Løsning midtveiseksamen H12 AST1100

Aleksander Seland

September 25, 2014

Oppgave 1

Vi ser at kurven for radiell hastighet er periodisk og minner om en harmonisk funksjon. Vi kan derfor anta at denne stjernen går i bane rundt et felles massesenter med en stjerne (vesentlig mindre enn "moderstjerna" vel og merke) eller en planet. Videre kan vi se stjernen blir formørket idet denne planeten eller stjerna går foran "moderstjerna". Det som gjør at vi kan fjerne mistanken om en stjerne er at vi samtidig som formørkelsen pågår får en absorbsjon av en lysfrekvens som er spesifik for vann. En stjerne kan ikke ha vann pga temperatur, og dermed er det en planet. Vi ser også at kurven for "vannfrekvenser" er bredere enn kurven for andre frekvenser, noe som betyr at selv om planeten har passert, så er det fortsatt litt vannholdig atmosfære igjen som absorberer lys.

Oppgave 2

Hvis vi prøver å kansellere støyen i figur 1 og ser på likevektslinja til kurven, får vi at massesenteret beveger seg med ca -4000m/s, noe som gir en radiell hastighet i forhold til massesenteret på ca ±0.25m/s (hvis vi prøver å fjerne støyen). Vi kan også lese av perioden ved å se på tidsdifferansen mellom toppene, og den er $2100 - 700 = 1400$ timer. Det står altså mellom to formler for øyeblikket:

$$
\begin{aligned}
m_p \sin i &= \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}} \\
\frac{m_p}{m_*} &= \frac{v_*}{v_p}
\end{aligned}
$$

Ettersom vi ikke vet noe bredden til stjernen kan vi ikke regne ut hastigheten til planeten, og ligning 2 er ubrukelig. Så da står vi igjen med den første ligningen, og der har vi ikke inklinasjonen. Men vi vet at vi faktisk har en formørkelse her, noe som betyr at inklinasjonen må være $\approx 90°$. Vi kan altså bruke ligning

1 og deler den på jordmassen ($m_j \approx 6 \cdot 10^{24}$kg) for å få svaret direkte ut:

$$
\begin{aligned}
m_p &= \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{m_j (2\pi G)^{1/3}} \\
&= \frac{\left(1.2 \cdot 2 \cdot 10^{30}\text{kg}\right)^{2/3} \cdot 0.25\text{m/s} \cdot (1400\text{h} \cdot 60\text{s} \cdot 60\text{s})^{1/3}}{6 \cdot 10^{24}\text{kg}\left(2\pi \cdot 6.673 \cdot 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2\right)^{1/3}} \\
&= 1.73 m_j
\end{aligned}
$$

Offisielle fasiten sier at $m_p = 2m_j$, men dette er fordi perioden er regnet feil i fasiten.

Oppgave 3

Vi bruker Wiens forskyvningslov til å anta en høyere temperatur for stjerna (Wiens forskyvningslov gir oss fargetemperaturen).

$$T\lambda_{max} = 2.9 \cdot 10^{-3}$$

Vi får oppgitt at stjerna lyser gulhvitt altså har vi at gulfargen er preget av høyere frekvenser og dermed kortere bølgelengder. I forlengelsen betyr dette en høyere temperatur enn Sola som regnes som helt gul med $T = 6000K$. Hvis vi da antar f. eks $T = 8000K$, så kan vi bruke følgende formel for avstanden til stjerna:

$$m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\text{pc}}\right)$$

Vi kan gå inn i HR-diagrammet og lese av en absolutt magnitude på $M \approx 1$ dersom vi tar utgangspunkt i midten av bredden på hovedsekvensen av stjerner. Den relative magnituden får vi fra at vi husker hvordan magnitudesystemet først ble etablert. Hipparchus ga de stjernene som såvidt var synlig for øyet en magnitude på $m = 6$. Så da er det bare å snu på ligningen å få:

$$
\begin{aligned}
d &= 10^{\frac{m-M}{5}} \cdot 10\text{pc} \\
&= 10^{\frac{6-1}{5}} \cdot 10 \cdot 3.27\text{ly} \\
&= 327\text{ly}
\end{aligned}
$$

Oppgave 4

Vi vet altså at vi har $e = 0.5$ og at i perihel har vi $r = 11000 \cdot 10^3$m. Videre starter oppbremsingen ved $r = 20000 \cdot 10^3$m og massen til satelitten er $m_2 = 1000 \cdot 10^3$g. Vi skal finne hastighetene i radiell og tangentiell retning utifra dette. Vi har 3 formler som inneholder størrelser vi ønsker å bruke:

$$\begin{aligned}
r &= \frac{p}{1+e\cos f} \\
p &= \frac{h^2}{m} \\
p &= a(1-e^2)
\end{aligned}$$

Vi vet ingenting om vinkelen til romsonden ved inngangen til banen, og dermed ryker første formelen. h er spinn mer masse, og det kan vi regne ut for satelliten siden spinnet er alltid bevart.

$$\left|\vec{h}\right| = \left|\frac{\vec{r}\times\vec{p}}{m}\right| = \left|\frac{\vec{r}\times m\vec{v}}{m}\right| = \left|\frac{m\left(\vec{r}\times\vec{v}\right)}{m}\right|$$

$$= |\vec{r}\times\vec{v}| = r\vec{e}_r \times (v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta) = r\vec{e}_r \times v_r\vec{e}_r + r\vec{e}_r \times v_\theta\vec{e}_\theta$$

$$= 0 + rv_\theta = rv_\theta$$

Da har vi h for romsonden, vi setter de to siste ligningene lik hverandre og får (husk at nå er $m = G(m_1+m_2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{h^2}{m} &= a(1-e^2) \\
\frac{r^2v_\theta^2}{G(m_1+m_2)} &= a(1-e^2) \\
v_\theta &= \frac{\sqrt{a(1-e^2)G(m_1+m_2)}}{r}
\end{aligned}$$

Det eneste som mangler nå er å finne a. Vi ser fra figur 5 at avstanden fra sentrum i ellipsen og ut til planeten er ae, videre har vi at

$$\begin{aligned}
a &= ae + r_{\text{perihelion}} \\
r_{\text{perihelion}} &= a(1-e) \\
r_{\text{perihelion}} &= 0.5a \\
a &= 2r_{\text{perihelion}} \\
&= 22000\cdot 10^3\text{m}
\end{aligned}$$

Da er det bare å sette inn i formelen :

$$\begin{aligned}
v_\theta &= \frac{\sqrt{a(1-e^2)G(m_1+m_2)}}{r} \\
&= \frac{\sqrt{22000\cdot 10^3\cdot(1-0.5^2)\cdot 6.673\cdot 10^{-11}\cdot(1.73\cdot 6\cdot 10^{24}+1000)}}{20000\cdot 10^3}\text{km/s} \\
&= 5345.28\text{m/s} \approx 5.4\text{km/s}
\end{aligned}$$

Da gjenstår det bare å regne ut radiell hastighet. For å gjøre det, så må vi bruke en annen bevart størrelse, nemlig energi. Fra formelsamlingen bakerst har vi følgende formler for energien:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\hat{\mu}v^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} \\
E &= \frac{Gm_1m_2}{2p}(e^2-1)
\end{aligned}
$$

Vi er ute etter hastigheten her, så vi setter uttrykkene lik hverandre og løser for hastigheten:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\hat{\mu}v^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} &= \frac{Gm_1m_2}{2p}(e^2-1) \\
\frac{1}{2}\hat{\mu}v^2 &= \frac{Gm_1m_2}{2p}(e^2-1) + \frac{Gm_1m_2}{r} \\
v^2 &= \frac{2Gm_1m_2}{\hat{\mu}}\left(\frac{e^2-1}{2p} + \frac{1}{r}\right) \\
v_r^2 + v_\theta^2 &= \frac{2Gm_1m_2}{\hat{\mu}}\left(\frac{e^2-1}{2p} + \frac{1}{r}\right) \\
v_r &= \sqrt{\frac{2Gm_1m_2}{\hat{\mu}}\left(\frac{e^2-1}{2p} + \frac{1}{r}\right) - v_\theta^2}
\end{aligned}
$$

Setter så inn $p = a(1-e^2) = -a(e^2-1)$ og $\hat{\mu} = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ og får:

$$
\begin{aligned}
v_r &= \sqrt{\frac{2Gm_1m_2}{\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}}\left(-\frac{e^2-1}{2a(e^2-1)} + \frac{1}{r}\right) - v_\theta^2} \\
&= \sqrt{2G\left(m_1+m_2\right)\left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{r}\right) - v_\theta^2} \\
&= \sqrt{2 \cdot 6.673 \cdot 10^{-11} \cdot (1.73 \cdot 6 \cdot 10^{24} + 1000) \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot 22000 \cdot 10^3} + \frac{1}{20000 \cdot 10^3}\right) - 5345^2} \\
&= 3035\text{m/s} \approx 3\text{km/s}
\end{aligned}
$$

Oppgave 5

```
v_s(0)=[0,v_0]
FOR t = 1,N
    r = r_p[t-1]-r_s[t-1]             %Vektor fra sonde til planet
    norm_r = sqrt(r.dot.r)            %Avstanden fra sonde til planet
    F_G = G*mp*ms*r/norm_r^3          %Gravitasjonskraft på sonde

    IF norm_r <= R                    %Tester om sonden har landet
        ENDFOR
    ENDIF

    IF norm_r < r0
        F_F = -k0/norm_r*v_s[t-1]     %Friksjonskraft hvis r<r0
    ELSE
        F_F = 0                       %Ingen friksjon hvis r>r0
    ENDIF

    a = (F_G+F_F)/ms                  %Aksellerasjon sonde
    v_s[t] = v_s[t-1]+a*deltat        %Fart sonde
    r_s[t] = r_s[t-1]+v_s[t-1]*deltat %Posisjon sonde

    a = -F_G/mp                       %Aksellerasjon planet
    v_p[t] = v_p[t-1]+a*deltat        %Farten til planet
    r_p[t] = r_p[t-1]+v_p[t-1]*deltat %Posisjonen til planet
ENDFOR
```

Oppgave 6

Vi har følgende fluksuttrykk å rutte med:

$$\begin{aligned} F &= \frac{dE}{dtdA} \\ F &= \sigma T^4 \end{aligned}$$

Hvis vi stabler om litt, så får vi at

$$\begin{aligned} FdA &= \frac{dE}{dt} \\ &= \sigma T^4 dA \\ \int_0^{4\pi r R^2} F\,dA &= \sigma T^4 \int_0^{4\pi R^2} dA \\ F \cdot 4\pi R^2 &= \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Nå som vi har det i orden, så er det bare å regne ut fluksen i avstand r til stjerna. Jeg definerer F_r som fluksen i avstand r og F_R som fluksen i avstand

R:

$$\begin{aligned} L &= L \\ F_r \cdot 4\pi r^2 &= F_R \cdot 4\pi R^2 \\ F_r \cdot 4\pi r^2 &= \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2 \\ F_r &= \frac{\sigma T^4 \cdot 4\pi R^2}{4\pi r^2} \\ F_r &= \sigma T^4 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \end{aligned}$$

Da er vi nesten i mål, bare r i veien. Vi ser i formelsamlingen at

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

Vi har at $f = \alpha$ og $p = a(1 - e^2)$. Vi setter inn og får

$$r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\alpha}$$

$$\begin{aligned} F_r &= \sigma T^4 \left(\frac{R}{\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\alpha}}\right)^2 \\ &= \sigma T^4 R^2 \left(\frac{(1 + e\cos\alpha)}{a(1 - e^2)}\right)^2 \end{aligned}$$

Oppgave 7

For å finne den beste verdien av e må vi ta å sammenligne dataene opp mot funksjonen. Vi ønsker derfor å ta å regne ut differansen mellom funksjonen og målepunktene for alle t og summere dette opp. Slik får vi den totale differansen som vi kan bruke for å sammenligne forskjellige verdier av e. Samtidig har vi også en annen ukjent, F_0. Vi må derfor skrive en FOR-løkke inne i en FOR-løkke slik at for hver F_0 vi sjekker, så løper vi igjennom alle e-verdiene. For hver kombinasjon av F_0 og $e$regner vi ut den totale differansen og sammenligner med differansen gitt av kombinasjonen før. Har vi fått en mindre differanse, så lagrer vi verdiene av F_0 og e, og har vi fått en større differanse, forkaster vi kombinasjonen før vi begynner på en ny kombinasjon.

Oppgave 8

Vi husker at vi definerer et referansesystem som er i ro, og et som er i bevegelse. Vi velger å se på romskipet fra den fjerne planeten som det merkede systemet i fart, og jorden som i ro og umerket.

- A: Romskipene skytes opp. Sett fra jorden er romskipet i avstand d og inne i skipet har de ikke observert at de har beveget seg ennå.

$$x_A = d \qquad t_A = 0$$
$$x'_A = 0 \qquad t'_A = 0$$

- B: Romskipene møter hverandre. Her ser vi at skipet har beveget seg med en distanse $v_2 t_B$ sett fra jorda, mens inne i skipet har de ikke beveget seg i det hele tatt (jorda har beveget seg mot dem).

$$x_B = d - v_2 t_B \qquad t_B =?$$
$$x'_B = 0 \qquad t'_B =?$$

Vi kan finne t_B ved å sette opp ligningen for det øyeblikket de passerer hverandre sett fra jorda:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ v_1 t_B &= d - v_2 t_B \\ v_1 t_B + v_2 t_B &= d \\ t_B &= \frac{d}{v_1 + v_2} \end{aligned}$$

Vi får derfor hendelse B slik:

$$x_B = d - v_2 t_B \qquad t_B = \frac{d}{v_1 + v_2}$$
$$x'_B = 0 \qquad t'_B = t'_B$$

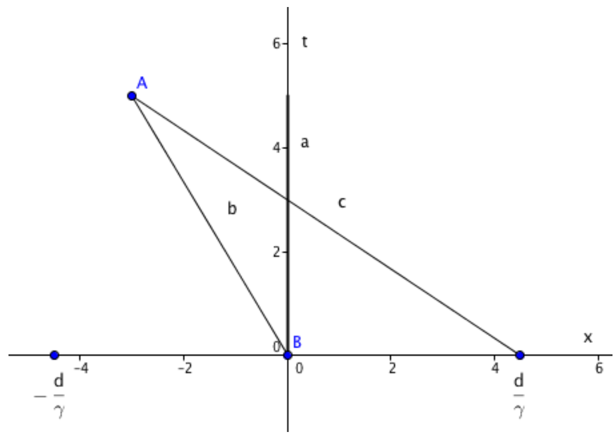
I neste oppgave skal vi finne t'_B.

Oppgave 9

$$\begin{aligned}
(\Delta s)^2 &= (\Delta s')^2 \\
(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 &= (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 \\
(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 &= (t'_B - t'_A)^2 - (x'_B - x'_A)^2 \\
\left(\frac{d}{v_1 + v_2}\right)^2 - \left(d - v_2 \frac{d}{v_1 + v_2} - d\right)^2 &= (t'_B)^2 - 0 \\
\left(\frac{d}{v_1 + v_2}\right)^2 - \left(v_2 \frac{d}{v_1 + v_2}\right)^2 &= (t'_B)^2 - 0 \\
(t'_B)^2 &= \left(\frac{d}{v_1 + v_2}\right)^2 (1 - v_2^2) \\
t'_B &= \frac{d}{v_1 + v_2}\sqrt{1 - v_2^2} \\
&= \frac{100\text{år}}{0.6 + 0.9}\sqrt{1 - 0.9^2} \\
&= 29.0593\text{år} \approx 29\text{år}
\end{aligned}$$

Oppgave 10

Sett fra jordromskipet starter det fremmede skipet i en distanse $x = \frac{d}{\gamma}$ (jordskipet er i bevegelse og observerer avstander annerledes enn om de hadde vært i ro). Jordskipet observerer seg selv i ro, derfor går streken "a" rett oppover tidsaksen. Jorda beveger seg vekk fra skipet ifølge mannskapet ombord, og vi vet at jordskipet ikke rekker å observere jorda i en distanse $x = -\frac{d}{\gamma}$ før det fremmede skipet kommer frem. Vi vet også at det fremmede skipet reiser vesentlig fortere sett fra jordskipet enn jorda derfor er linjen til det fremmede skipet mer skrå enn linjen til jorda.



a er linja til jordromskipet, b er linja til jorda og c er linja til det fremmede romskipet.