UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Avsluttende eksamen i AST1100, 16. desember 2014, 14.30 – 18.30

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 7 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling for kurset finner du bakerst

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.
Det er totalt 10 oppgaver, alle oppgavene teller likt.

Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

1. Langt inn i fremtiden så eksploderer en supernova i solas nabolag. Stjerna som eksploderte hadde en masse på 20 solmasser da den var på hovedserien.

   (a) Tegn et HR-diagram. (**Bruk en hel A4 side til diagrammet siden du skal tegne videre på dette diagrammet i de neste oppgavene**) Pass på å:

   - Ha med tall og enheter på aksene.
   - På y-aksen kan du godt bruke enheter normalisert til sola, slik at sola er 1. Pass på at y-aksen er logaritmisk og går til minst omkring 10^9 for at du skal få god plass til å tegne. Du bør ha 1-tallet ganske langt ned på y-aksen og trenger ikke å gå til lenger enn omkring 10^{-4} under 1-tallet.
   - På x-aksen skal du bruke de enhetene som er vanlige i et HR-diagram (ikke bruk spektralklasse).
   - Marker **hovedserien**, **grenen med kjempestjerner** (i kjempegrenen finner man både sub giants, red giants og horizontal branch giants), **superkjemper** (asymptotic branch giants) og **hvite dverger** i diagrammet.

(b) Du skal nå plassere stjerna på hovedserien i HR-diagrammet ditt og forklare hvordan du kommer frem til denne posisjonen. For å beregne hvor stjerna skal være i HR-diagrammet skal du kun bruke massen til stjerna som utgangspunkt, du kan **ikke** bruke informasjon som du finner i de kommende oppgaver.

(c) Skisser omtrentlig stjernas vei i HR-diagrammet fra hovedserien til den eksploderer som supernova. Marker de forskjellige stadiene i stjernas liv tydelig i diagrammet (trenger ikke noe mer her, kun posisjon og navn på hvert stadium inntegnet i HR-diagrammet)

(d) Du skal nå beregne omtrent hvor stor luminositet stjerna hadde på hovedserien. **Angi svaret i Watt**. Bruk følgende antakelser:

- kjernereaksjonene skjedde i 10% av massen til stjerna,
- kjernetemperaturen var 3.78×10^7 K,
- Kjernereaksjonene var fullstendig dominert av CNO-syklusen,
- 50% av massen var hydrogen og 0.03% av massen var karbon, nitrogen og oksygen,
- Anta at radien til stjerna er 2 solradier,
- tettheten til sjerna er uniform (den samme i hele stjerna).

2. Fremtidens vitenskapsmenn vil studere det sorte hullet som ble igjen av eksplosjonen. De sender to raketter til stjerna, romskip 1 og romskip 2.

- De to rakettene ble sendt ut fra jorda med 30 dagers mellomrom (målt på klokker på jorda).
- Vi kaller disse to utskytingene for event A og event B.
- I event A blir klokkene på jorda og i romskip 1 satt til 0.
- I event B blir klokkene i romskip 2 satt til 0.
- Romskip 1 har en fart v_1 på 99% av lyshastigheten i forhold til jorda.
- Romskip 2 har en fart v_2 på 99.8% av lyshastigheten i forhold til jorda.
- 10 dager etter oppskyting av romskip 2 (målt på klokka i romskip 2), så fikk romskip 1 motorproblemer. Vi kaller dette for event C som altså skjer i romskip 1.
- Målet vårt er å finne et uttrykk for avstanden til event C målt fra romskip 2 uttrykt med tidspunktet t_C (tiden for event C målt på klokkene på jorda).

(a) Sett inn tidspunkter og posisjoner til alle eventene A, B og C i de 3 forskjellige systemene (jorda: umerket, romskip 1: merket, romskip 2: dobbeltmerket). Sett inn tall for koordinatene som er kjent og marker de som er ukjent. Merk at for koordinatene x_C og $x_{B'}$ kan du bruke relasjoner av typen $x = vt$ for å uttrykke disse ved hjelp av andre kjente eller ukjente størrelser.

(b) Du trenger nå tidspunkter og posisjoner fra foregående oppgave. Hvis det er noen av disse du ikke fikk til så kan du finne på tall eller størrelser for disse og bruke det i denne oppgaven.

Du skal nå bruke invarians av tidromsintervallet til å sette opp et uttrykk for avstanden til event C (målt fra romskip 2) som en funksjon av t_C som eneste ukjente. Du trenger kun ett tidromsintervall mellom to av eventene (satt opp i to systemer) for å finne uttrykket.

Merk at du ikke trenger å regne ut denne avstanden, kun sette det opp som funksjon av t_C

3. Når romskip 2 er i en avstand $r = 237$ km (målt med langt-vekk-observatørens koordinater) fra det sorte hullet så har romskipet en hastighet på 10^5 km/s tangensielt på retningen mot det sorte hullet og en radiell hastighetskomponent på 5×10^4 km/s bort fra det sorte hullet. De oppgitte hastighetene er hastigheter målt av en skallobservatør som er rett ved romskipet.**Du skal anta at det sorte hullet har en masse på 4 solmasser.**

   (a) Beregn total energi per masse E/m for romskipet. Angi svaret i Joule per kg. (**hint:** For å kunne regne ut energien trenger du gjøre en tansformasjons fra et tidsintervall på langt-vekk-observatørens klokke til et tidsintervall på skallobservatørens klokke)

   (b) Hvis astronautene i dette øyeblikket skulle fått motorproblemer, vil de ble fanget av det sorte hullet eller vil de slippe vekk? (Du får bruk for flere uttrykk fra formelsamlingen her)

4. Du skal nå studere plasmaet som har blitt kastet ut fra den døende stjernen. Omkring det sorte hullet ligger det en varm ($T = 10^8$ K) gass av frie elektroner med tetthet ρ. I tillegg finnes det et elektrisk felt $\vec{E}$ i plasmaet.

   Du skal skrive en kode for å simulere elektronene i plasmaet og beregne hvilken innvirkning det elektriske feltet har på trykket i plasmaet. Du kommer til å trenge sammenhengen mellom kraft på en ladning q og størrelsen på det elektriske feltet $\vec{F} = q\vec{E}$.

   Du skal skrive koden i to steg (deloppgaver):

   (a) Du skal lage en kode som generer gasspartiklene (elektronene) i en fiktiv boks med sidelengder L. Bruk variabelnavn `rho` for massetetthet av elektroner, `L` for bokslengde, `m` for elektronmasse, `T` for temperatur og anta at alle disse størrelsene samt alle kjente konstanter allerede er definert når du starter koden. Koden kan følge denne fremgangsmåten:

      i. Beregn antall partikler i boksen.

ii. Generer posisjonen til partiklene i boksen med en uniform sannsynlighetsfordeling (anta at det finnes en funksjon `uniform` som gir deg et tilfeldig tall som er uniformt fordelt mellom 0 og 1)

iii. Generer gasspartiklene i boksen med tilfeldige hastigheter trukket fra en Gaussisk sannsynlighetsfordeling:

$$P(\vec{v}) = P(v_x)P(v_y)P(v_z)$$

der

$$P(v_x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-(v_x^2)/(2\sigma^2)}$$

der $v_x = [-\infty, \infty]$ og tilsvarende for v_y og v_z. $P(v_x)$ er sannsynligheten for at partikkelen har en hastighet v_x og tilsvarende for $P(v_y)$ og $P(v_z)$. Her må du bruke Maxwell-Boltzmann-fordelingsfunksjonen bak (anta at det finnes en funksjon `gauss(mu,sigma)` som gir deg et tilfeldig tall som er Gaussisk fordelt, du trenger å spesifiserer middelverdi og standardavvik til denne funksjonen).

(b) For å beregne trykket på to vegger i boksen skal du nå gjøre følgende:

- Anta at at det elektriske feltet er homogent og rettet kun i positiv x-retning.
- Du skal nå bevege disse partiklene N tidssteg fremover i tid.
- Anta at tidsstegene er svært små og N er så liten av den totale tiden i løpet av N tidssteg er meget liten.
- Du skal beregne det totale trykket ved å midle over trykket som elektronene totalt utøver mot veggene i løpet av disse N tidsstegene.
- Du skal bruke partiklene som treffer veggene i x-retning ved $x = 0$ og veggen i y-retning ved $y = 0$ til å beregne gasstrykket (elektrontrykket) på hver av de to veggene.
- For å gjøre det enkelt så bare fortsetter du å oppdatere de partiklene som har gått gjennom en vegg og ut av boksen som om ingenting hadde skjedd.
- Anta at variablene `q` for elektronladningen, `E` for den elektriske feltstyrken og tidssteget `dt` allerede eksisterer og er forhåndsdefinerte.

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_\mathrm{e} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_\mathrm{max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) $= 1.60 \times 10^{-19}$ J
Massen til jorda: $M_j = 5.97 \times 10^{24}$ kg
Radien til jorda: $R_j = 6378 \times 10^3$ m
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas absolutte magnitude: $M = 4.83$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Solas forventede levetid: $t_\mathrm{life} = 10^{10}$år
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU $= 1.5 \times 10^{11}$ m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly $= 9.47 \times 10^{15}$ m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

celestmekanikk/ekstrasolare planeter/virialteoremet:

$P^2 = a^3$

$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3$

$\ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$

$r = \frac{p}{1+e\cos f}$

$m = G(m_1+m_2)$

$p = h^2/m$

$p = a(1-e^2)$ (ellipse)

$p = a(e^2-1)$ (hyperbel)

$p = 1/2a$ (parabel)

$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = M\vec{R}$

$m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$

$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

$\rho(r) = \frac{v^2(r)}{4\pi G r^2}$

$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1+(r/R)^2}$

$\langle K \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle$

$U = -\frac{3GM^2}{5R}$

stråling/magnituder/avstander:

$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)}-1}$

$I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dA dt d\nu}$

$L = \frac{dE}{dt}$

$F = \frac{dE}{dAdt}$

$F = \sigma T^4$

$B = dp$

$n(v)dv = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$

$\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT\ln 2}{m}}$

$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$

$m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right)$

$U - B = M_U - M_B = m_U - m_B$

$B - V = M_B - M_V = m_B - m_V$

$M_V = -2.81\log_{10} P_d - 1.43$

$M_V = -3.53\log_{10} P_d - 2.13 + 2.13(B-V)$

$v = H_0 d_p$

$\tau(\lambda) = \int_0^r dr' n(r')\sigma(\lambda, r')$

$m(\lambda) = M(\lambda) + 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right) + 1.086\tau(\lambda)$

$\lambda_{\max} T = 0.0029$ m K

spesiell relativitetsteori:

$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$

$V_\mu = \gamma(1, \vec{v})$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mathrm{rel}} & -v_{\mathrm{rel}}\gamma_{\mathrm{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\mathrm{rel}}\gamma_{\mathrm{rel}} & \gamma_{\mathrm{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stjerneutvikling, begynnelsen/hovedserien:

$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2}kT$

$N = \frac{M}{\mu m_H}$

$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}$

$\rho(r)\frac{d^2 r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr}$

$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$

$P_r = \frac{1}{3}aT^4$

$\rho_r = aT^4$

generell relativitetsteori:

$\Delta s^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\Delta t^2 - \frac{\Delta r^2}{1-\frac{2M}{r}} - r^2\Delta\phi^2$

$\frac{M_{\mathrm{m}}}{M_{\mathrm{kg}}} = \frac{G}{c^2}$

$\Delta t_{\mathrm{shell}} = \sqrt{1-\frac{2M}{r}}\Delta t$

$\Delta r_{\mathrm{shell}} = \frac{\Delta r}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}$

$\frac{E}{m} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}$

$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau}$

$\Delta t = \frac{E/m}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$

$\Delta\phi = \frac{L/m}{r^2}\Delta\tau$

$\Delta r = \pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[1+\left(\frac{L/m}{r}\right)^2\right]\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\Delta\tau$

$\frac{V_{\mathrm{eff}}(r)}{m} = \frac{1}{2}\frac{(L/m)^2}{r^2} - \frac{M}{r}$

$\frac{V_{\mathrm{eff}}(r)}{m} = \sqrt{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[1+\frac{(L/m)^2}{r^2}\right]}$

$\Delta r = \pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{(L/E)^2}{r^2}}\Delta t$

$r_{\mathrm{crit}} = \frac{(L/m)^2}{2M}\left(1-\sqrt{1-\frac{12M^2}{(L/m)^2}}\right)$

$r\Delta\phi = \pm\frac{L/E}{r}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\Delta t$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}} - 1$

$b = \frac{L}{p}$

$V_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2M}{r}}$

$b_{\mathrm{crit}} = 3\sqrt{3}M$

$\Delta\phi = \frac{4M}{R}$

$\theta_E = \sqrt{\frac{4M(d_{\mathrm{source}}-d_{\mathrm{lens}})}{d_{\mathrm{lens}}d_{\mathrm{source}}}}$

kjernereaksjoner:

$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_AZ_Be^2}{r}$

$r_{AB} = \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2}\frac{n_An_B}{\sqrt{\mu\pi}}\int_0^E dEe^{-E/kt}\sigma(E)$

$r_{AB} \propto X_AX_B\rho^{\alpha'}T^{\beta}$

$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_0X_AX_B\rho^{\alpha}T^{\beta}$

$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp}X_H^2\rho T_6^4$

$\varepsilon_{0,pp} = 1.08\times10^{-12}\mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$

$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_{0,CNO}X_HX_{CNO}\rho T_6^{20}$

$\varepsilon_{0,CNO} = 8.24\times10^{-31}\mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$

$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_{0,3\alpha}\rho^2X_{He}^3T_8^{41}$

$\varepsilon_{0,3\alpha} = 3.86\times10^{-18}\mathrm{Wm}^6/\mathrm{kg}^3$

stjerners egenskaper/siste stadier i stjerneutvikling:

$L \propto M^4$

$t \propto 1/M^3$

$M \propto T_{\mathrm{eff}}^2$

$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty p\,v\,n(p)\,dp$

$n_{\mathrm{norm}}(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/(2kT)}$

$n(E) = \frac{g(E)}{e^{(E-E_F)/(kT)}+1}$

$n(\vec{p}) = \frac{1}{e^{(p^2-p_F^2)/(2mkT)}+1}\frac{2}{h^3}$

$n_{\mathrm{norm}}(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/(2kT)}$

$n(v)dv = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-mv^2/(2kT)}4\pi v^2dv$

$E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3n_e}{\pi}\right)^{2/3}$

$\frac{T}{n_e^{2/3}} < \frac{h^2}{12m_ek}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}$

$P = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{20m_e}n_e^{5/3}$

$P = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}n_e^{4/3}$

$\langle E_K\rangle = \frac{3}{5}E_F$

$R_{\mathrm{WD}} \approx \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{20m_eG}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^{5/3}M^{-1/3}$

$M_{\mathrm{Ch}} \approx \frac{\sqrt{3/2}}{2\pi}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\left(\frac{Z}{Am_H}\right)^2 \approx 1.4M_\odot$