Løsningsforslag eksamen H12 AST1100

Aleksander Seland

December 6, 2014

Oppgave 1

Anta at en fjern stjerne har blitt observert over et lengere tidsrom (flere tusen år) og radien til stjerna viser seg å være konstant med tiden. Forklar med ord (uten likninger, 2-3 setninger) hva dette forteller oss om de fysiske forholdene inne i stjerna.

Svar:

En konstant radius betyr at det ikke skjer noen store forandringer inne i stjernekjernen. Med andre ord, vi har hydrostatisk likevekt ettersom trykket innenfra utjevner gravitasjonen innover + trykket ovenfra for alle masselementer dm i stjerna.

Oppgave 2

I denne oppgaven skal du beregne luminositeten til denne stjerna som vi skal kalle stjerne X (angi svaret i Watt). I tillegg til noen størrelser bak, så får du følgende hjelp:

- *Øverst i figur 1 ser du et bilde av stjerne X tatt fra jorda. Nederst i den samme figuren ser du et bilde av den samme stjerna tatt fra en romsonde som går i bane rundt Jupiter. De to bildene ble tatt samtidig og de ble tatt på et tidspunkt da linja fra jorda til Jupiter er omtrent vinkelrett på linja fra jorda til stjerna (og Jupiter til stjerna). Avstanden mellom jorda og Jupiter på dette tidspunktet er 4 AU. Anta at stjerne X er mye nærmere oss enn alle de andre stjernene som du ser på bildet.*
- *Stjerna er en av de aller sterkeste stjernene på himmelen.*

Du må også bruke noen antakelser, spesifiser hvilke.

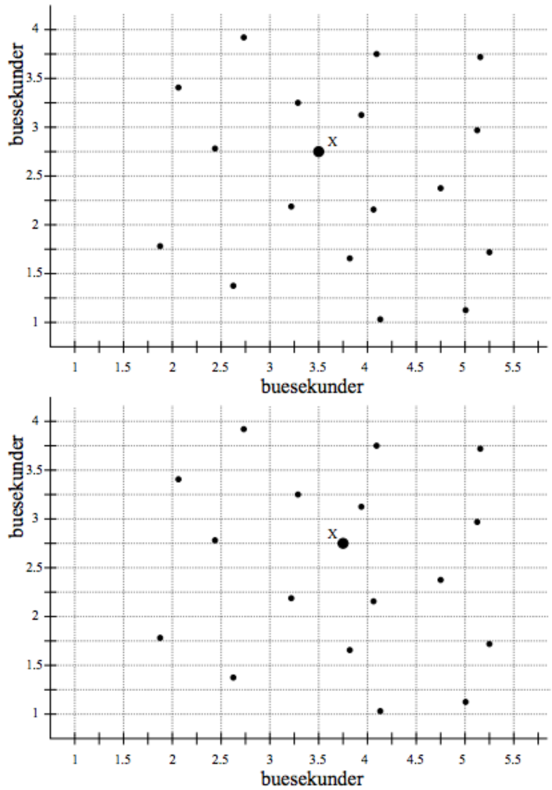


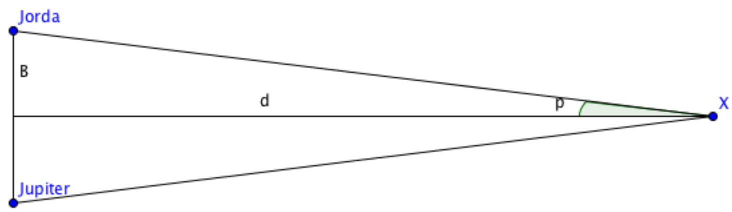
Figure 1: Figur til oppgave 2

Svar:

Antakelser:

- "En av de sterkeste på himmelen" vil si en tilsynelatende (apparent) magnitude ≈ 1.
- Kan bruke paralakse siden vi antar at stjernene bak er mye lengre unna enn stjernen vi iaktar. Dermed er parallaksen for disse mye mindre enn for stjernen vi ser på, og vi kan se bort ifra dem.
- Uniform fluks fra stjerna X.

Formler:



For små vinkler målt i radianer har vi

$$B = d \tan p \approx dp$$

Videre har vi at

$$m - M = 5 \log_{10}\left(\frac{d}{10\text{pc}}\right)$$

hvor m er tilsynelatende magnitude, M er absolutt magnitude og d er distansen.

Til slutt trenger vi at

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

Der m_1 og m_2 er magnituder sett fra ett og samme sted. F_1 og F_2 er den tilsvarende fluksen observert på samme sted.

Løsning:

Dersom vi antar uniform fluks, kan vi bruke $F = \dfrac{L}{4\pi r^2}$ til å skrive om siste formel:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10}\left(\frac{L_1/4\pi r_1^2}{L_2/4\pi r_2^2}\right)$$

I denne formelen er m_i magnituden observert i en gitt avstand r_i fra stjerna, og dette vil da også være radien i kuleskallet vi observerer fluksen gjennom. Vi kan få $r_1 = r_2$ dersom vi velger å bruke absolutte magnituder, da disse er definert som magnituden sett fra en avstand på 10pc. Velger vi å gjøre dette, så får vi at:

$$M_1 - M_2 = -2.5 \log_{10}\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$$

Videre er vi ute etter å redusere antall variabler, så vi bruker absolutt magnitude og luminositet for sola, og setter derfor $M_2 = M_\odot$ og $L_2 = L_\odot$. Setter også $M_1 = M_X$ og $L_1 = L_X$.

$$M_X = -2.5 \log_{10}\left(\frac{L_X}{L_\odot}\right) + M_\odot$$

Da må finne ut hva M_X er. Vi har oppgitt stjernas tilsynelatende magnitude, samt nok info til å utføre parallakseberegninger.

$$\begin{aligned} B &= dp \\ d &= \frac{B}{p} \end{aligned}$$

hvor $B = 2AU$ og $p = \frac{1}{2} \cdot 0.25''$ (se tegning). Før vi kan bruke formelen, må vi gjøre om buesekundene til radianer:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{0.25''}{60 \cdot 60} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$d = \frac{2AU}{\frac{1}{2} \cdot \frac{0.25''}{60 \cdot 60} \cdot \frac{\pi}{180}} = \frac{4}{\frac{0.25''}{3600} \cdot \frac{\pi}{180}} \approx 3.3 \cdot 10^6 AU$$

$$1\text{pc} = 206265\text{AU}$$

$$\frac{3.3 \cdot 10^6 \text{AU}}{206265\text{AU}} \approx 15.99\text{pc} \approx 16\text{pc}$$

$$d = 16\text{pc}$$

Da har vi at stjernas absolutte magnitude er gitt av

$$\begin{aligned} m_X - M_X &= 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10\text{pc}} \right) \\ M_X &= m_X - 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10\text{pc}} \right) \\ &= 1 - 5 \log_{10} \left(\frac{16\text{pc}}{10\text{pc}} \right) \\ &= 1 - 5 \log_{10} (1.6) \\ &\approx -0.021 \end{aligned}$$

Setter så dette inn i formelen for luminositet.

$$\begin{aligned} M_X &= -2.5 \log_{10} \left(\frac{L_X}{L_\odot} \right) + M_\odot \\ -0.021 &= -2.5 \log_{10} \left(\frac{L_X}{L_\odot} \right) + 4.83 \end{aligned}$$

Isolerer L_X

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{L_X}{L_\odot} \right) &= \frac{4.83 + 0.021}{2.5} \\ \frac{L_X}{L_\odot} &= 10^{1.94} \\ L_X &= 10^{1.94} \cdot L_\odot \\ L_X &= 10^{1.94} \cdot 3.827 \cdot 10^{26}\text{W} \\ &\approx 3.3 \cdot 10^{28}\text{W} \end{aligned}$$

Alternativ løsning:

$$
\begin{aligned}
m_1 - m_2 &= -2.5\log_{10}\left(\frac{L_1/4\pi r_1^2}{L_2/4\pi r_2^2}\right) \\
m_X - m_\odot &= -2.5\log_{10}\left(\frac{L_X r_\odot^2}{L_\odot r_X^2}\right) \\
\frac{m_X - m_\odot}{-2.5} &= \log_{10}\left(\frac{L_X r_\odot^2}{L_\odot r_X^2}\right) \\
\frac{L_X r_\odot^2}{L_\odot r_X^2} &= 10^{(m_X - m_\odot)/(-2.5)} \\
L_X &= L_\odot \frac{r_X^2}{r_\odot^2} 10^{(m_X - m_\odot)/(-2.5)} \\
L_X &= 3.827\cdot 10^{26}\text{W}\frac{\left(3.3\cdot 10^6\text{AU}\right)^2}{(1\text{AU})^2}10^{(1+26.7)/(-2.5)} \\
&\approx 3.5\cdot 10^{28}\text{W}
\end{aligned}
$$

Forskjell i svarene pga unøyaktigheter i konstanter bakerst i boka. Bruker man tilsynelatende magnitude på sola på 26.74, får man samme avrundede svar f.eks. Jeg har brukt parallakse for å finne r_X og brukt AU svaret i den forrige løsningen. Den offisielle fasiten bruker $3.3\cdot 10^{28}$W videre i regninene sine, derfor gjør jeg det å for å kvalitetssikre regningen.

Oppgave 3

I figur 2 ser du mottatt fluks fra stjerna som funksjon av bølgelengde. Bruk dette til å finne radien til stjerna. Anta sort legeme. Hvis du ikke får til oppgaven bruk solradien (som er feil svar) i andre oppgaver hvor du trenger radien.

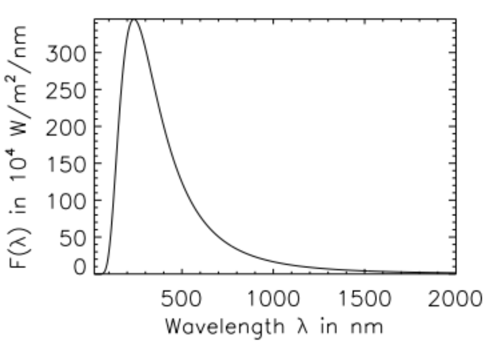


Figure 2: Figur til oppgave 3

Svar:

Antakelser:

- Sort legeme (gitt i teksten)
- Uniform fluks

Formler:

$$\begin{aligned} F &= \sigma T^4 \\ \lambda_{max} T &= 2.9 \cdot 10^{-3}\text{mK} \\ L &= F \cdot A \end{aligned}$$

Utregning:

Luminositeten er den totale fluksen gjennom et kuleskall med radius r. Dersom vi legger dette kuleskallet på overflaten til stjerna får vi:

$$L = F \cdot 4\pi r^2$$

Vi bytter ut F og får

$$\begin{aligned} L &= \sigma T^4 \cdot 4\pi r^2 \\ r &= \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T^4}} \\ T &= \frac{2.9 \cdot 10^{-3}\text{mK}}{\lambda_{max}} \end{aligned}$$

Leser av λ_{max} fra grafen som $\approx 225\text{nm} = 225 \cdot 10^{-9}\text{m}$.

$$T = \frac{2.9 \cdot 10^{-3}\text{mK}}{225 \cdot 10^{-9}\text{m}} \approx 12888.88\text{K} \approx 12900\text{K}$$

$$r = \sqrt{\frac{3.3 \cdot 10^{28}\text{W}}{4\pi \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}\text{W/m}^2\text{K}^4 \cdot (12900\text{K})^4}} \approx 1.29 \cdot 10^9\text{m} \approx 1.3 \cdot 10^9\text{m}$$

Litt sprik fra offisielle fasiten, men jeg tror det bare er snakk om en avrundingsfeil. Luminositeten er hentet fra forrige oppgave, og svaret avrundet blir det samme uavhengig av om man bruker 3.3 eller 3.5 på luminositeten. Svaret dersom man bruker 3.5 blir $1.33 \cdot 10^9\text{m} \approx 1.3 \cdot 10^6\text{km}$.

Oppgave 4

Anslå den totale massen til stjerna. Anta hovedseriestjerne. Hvis du ikke får til denne oppgaven skal du bruke 1 solmasse (som er feil svar) videre i oppgaven.

Svar:

Antakelser:

- Hovedseriestjerne (gitt i oppgaven)
- Antar at det er snakk om lav eller medium masse på hovedserien.

Formler:

For hovedseriestjerner med lav til medium masse har vi:

$$L \propto M^4$$

Utregning:

$$L = kM^4$$

Vi trenger noen størrelser vi kjenner for å kvitte oss med k. Derfor velger vi å bruke vår kjære sol siden dette er en stjerne i samme masseklasse som vi antar at stjerna vi ser på er i.

$$\begin{aligned}
\frac{L_X}{L_\odot} &= \frac{kM_X^4}{kM_\odot^4} \\
\frac{L_X}{L_\odot} &= \frac{M_X^4}{M_\odot^4} \\
M_X &= M_\odot \sqrt[4]{\frac{L_X}{L_\odot}} \\
&= 2 \cdot 10^{30}\text{kg} \cdot \sqrt[4]{\frac{3.3 \cdot 10^{28}\text{W}}{3.827 \cdot 10^{26}\text{W}}} \\
&\approx 6 \cdot 10^{30} = 3M_\odot
\end{aligned}$$

Lander på samme svar uavhengig av om 3.3 eller 3.5 brukes i L_X.

Oppgave 5

Anta at tettheten til stjerna er den samme overalt, og at stjerna består av ideel gass. Anta i denne oppgaven (i senere oppgaver skal du ikke bruke denne antakelsen) at stjerna består uteklukkende av hydrogen. Bruk informasjonen fra oppgave 1 til å vise at temperaturen i sentrum av stjerna kan tilnærmes som

$$T_C \approx \frac{m_H G M}{2kR}$$

der m_H er hydrogenmassen, M er massen til stjerna og R er radien. Beregn også tallverdien for temperaturen i sentrum av stjerna. ***Hint:*** *Du bør begynne med å finne et uttrykk for $M(r)$, den totale massen innenfor radien R fra sentrum av stjerna. Hvis du ikke får til denne oppgaven kan du bruke $T = 17 \cdot 10^6 K$ i neste oppgave.*

Svar:

Antakelser:

- Uniform tetthet (oppgaveteksten)
- Ideell gass (oppgaveteksten)
- Utelukkende hydrogen (oppgaveteksten)
- Hydrostatisk likevekt (oppgave 1)
- Hovedseriestjerne (oppgave 1)

Formler:

Uniform tetthet:

$$\rho = \frac{M}{V}$$

der M er den totale massen og V er det totale volumet.

Hydrostatisk likevekt:

$$\rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} = -\rho(r)g(r) - \frac{dP(r)}{dr} \quad \text{hvor} \quad g(r) = G\frac{M(r)}{r^2}$$

der $P(r)$ er trykket i avstand r, $\rho(r)$ er tettheteten i avstand $r$og $g(r)$ er gravitasjonelle aksellerasjonen inn mot kjernen i avstand r. Denne er bestemt av hvor mye masse som er innenfor en gitt radius r. De gravitasjonelle virkningene fra massen over tas ikke med i betraktningen. Dette fordi all masse utenfor en avstand r er fordelt i et kuleskall, og det kan vises at alle gravitasjonelle krefter fra dette kuleskallet, dersom vi befinner oss innenfor, nulles ut.

Ideell gass:

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H}$$

der ρ er tettheten, k er en konstant, T er temperatur, μ er den midlere atommassen målt i m_H. og m_H er hydrogenmassen.

Utregning:

Siden vi har uniform tetthet har vi at

$$\rho = \frac{M(r)}{V(r)}$$

der $M(r)$ og $V(r)$ er masse og volum i en kule med radius r inne i stjerna. Vi får

$$\begin{aligned} M(r) &= \rho V(r) \\ &= \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Videre har vi hydrostatisk likevekt, og siden alle elementer i stjerna er i ro, skjer det ingen aksellerasjon i noen retning og $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$. Vi får at

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)g(r)$$

Vi husker at vi har uniform tetthet samt ideell gass, og får dermed at

$$\begin{aligned}
\frac{dP(r)}{dr} &= -\rho G\frac{M(r)}{r^2} \\
\frac{d}{dr}\left(\frac{\rho kT}{\mu m_H}\right) &= -G\frac{4\rho^2\pi r^3}{3r^2} \\
\frac{\rho k}{\mu m_H}\frac{dT}{dr} &= -\frac{4}{3}G\rho^2\pi r
\end{aligned}$$

Hvor jeg har brukt på venstre siden at det kun er temperaturen som varierer med radius. Til slutt får vi at

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dr} &= -\frac{4G\rho\pi r\mu m_H}{3k} \\
dT &= -\frac{4G\rho\pi r\mu m_H}{3k}dr
\end{aligned}$$

Vi integrerer opp fra kjernen og ut til kanten av stjerna. Antar at temperaturen på overflaten er ≈ 0 i forhold til temperaturen i kjernen.

$$\begin{aligned}
\int_{T_C}^{0} dT &= -\frac{4G\rho\pi\mu m_H}{3k}\int_0^R r\,dr \\
-T_C &= -\frac{4G\rho\pi\mu m_H}{3k}\cdot\frac{1}{2}R^2
\end{aligned}$$

For mange symboler, må kunne skrive om en av disse. Jeg ser i sluttformelen at jeg skal ha M med, som er den totale massen. Jeg vet at

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

hvor jeg har brukt den totale massen og hele radien til stjerna. Dette kan jeg gjøre siden det er uniform tetthet. Setter jeg dette inn i uttrykket over lander jeg på

$$T_C = \frac{GM\mu m_H}{2kR}$$

Til slutt observerer jeg at $\mu = 1$ siden vi bare har hydrogen (midlere atomvekt i antall $m_H = 1$). Vi får

$$T_C \approx \frac{m_H GM}{2kR}$$

Tilnærmet lik fordi vi gjorde en forenkling i grensene i temperaturintegralet. Q.E.D

Tallverdien til T_C er:

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{1.6726 \cdot 10^{-27} \cdot 6.673 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 1.3 \cdot 10^{9}} (\mathrm{K}) \\ &\approx 18.6 \cdot 10^{6} \mathrm{K} \end{aligned}$$

Svaret i fasiten er $20.2 \cdot 10^6$K, og det får man dersom man bruker 1.2 istedet for 1.3 på radien.

Oppgave 6

Gjør beregninger for å anslå hvilken kjernereaksjon som er dominerende helt i sentrum av stjerna ved å bruke svaret fra foregående oppgave. Du kan anta at stjerna er forholdsvis nydannet og bruke dette til å gjøre tilnærmelser. Anta at i universet generelt så består gass-skyer normalt av omtrent 75% hydrogen og 24% helium og i middel omkring 1 % av de tyngre grunnstoffene. For å svare på oppgaven bør du beregne omtrentlig energiproduksjon fra to mulige kjernereaksjoner og sammenlikne hvilken som er størst.

Svar:

Antakelser:

- Nydannet stjerne, ingredienser: 75% hydrogen, 25% helium 1% tyngre grunnstoffer
- Hydrogenfusjon og CNO-syklus.

Formler:

Hydrogenfusjon:

$$\varepsilon_{pp} \approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4 \quad \text{hvor} \quad \varepsilon_{0,pp} = 1.08 \cdot 10^{-12} \mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$$

CNO-syklus

$$\varepsilon_{CNO} \approx \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20} \quad \text{hvor} \quad \varepsilon_{0,CNO} = 8.24 \cdot 10^{-31} \mathrm{Wm}^3/\mathrm{kg}^2$$

hvor X_H er andelen hydrogen i stjernen som desimal, X_{CNO} er andelen tyngre grunnstoff i desimal og T_6 er temperaturen i antall millioner Kelvin. ε_0 er en konstant som tar med blant annet effekten fra en enkeltreaksjon.

Vi husker fra tidligere at

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{6 \cdot 10^{30} \mathrm{kg}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (1.3 \cdot 10^9 \mathrm{m})^3}$$

Utregning:

Vi foretar de to utregningene som det blir bedt om:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{pp} &\approx \varepsilon_{0,pp} X_H^2 \rho T_6^4 \\
&= 1.08 \cdot 10^{-12} \cdot 0.75^2 \cdot \frac{6 \cdot 10^{30}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (1.3 \cdot 10^9)^3} \cdot 18.6^4 \\
&\approx 5 \cdot 10^{-5} \mathrm{W/kg}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{CNO} &\approx \varepsilon_{0,CNO} X_H X_{CNO} \rho T_6^{20} \\
&= 8.24 \cdot 10^{-31} \cdot 0.75 \cdot 0.01 \cdot \frac{6 \cdot 10^{30}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (1.3 \cdot 10^9)^3} \cdot 18.6^{20} (\mathrm{W/kg}) \\
&\approx 10^{-4} \mathrm{W/kg}
\end{aligned}$$

CNO dominerer! Svarene i offisielle fasiten oppnås ved å bruke $T_6 = 20.2$ og $R = 1.2 \cdot 10^9$, men konklusjonen er den samme.

Oppgave 7

Anta at det i en eksplosjon på overflaten av stjerna blir sendt ut en gassklump med masse 10^{24}kg med hastighet 300 km/s rett opp fra overflaten til stjerna. Vi skal nå regne relativistisk for å skje hva som skjer med gassklumpen. I relativitetsteorien pleier vi å regne både tider, lengder og masser i meter siden det gjør at vi dermed kan sette $G = 1$ og $c = 1$. Beregn massen til stjerna, samt hastigheten til gassklumpen ved å bruke disse enhetene.

Svar:

Antakelser:

- Ingen spesielle

Formler:

Enhetskonvertering:

$$\frac{M_m}{M_{kg}} = \frac{G}{c^2}$$

Der M_m er massen i meter, M_{kg}er massen i kg, G er gravitasjonskonstanten, og c er lysfarten.

Utregning:

Vi ser at

$$M_m = \frac{G}{c^2} M_{kg}$$

altså får vi:

$$\begin{aligned} M_X \cdot \frac{G}{c^2} &= 6 \cdot 10^{30} \cdot \frac{6.673 \cdot 10^{-11}}{(3.00 \cdot 10^8)^2} \\ &\approx 4448.66 \approx 4449\text{m} \end{aligned}$$

Svaret i offisielle fasiten er 4447, antar tastefeil hvor 6.673 har blitt byttet ut med 6.671.

Videre gjør vi farten dimensjonsløs ved å sette ny hastighet til

$$v_{dimensjonsl\phi s} = \frac{v}{c} = \frac{3 \cdot 10^5 \text{m/s}}{3 \cdot 10^8 \text{m/s}} = 1 \cdot 10^{-3} = 0.001$$

Oppgave 8

Ta hensyn til relativitetsteorien både for gravitasjonsfelt og hastighet. Hvor langt ut fra overflaten av stjerna kommer denne gassklumpen før den faller ned igjen? Angi svaret i kilometer.

Svar:

Antakelser:

- Energien er bevart
- En skallobservatør observerer gassklumpen innen et veldig kort tidsrom, slik at observatøren opplever et lokalt inertialsystem og kan operere med spesiell relativitetsteori.
- Ingen påvirkning i ϕ retning.

Formler:

Energi per masse:

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$$

der E er energi, m er masse, M er den totale massen til objektet som kurver rommet. r er avstanden fra massesenteret slik langtvekk-observatøren ser den.

Lorentz faktoren (kun for spesiell relativitetsteori):

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma} \iff \frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

Tidsforskjell mellom langt-vekk og skjell:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_{shell}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

Utregning:

Vi er ute etter maksimale avstanden fra stjerna gassen når. Med andre ord, vi er ute etter radien til kuleskallet der gassen stopper opp. Desverre vet vi ikke noe mer om denne avstanden enn at farten er 0 i radiell retning i dette punktet. Vi må derfor få inn skallobservatørene inn i uttrykket for energi for i det hele tatt å kunne finne ut når hastigheten er 0.

$$\begin{aligned}\frac{E}{m} &= \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}\cdot\frac{dt_{sh}}{dt_{sh}} \\ &= \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{dt_{sh}}\cdot\frac{dt_{sh}}{d\tau}\end{aligned}$$

Nå bruker vi at for et kort tidsrom dt opplever skallobservatørene et lokalt inertialsystem, dermed har vi at $dt_{sh}/d\tau = \gamma = 1/\sqrt{1-v_{sh}^2}$ for skallobservatørene. Videre har vi fra tidsforskjell formelen at $dt/dt_{sh} = 1/\sqrt{1-2M/r}$. Setter vi dette inn i uttrykket får vi:

$$\begin{aligned}\frac{E}{m} &= \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v_{sh}^2}} \\ \frac{E}{m} &= \frac{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}{\sqrt{1-v_{sh}^2}} \\ \frac{E}{m} &= \sqrt{\frac{1-\frac{2M}{r}}{1-v_{sh}^2}}\end{aligned}$$

Videre setter vi opp to skall, et ved overflaten der farten er den vi regnet ut tidligere: $v_{sh} = 0.001$ og ett der gassen har $v = 0$. Vi dermed at:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{E}{m}\right)_{\text{overflate}} &= \left(\frac{E}{m}\right)_{\text{høyeste punkt}} \\
\sqrt{\frac{1-\frac{2M}{R}}{1-v_{overflate}^2}} &= \sqrt{1-\frac{2M}{r_{max}}} \\
\frac{1-\frac{2M}{R}}{1-v_{overflate}^2} &= 1-\frac{2M}{r_{max}} \\
\frac{2M}{r_{max}} &= 1-\left(\frac{1-\frac{2M}{R}}{1-v_{overflate}^2}\right) \\
r_{max} &= \frac{2M}{1-\left(\frac{1-\frac{2M}{R}}{1-v_{overflate}^2}\right)} \\
&= \frac{2\cdot 4449}{1-\left(\frac{1-\frac{2\cdot 4449}{1.3\cdot 10^9}}{1-0.001^2}\right)}(\text{m}) \\
&\approx 1.52\cdot 10^9\text{m} \approx 1.5\cdot 10^6\text{km}
\end{aligned}
$$

Svaret i fasiten oppnås ved å bruke 1.2 istedet for 1.3 for R. Det at jeg bruker 4449 istedet for 4447 har ikke noe stort utslag. Avstanden over stjerneoverflaten vil da være

$$r_{max} - R = 1.5\cdot 10^6\text{km} - 1.3\cdot 10^6\text{km} = 0.2\cdot 10^6\text{km}$$

Altså ca 200000km over stjerneoverflaten.

Oppgave 9

Etter en stund vil stjerna forlate hovedserien ('main sequence'). Forklar stjernas overgang fra hovedserie til å bli 'sub giant', ta med: hva som er årsaken til at stjerna forlater hovedserien, hvordan stjerna endrer seg (temperatur, luminositet, forhold i kjernen) og hvilke fysiske prosesser som er årsaken til at stjerna endrer seg på denne måten. Bruk maksimalt omkring en halv til en side (avhengig av skriftstørrelse).

Svar:

En stjerne forlater hovedserien når hydrogenet i kjernen er brukt opp. Kjernereaksjonene, og dermed energiproduksjonen i sentrum, slutter, dermed faller trykket som har opprettholdt hydrostatisk likevekt. I sentrum av stjerna "vinner" gravitasjon, og stjerna trekker seg sammen med den konsekvens at den varmes kraftig opp. Strålingen fra oppvarmingen varmer opp hydrogengassen på utsiden av kjernen, og vi får hydrogenfusjon i et skall på utsiden av kjernen. Energiproduksjonen foregår nå i et større volum enn før, og dermed øker nå luminositeten. Men strålingen fra dette skallet får stjerna til å utvide seg. Dermed blir overflaten større, og overflatetemperaturen må gå ned siden energien fordeles over en større overflate.

Oppgave 10

Vi skal nå studere den såkalte stjernevinden som er partikler som kontinuerlig lekker ut fra overflaten til stjerna og fører til massetap. Vi skal bruke en svært forenklet modell. Skriv et dataprogram (pseudo-kode) som simulerer gass i en boks med sidelengder "L" som er plassert helt på overflaten av stjerna. Anta at tettheten av gassen er gitt ved variabelen "rho", temperaturen er gitt ved variabelen "T". Anta også ideel gass, at gassen er ren hydrogengass og at det er vakum rett på utsiden av overflaten til stjerna. Den ene siden av boksen representerer overflaten slik at hele boksen er inne i stjerna mens det er vakum rett på utsiden av den siden av boksen som representerer overflaten. Skriv koden slik at den beregner det totale tapet av masse (i kg) per sekund fra stjerna, anta at massetapet er det samme over hele overflaten til stjerna. Du kan strukturere koden slik:

(a) *Beregn antall partikler i boksen.*

(b) *Generer posisjonen til partiklene i boksen med en uniform sannsynlighetsfordeling.*

(c) *Generer gasspartiklene i boksen med tilfeldige hastigheter trukket fra en Gaussisk sannsynlighetsfordeling:*

$$P(\vec{v}) = P(v_x)P(v_y)P(v_z)$$

der

$$P(v_x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-(v_x^2)/(2\sigma^2)}$$

der $v_x = [-\infty, \infty]$ *og tilsvarende for* v_y *og* v_z. $P(v_x)$ *er sannsynligheten for at partikkelen har en hastighet* v_x *og tilsvarende for* $P(v_y)$ *og* $P(v_z)$. *Her må du bruke Maxwell-Boltzmann fordelingsfunksjonen bak.*

(d) *Bruk så hvordan disse partiklene vil bevege seg i løpet av et kort tidsrom "deltat" til å finne massetapet fra boksen per tid.*

(e) *Bruk så massetapet fra boksen til å beregne massetapet fra stjerna per tid.*

Anta at det allerede er definert en funksjon "Uniform(x)" som trekker tilfeldige tall mellom 0 og x fra en uniform fordeling og en funksjon "Norm(x,sigma)" som trekker et tilfeldig tall fra en Gaussisk fordeling med middelverdi x og standard avvik σ. *Merk: Når du bruker disse to funksjonene, så må du spesifisere hva verdiene for "x" og "sigma" er eller hvordan du beregner dem.*

Svar:

Vi bruker Maxwell-Boltzman funksjonen for å finne "sigma" i koden:

$$\begin{aligned}
P(\vec{v}) = n_{norm}(\vec{v}) &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} \\
&= \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\right)^3 e^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/(2kT)} \\
&= \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\right)^3 e^{-mv_x^2/(2kT)} e^{-mv_y^2/(2kT)} e^{-mv_z^2/(2kT)}
\end{aligned}$$

Da har vi at

$$P(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-mv_x^2/(2kT)}$$

og tilsvarende for $P(v_y)$ og $P(v_z)$. Vi har da at

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sigma^2} &= \frac{m}{2kT} \\
\frac{2kT}{m} &= 2\sigma^2 \\
\sigma &= \sqrt{\frac{kT}{m}}
\end{aligned}$$

Dette stemmer overens med begge steder sigma dukker opp og vi kan skrive at

$$P(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-v_x^2/\left(2\sigma^2\right)}$$

Kode:

```
rho =                 %tetthet
T =                   %temperatur
L =                   %lengde av boks
m =                   %Hydrogenmassen
k =                   %Boltzmannkonstanten

N = rho/m*L^3         %Antall partikler i boks
sigma = sqrt(kT/m)    %Standardavviket i fordelingen

pos = array(N,3)      %(x,y,z)-posisjoner til partikler
vel = array(N,3)      %(v_x,v_y,v_z)-hastigheter til partikler

for i = 1,N                     %Løkke over partikler
    pos(i,0) = Uniform(L)       %Tilfeldig x i boksen
    pos(i,1) = Uniform(L)       %Tilfeldig y i boksen
    pos(i,2) = Uniform(L)       %Tilfeldig z i boksen
    vel(i,0) = Norm(0,sigma)    %Tilfeldig v_x
```

```
    vel(i,1) = Norm(0,sigma)  %Tilfeldig v_y
    vel(i,2) = Norm(0,sigma)  %Tilfeldig v_z
endfor

%Definerer overflaten som planet x = 0

deltat =              %kort tidsperiode
tot = 0               %antall partikler som slipper ut

for i = 1,N           %løkke over partikler
    IF pos(i,0) < abs(vel(i,0)*deltat)
        AND vel(i,0)<0
    THEN tot = tot+1
    ENDIF
endfor

R =                              %Stjerneradius
dmdt = tot*m*4*pi*R/L^2/deltat %massetap per boks per tid
```

IF testen kan forstås ved at vi sjekker om avstanden fra planet $x = 0$ er mindre enn det partiklen beveger seg iløpet av en periode "deltat". I tillegg sjekker vi om hastigheten er negativ, dvs, om den er på vei ut av stjerna.