

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Prøveeksamen i AST1100

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 13 sider

Konstanter og formelsamling finner du bakerst

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevnt hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

Noen oppgaver er merket 'krevende' eller 'kort':

- 'krevende': Oppgaven vil gi flere poeng enn de andre oppgavene hvis den er besvart i sin helhet, men flere overganger er nødvendig for å komme frem til svaret. På disse oppgavene vil det bli gitt poeng for alle skritt i riktig retning. (Det betyr ikke nødvendigvis at oppgaven er veldig vanskelig eller krever mye regning, det betyr bare at man trenger å bruke litt fysisk forståelse og mer enn en utregning for å komme frem til svaret)
- 'kort': Oppgaven gir litt færre poeng enn gjennomsnittet og det forventes ikke en lang besvarelse.

Spørsmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

Medbrakt kalkulator er tillatt.

Oppgave 1

Her skal vi studere en åpen stjernehop (open cluster) i Melkeveien.

1. I figur 1 ser du variasjonen i den visuelle magnituden m_V til en Cepheide i hopen. Hva er avstanden til hopen? (angi svaret i kpc)
2. I figur 2 ser du et generelt HR-diagram basert på stjerner som man kjenner avstanden til. Bare hovedserien (main sequence) vises i diagrammet. Absolutt bolometrisk magnituden vises på y-aksen. I figur 2 ser du HR-diagrammet for den åpne hopen vår med tilsynelatende bolometrisk magnituden på y-aksen. Bruk disse to figurene til å finne avstanden til hopen. Hvis du fant en litt annen avstand enn det du fant i foregående oppgave, kan du forklare hvorfor (her kommer det an på hvor nøye du har avlest, noen vil finne svært små forskjeller) ?

3. Anta at magnituden du brukte for å finne avstanden ved hjelp av Cepheiden var korrigert for interstellar absorpsjon, men ikke de du brukte til HR-diagrammet. Anta at hele forskjellen mellom de to avstandsmålingene skyldes interstellar absorpsjon. Hva er den optiske dybden (optical depth) til hopen?
4. (*kort oppgave*) Gi et anslag på alderen til hopen.

Oppgave 2

Her skal vi studere en galaksehopp (cluster of galaxies). Hopen består av 500 galakser. Vi skal anta en enkel modell slik at hver av galaksene har 500 milliarder stjerner og gjennomsnittsmassen til en stjerne er lik solmassen. Røntgenstråling fra hopen avslører at den har 3 ganger så mye materie i varm intergalaktisk gass som materie i stjerner. Hopens totale tilsynelatende magnitudo (apparent magnitude) er 9.

1. Finn luminositetsavstanden (luminosity distance) til hopen.
2. (*krevede oppgave*) Anta at vi har et flatt univers uten kosmologisk konstant og med en Hubblekonstant lik den observerte Hubblekonstanten i vårt univers idag. Anta også at hastigheten til hopen i forhold til oss og hastighetene til galaksene i hopen i forhold til hopens massesenter er så små at vi kan se bort fra dem. Ved hvilken bølgelengde ville vi observert $H\alpha$ fra en galakse i hopen? ($H\alpha$ linjen målt på gass i ro i laboratoriet er sentrert på $\lambda_c = 656.28$ nm). (ser her kun på kosmologisk rødforskyvning). Oppgi hvilke antagelser du brukte.
3. Vi skal nå for enkelhets skyld anta at all materie i hopen er uniformt fordelt i en kule. I figur 3 ser du galaksehopen (den grå sirkelen viser kulen som materien i hopen er samlet innenfor) samt lyset fra en kvasar med rødforskyvning 0.8 som ligger rett bak hopen. Lyset har blitt bøyd av på grunn av gravitasjonslensing og ligger derfor i en sirkel rundt hopen. Finn forholdet mellom mørk og lysende materie i hopen. **hint1:** I formelen for gravitasjonslensing er det egenavstand (proper distance) som skal brukes. **hint2:** De som ikke har funnet egenavstanden til galaksehopen fra tidligere oppgaver kan bruke 1000 Mpc (dette er ikke nøyaktig det riktige svaret)
4. I figur 4 ser vi lyset som kommer fra kvasaren, blir bøyd av i tyngdefeltet til galaksehopen og deretter fortsetter mot oss. Anta at lyset går fra kvasaren til punkt A i figuren i en rett linje og ikke påvirkes av gravitasjonsfeltet fra hopen. Anta også at lyset går fra punkt B i figuren og i rett linje frem til oss uten å påvirkes av gravitasjonsfeltet. Anta til slutt at lyset går i konstant avstand R fra senteret av hopen (som tilsvarer den nærmeste avstanden du fant tidligere) fra punkt A til punkt B. Omtrent hvor lang tid bruker lyset på å gå fra A til B (hvilken tilnærming gjør du)? Hvor mye kortere tid hadde lyset brukt i fravær av gravitasjonsfelt? Kan du tenke deg hvordan dette kunne blitt brukt til å finne ut noe om fordelingen av mørk materie i en galaksehopp med uregelmessig form?

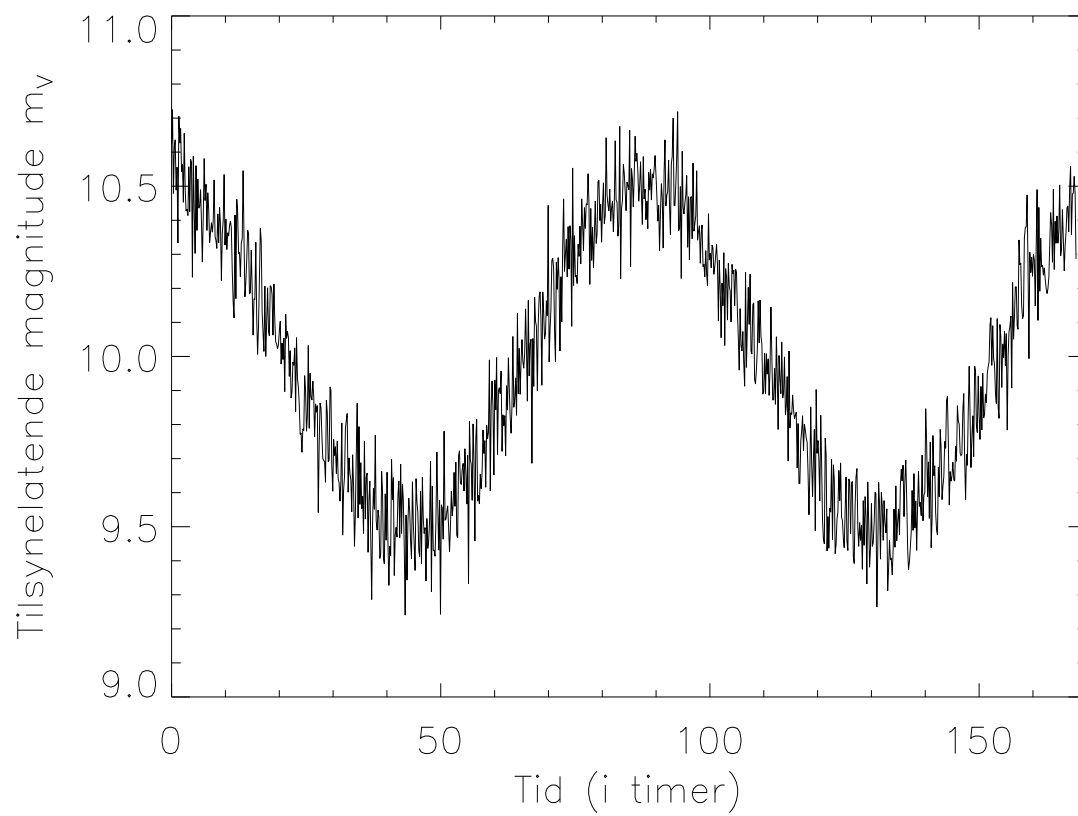
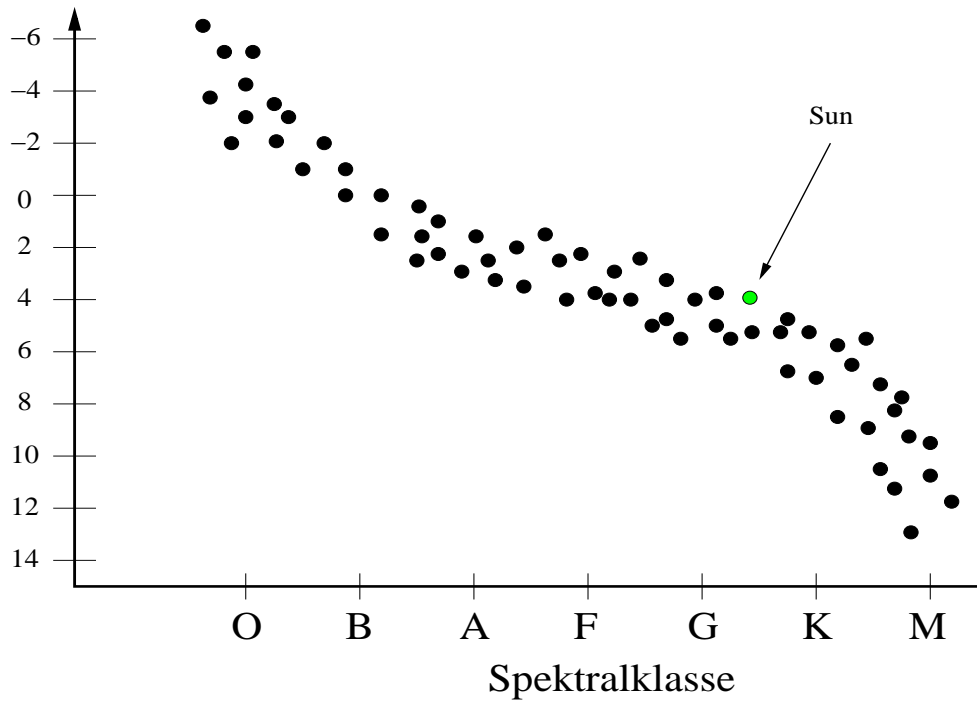
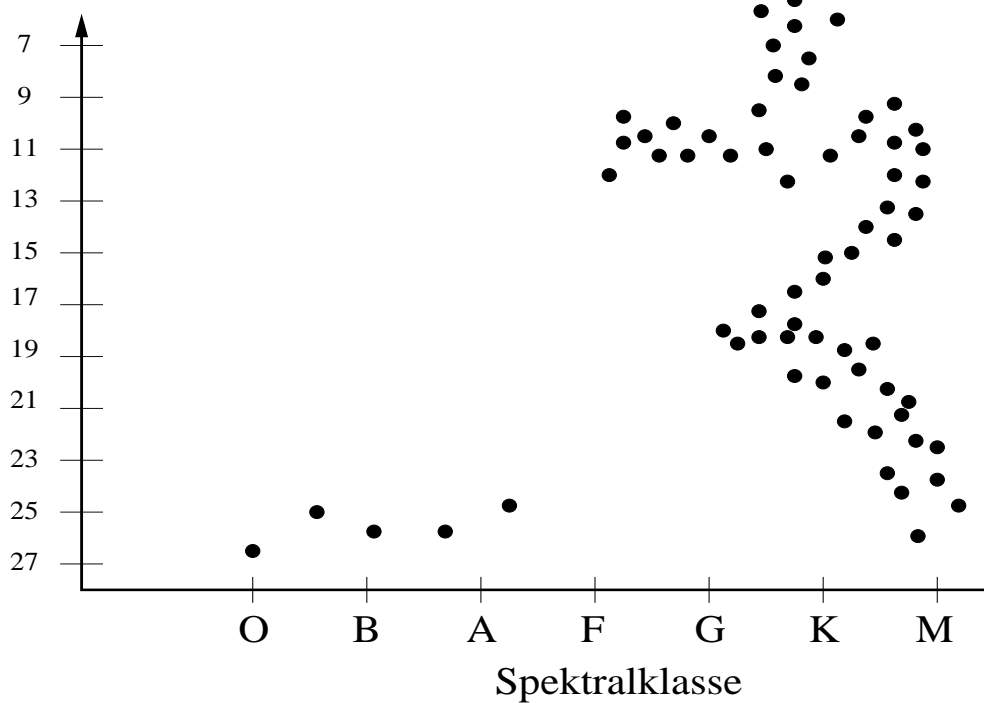


Figure 1: For oppgave 1: Målinger av tilsynelatende visuell magnitudo m_V for Cepheiden ved forskjellige tidspunkter.

Abs. magnitudo M



Tils. magnitudo m



4

Figure 2: For oppgave 1: Øverst: Generelt HR-diagram for stjerner med absolutt bolometrisk magnitudo på y-aksen. Nederst: HR-diagram for den åpne hopen med målt tilsynelatende bolometrisk magnitudo på y-aksen.

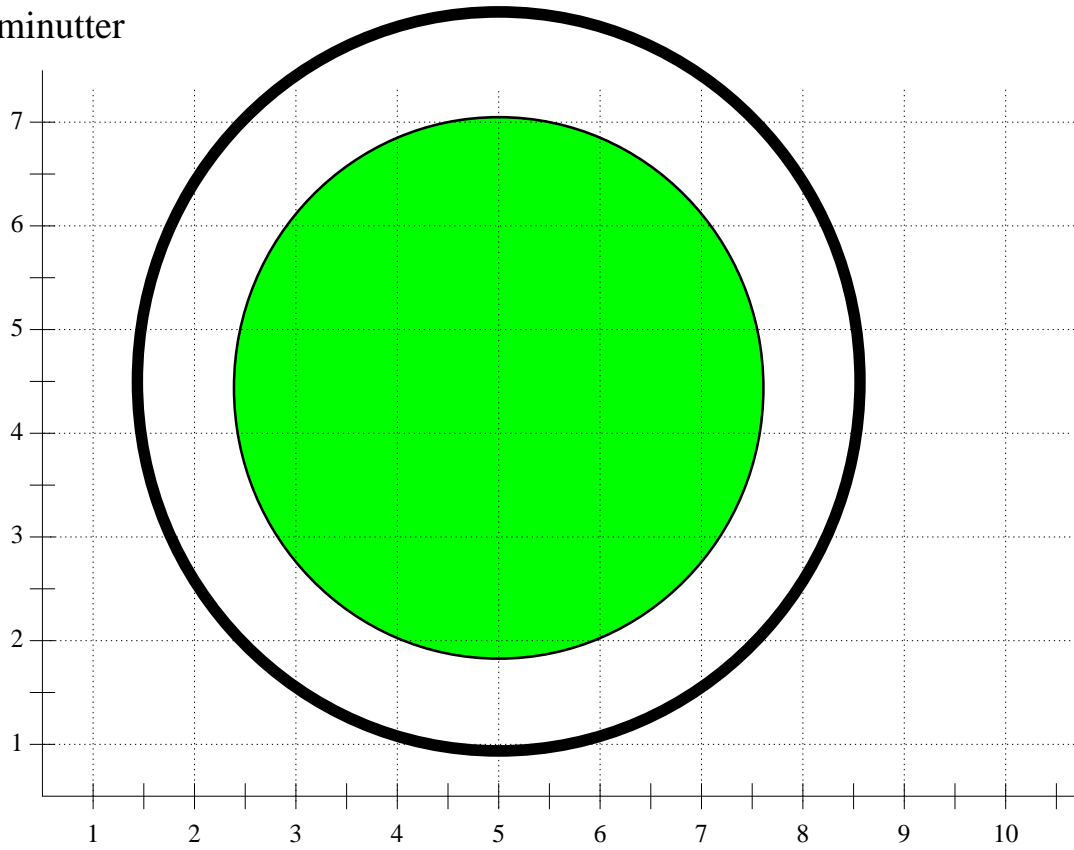
5. Vi vil gjøre et uavhengig estimat av den totale massen til galaksehopen ved å bruke virialteoremet. Anta at alle galaksene har samme masse. Forklar hva slags observasjoner du ville gjort og hvordan du ville brukt data fra disse observasjonene til å estimere forholdet mellom mørk og lysende materie i hopen.
6. (*krevende oppgave*) Anta at vi ikke kjenner Hubblekonstanten (den nøyaktige verdien på Hubblekonstanten blir fortsatt debattert og har store usikkerheter). Dermed kan vi ikke bruke egenavstanden til kvasaren eller massen til hopen som vi fant i foregående oppgaver siden beregningen av de var basert på Hubblekonstanten. Anta også at vi har brukt virialteoremet og funnet ut at det er nøyaktig fire ganger mer mørk materie enn lysende materie i hopen. Finn et estimat av Hubblekonstanten. Du vil finne en verdi som avviker en del fra den som er oppgitt i konstantene bak. Tilsvarende avvik finner man idag ved forskjellige måter å måle Hubblekonstanten på.
7. (*kort oppgave*) Den galaksen i hopen som lyser sterkest har en tilsynelatende magnitudo på 12.9. Hva er den totale luminositeten til galaksen? (gi svaret i sol-luminositeter L_{\odot})
8. En av antakelsene som brukes til å måle avstander i kosmologien er at luminositeten til den sterkeste galaksen i en galaksehopen er like stor i alle galaksehoper. Man bruker altså den mest lyssterke galaksen i en galaksehopen som en 'standard candle'. Anta at dette gjelder for alle galaksehoper og at luminositeten til den sterkeste galaksen er kjent. Anta at du nå har observert 100 galaksehoper og funnet den tilsynelatende magnituden til den mest lyssterke galaksen i alle galaksehoperne. Du har også målt rødforskyvningen til disse galaksehoperne. Du har altså to vektorer med 100 verdier. Anta at geometrien til universet er ukjent og at vi ikke har kosmologisk konstant. Hubblekonstanten er kjent. Forklar hvordan du vil gå frem for å lage et dataprogram som finner geometrien til universet basert på disse 100 målingene. Du trenger ikke skrive kommandoer, men vise strukturen til programmet.

Oppgave 3

1. (*krevende oppgave*) Einstein innførte den kosmologiske konstant for å lage en modell av universet som var statisk, altså at ekspansjonshastigheten er null nå og forblir null i all fremtid. Anta et støvdominert univers og finn forholdet mellom materie og mørk energi tetthet ρ_m/ρ_{Λ} og verdien til k (som bestemmer geometrien) i et statisk univers. Du kan ikke uten videre anta at $R_0 = 1$.
2. Vi går nå tilbake til en generell modell med Λ . Vi vet at når vi ikke har kosmologisk konstant så er forholdet mellom dekselasjonsparameteren og tetthetsparameteren gitt ved

$$q = \frac{1}{2}\Omega.$$

bueminutter



bueminutter

Figure 3: For oppgave 2: Galaksehopen modellert som en kule. Ringen rundt hopen er lyset fra kvasaren som har blitt linset.

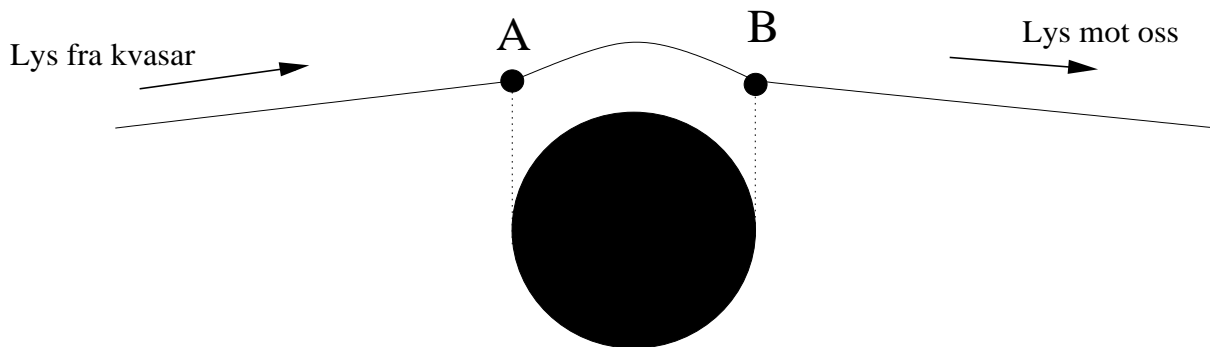


Figure 4: For oppgave 2: En mer realistisk modell for lysavbøyningen: vi antar at lyset går i rett linje frem til punktet A, deretter går det i konstant avstand R fra sentrum av hopen frem til punkt B hvor det igjen går i rett linje frem til oss.

Vis at relasjonen mellom dekselasjonsparameteren og tetthetsparameterene Ω_m og Ω_Λ i et støvdominert univers som består av materie og kosmologisk konstant er

$$q = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda.$$

hint: Den andre Friedmannlikningen har allerede den dobbelt-deriverte i seg.

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m²/kg²
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$ W/m²K⁴.
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_n = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvningslov: $\lambda_{\max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Solmassen: $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_{\odot} = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitudo: $m = -26.7$
Solas luminositet: $L_{\odot} = 3.827 \times 10^{26}$ W
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

$$P^2 = a^3$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

$$\ddot{\vec{r}} + m \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}$$

$$p = h^2/m$$

$$p = a(1 - e^2) \quad (\text{ellipse})$$

$$p = a(e^2 - 1) \quad (\text{hyperbel})$$

$$p = 1/2a \quad (\text{parabel})$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = M \vec{R}$$

$$m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_* r P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$$

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

$$L = \frac{dE}{dt}$$

$$F = \frac{dE}{dAdt}$$

$$F = \sigma T^4$$

$$n(v)dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$$

$$\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT \ln 2}{m}}$$

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right)$$

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10\text{pc}} \right)$$

$$U - B = M_U - M_B = m_U - m_B$$

$$B - V = M_B - M_V = m_B - m_V$$

$$M_V = -2.81 \log_{10} P_d - 1.43$$

$$M_V = -3.53 \log_{10} P_d - 2.13 + 2.13(B - V)$$

$$v = H_0 d_p$$

$$\tau(\lambda) = \int_0^r dr' n(r') \sigma(\lambda, r')$$

$$m(\lambda) = M(\lambda) + 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10\text{pc}} \right) + 1.086\tau(\lambda)$$

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1 \right)$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{rel}} & -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & \gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2}kT$$

$$N = \frac{M}{\mu m_H}$$

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2}.$$

$$\rho(r) \frac{d^2 r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr}$$

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$$

$$P_r = \frac{1}{3}aT^4$$

$$\rho_r = aT^4$$

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 \Delta \phi^2$$

$$\frac{M_m}{M_{\text{kg}}} = \frac{G}{c^2}$$

$$\Delta t_{\text{shell}} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \Delta t$$

$$\Delta r_{\text{shell}} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$$

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}$$

$$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \Delta \tau$$

$$\Delta \phi = \frac{L/m}{r^2} \Delta \tau$$

$$\begin{aligned}
\Delta r &= \pm \sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1 + \left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right] \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \Delta\tau \\
\frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} &= \frac{1}{2} \frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r} \\
\frac{V_{\text{eff}}(r)}{m} &= \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right]} \\
\Delta r &= \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{(L/E)^2}{r^2}} \Delta t \\
r\Delta\phi &= \pm \frac{L/E}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \Delta t \\
b &= \frac{L}{p} \\
V_{\text{eff}} &= \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \\
b_{\text{crit}} &= 3\sqrt{3}M \\
\Delta\phi &= \frac{4M}{R} \\
\theta_E &= \sqrt{\frac{4M(d_{\text{source}} - d_{\text{lens}})}{d_{\text{lens}}d_{\text{source}}}} \\
U &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_A Z_B e^2}{r} \\
r_{AB} &= \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2} \frac{n_A n_B}{\sqrt{\mu\pi}} \int_0^E dE e^{-E/kT} \sigma(E) \\
r_{AB} &\propto X_A X_B \rho^{\alpha'} T^\beta \\
\epsilon_{AB} &= \epsilon_0 X_A X_B \rho^\alpha T^\beta \\
\epsilon_{pp} &\approx \epsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4 \\
\epsilon_{0,pp} &= 1.08 \times 10^{-12} \text{Wm}^3/\text{kg}^2 \\
\epsilon_{CNO} &= \epsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20} \\
\epsilon_{0,CNO} &= 8.24 \times 10^{-31} \text{Wm}^3/\text{kg}^2 \\
\epsilon_{3\alpha} &= \epsilon_{0,3\alpha} \rho^2 X_{He}^3 T_8^{41} \\
\epsilon_{0,3\alpha} &= 3.86 \times 10^{-18} \text{Wm}^3/\text{kg}^2 \\
L &\propto M^4 \\
t &\propto 1/M^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &\propto T_{\text{eff}}^2 \\
P &= \frac{1}{3} \int_0^\infty p v n(p) dp \\
n(\vec{p}) &= n \left(\frac{1}{2\pi m k T} \right)^{3/2} e^{-p^2/(2mkT)} \\
n(E) &= \frac{g(E)}{e^{(E-E_F)/(kT)} + 1} \\
n(\vec{p}) &= \frac{1}{e^{(p^2-p_F^2)/(2mkT)} + 1} \frac{2}{h^3} \\
E_F &= \frac{h^2}{8m_e} \left(\frac{3n_e}{\pi} \right)^{2/3} \\
P &= \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{20m_e} n_e^{5/3} \\
P &= \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} n_e^{4/3} \\
\langle E_K \rangle &= \frac{3}{5} E_F \\
R_{\text{WD}} &\approx \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{4/3} \frac{h^2}{20m_e G} \left(\frac{Z}{Am_H} \right)^{5/3} M^{-1/3} \\
M_{\text{Ch}} &\approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \left(\frac{Z}{Am_H} \right)^2 \approx 1.4 M_\odot \\
\Delta s^2 &= \Delta t^2 - R^2(t) \left[\frac{\Delta r^2}{1 - kr^2} + r^2 \Delta \theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \Delta \phi^2 \right] \\
H(t) &= \frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} \\
z &= \frac{R_0}{R(t)} - 1 \\
\dot{R}^2(t) - \frac{8}{3} \pi G \rho(t) R^2(t) - \frac{\Lambda}{3} R(t)^2 &= -k \\
\ddot{R}(t) - \frac{4}{3} \pi G (\rho(t) + 3P(t)) R(t) + \frac{\Lambda}{3} R(t) &= 0 \\
\rho_C(t) &= \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \\
\Omega(t) &= \frac{\rho(t)}{\rho_C(t)} \\
\frac{d}{dt} (\rho R^{3(1+w)}) &= 0
\end{aligned}$$

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^{3(1+w)}$$

$$R(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

$$q(t) = -\frac{1}{R(t)H^2(t)} \frac{d^2 R(t)}{dt^2}$$

$$q(t) = \frac{1}{2}\Omega(t)$$

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

$$d_L = r(1+z)R_0$$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$P_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{(m_n - m_p)/kT}$$

$$\frac{n(t_1)}{n(t_2)} = e^{-\ln 2(t_1 - t_2)/\tau}$$

$$d_L = \frac{1}{H_0 q_0^2} [q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2z q_0} - 1)]$$

$$v = H_0 d_p$$