-5}{}''}{2} \cdot \frac{\pi}{3600 \cdot 180}$

$$\approx 0{,}09\,AU$$
$$\approx \underline{2{,}7M}$$

Hadde obj. vært innenfor $r = 2M$ hadde det vært et sort hull.

Er veldig nær...

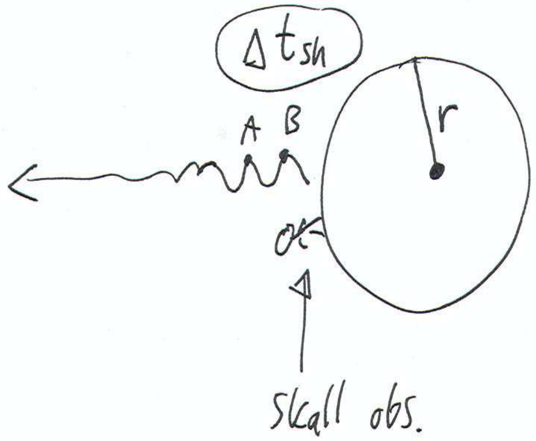
NB! Mange har her skrevet at figuren tyder på at det er ellipsebane. Det er feil: Det står at vi skal anta sirkelbane. Ellipseformen må da skyldes inklinasjonen

1.7)

a)

langt-vekk obs.

Δt



Skall-obs. nær det sorte hullet og langt-vekk obs. måler forskjellig frekvens $\nu = \frac{1}{\Delta t}$ fordi tidsintervall er forskjellig på klokkene til de to obs.

Formelen $$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}\,\Delta t_{sh}$$

gir forskjellen i tidsintervallet mellom to events på skallet med koordinat r (de to eventene kan være utsendelsen av to bølgetopper)

$$\lambda = \frac{1}{\nu} = \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta t}{\Delta t_{sh}} = \frac{\lambda}{\lambda_{sh}} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}} - 1$$

1.8) Finner r/M for punktet strålingen blir sendt ut fra.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}} - 1 \Rightarrow 1 - \frac{2M}{r} = \frac{1}{9}$$

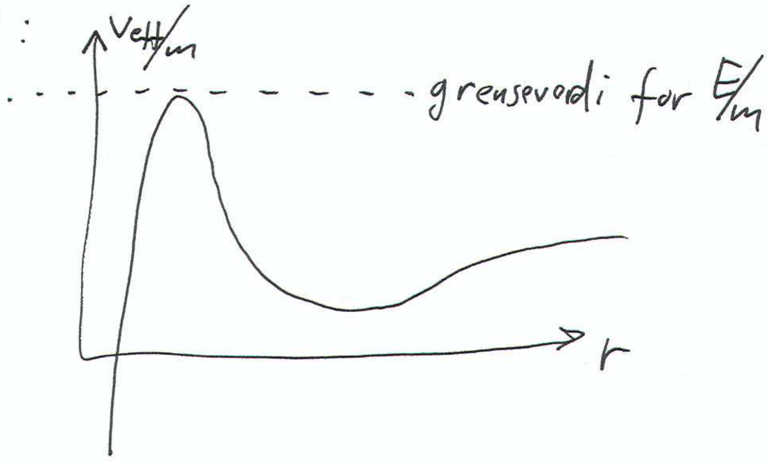
$$\Rightarrow \frac{r}{M} = \frac{9}{4}$$

~~Dette~~ Dette er nesten $r/M = 2$ som betyr at lyset sannsynligvis blir sendt ut fra et sted nær horisonten til et sort hull, kanskje fra en akresjonsskive.

1.9) Vi må finne ut om E/m er større

energi per masse

enn toppen i det effektive potensialet som kan se sånn ut:



Vi har $V_{eff}(r) = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]}$

Vi må først finne E/m og L/m

Rel. spinn $\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = r^2 \frac{d\varphi}{dt_{sh}} \cdot \frac{dt_{sh}}{d\tau} = r \cdot \underbrace{\frac{r\,d\varphi}{dt_{sh}}}_{=V_{\varphi,sh}} \cdot \underbrace{\frac{dt_{sh}}{d\tau}}_{=\gamma}$

Her er: dt_{sh} = tidsintervall på klokken til obs. som står fast på koordinat r

r = Schwarschildkoordinat $r = \frac{\text{omkrets}}{2\pi}$

$d\tau$ = tidsintervall på klokken til infallende materie

Skallobs. bruker Lorentzgeometri (SR) og får:

$\frac{dt_{sh}}{d\tau} = \gamma_{sh}$ fra SR der $\gamma_{sh} = \frac{1}{\sqrt{1 - V_{sh}^2}}$

(V_{sh} er hast. målt av skallobs.)

$\frac{d\varphi}{dt_{sh}}$ er vinkelhast. obs. av skallobs $\Rightarrow V_{\varphi,sh} = \frac{r\,d\varphi}{dt_{sh}}$

1.9 forts) $V_{\varphi,sh}$ er tang. hast.

Fra fig: $V_{\varphi,sh} = V_{sh}\cos\theta$

Dermed: $\frac{L}{m} = r\,V_{sh}\cos\theta\,\gamma_{sh}$

Rel. energi: $\frac{E}{m} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{dt_{sh}}\frac{dt_{sh}}{d\tau}$

dt = tidsint. på klokken til langtrekk-obs.

Fra formelsaml: $\frac{dt}{dt_{sh}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$

Fra SR: $\frac{dt_{sh}}{d\tau} = \gamma_{sh}$

$$\frac{E}{m} = \sqrt{1-\frac{2M}{r}}\,\gamma_{sh}$$

Finner nå topp i potensial ved

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0$$

Lettere å bruke V_{eff}^2:

$$\frac{dV_{eff}^2}{dr} = 0$$

Definerer $r = x\cdot M$ og $l = \frac{L}{mM}$

$$V_{eff}^2 = \left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{l^2}{x^2}\right)$$

$$\frac{dV_{eff}^2}{dx} \Rightarrow 2x^2 - 2l^2x + 6l^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}l^2\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{12}{l^2}}\right)$$

Toppen (max) er for minste r $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{2}l^2\left(1-\sqrt{1-\frac{12}{l^2}}\right)$

1.9 forts

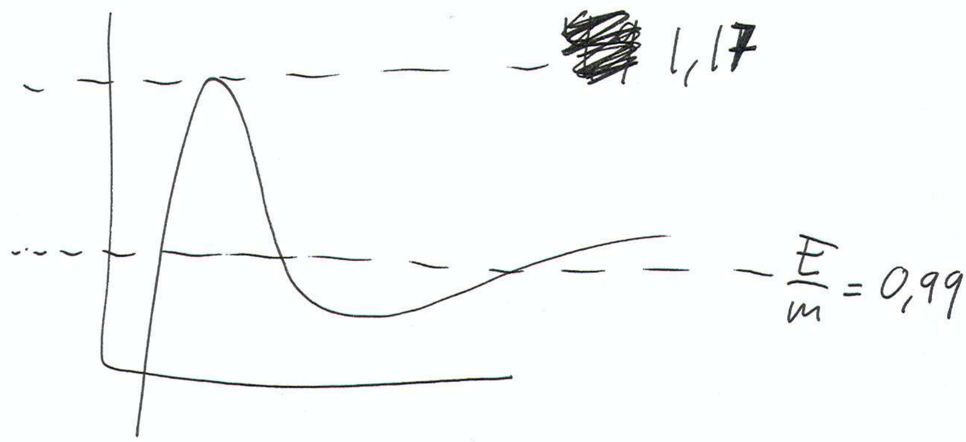
Koordinat $r = 0{,}73\,AU \approx 25{,}5\,M$

$$\ell = \frac{L}{mM} = \underbrace{x}_{25{,}5} \cdot \underbrace{V_\varphi}_{\frac{7\cdot 10^7\,m/s}{3\cdot 10^8\,m/s}} \cos \underbrace{\theta}_{30^\circ} \cdot \gamma_{sh} \approx \underline{\underline{5{,}3}}$$

$$\frac{E}{m} = \sqrt{1 - \frac{2}{25{,}5}}\,\gamma_{sh} \approx \underline{\underline{0{,}99}}$$

$x_{topp} \approx \underline{3}$

$V_{eff}(x=3) = \underline{\underline{1{,}17}}$



Faller ikke inn!

1.10) Vi bruker formlene

$$\Delta\varphi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$$

$$\Delta r = -\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1+\left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\;\Delta\tau$$

som gir forandring i φ og r-koordinat for et lite tidssteg $\Delta\tau$ på klokka til infallende materie. (minus på Δr siden materien faller i negativ r-retning)

Vi starter med $r = 25{,}5M$

$\varphi = 0$

- Definerer arrayer for r og φ

FOR LØKKE

- oppdaterer $r = r + \Delta r$

  $\varphi = \varphi + \Delta\varphi$

- Øker $\Delta\tau$ med et lite tidsintervall
- Lagrer r og φ i arrayer

END FOR

Har nå arrayer for r og φ for hvert tidssteg $\Delta\tau$. Kan plotte banen.