UNIVERSITETET I OSLO

Det matetmatisk-naturvitenskapelige fakultet

“Midtveis”-eksamen i AST1100, 7. oktober 2008, 15.00 – 18.00

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 8 sider

Konstanter og formelsamling finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side en selve oppgaven

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises. Noen oppgaver er merket ’krevende’ eller ’kort’:

- ’krevende’: Oppgaven vil gi flere poeng enn de andre oppgavene hvis den er besvart i sin helhet, men flere overganger kan være nødvendig for å komme frem til svaret. På disse oppgavene vil det bli gitt poeng for alle skritt i riktig retning. (Det betyr ikke nødvendigvis at oppgaven er veldig vanskelig eller krever mye regning, det betyr bare at man trenger å bruke litt fysisk forståelse og kanskje mer enn en utregning for å komme frem til svaret)
- ’kort’: Oppgaven gir litt færre poeng enn gjennomsnittet og det forventes ikke en lang besvarelse.

Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.
Medbrakt kalkulator er tillatt.

Oppgave 1

På figure 1 ser du bilde av en galakse med avstanden 4 Mpc fra oss. Inntegnet er 5 gass-skyer med nøytralt hydrogen, A, B, C, D og E som alle har sterk 21-cm stråling (vi sier at den nøyaktige posisjonen til 21cm-linjen er $\lambda_0 = 21.200$cm). Hele galaksen beveger seg mot oss (peculiar velocity) med en hastighet på 75 km/s.

1. Den observerte posisjonen til 21cm-linjen i de fem gass-skyene er $\lambda_A = 21.2099$cm, $\lambda_B = 21.232$cm, $\lambda_C = 21.238$cm, $\lambda_D = 21.240$cm og $\lambda_E = 21.238$cm for henholdsvis sky A, B, C, D og E. Hva er hastigheten til hver av disse gass-skyene i forhold til galaksens massesenter?

2. Lag et plot av rotasjonskurven til galaksen med avstand fra sentrum i kpc og hastighet i km/s (bruk figuren til å finne avstander). Plottet trenger ikke å være helt nøyaktig, men nøyaktig nok til å vise at du har forstått hva som skal plottes. Husk å sette inn noen tall på aksene.

3. *(kort oppgave)* Vi skal nå prøve å utlede hvordan disse rotasjonskurvene er forventet å se ut fra en teoretisk modell. Fra observasjoner av stjernetetthet kan man slutte at nesten all massen i galaksen er samlet veldig nær sentrum. Anta at massen til galaksen er M. Vis at vi da kan skrive bevegelseslikningen til en gass-sky i bane omkring galaksesenteret (langt fra sentrum av galaksen) som

$$-G\frac{M}{r^3}\vec{r} = \ddot{\vec{r}}, \tag{1}$$

hvor $\vec{r}$ er en vektor som går fra sentrum av galaksen og ut til gass-skyen og $r = |\vec{r}|$. Prikk betyr derivert mhp. tiden.

4. Vi skal i det følgende anta sirkulære baner. Vi definerer $\vec{e}_r$ og $\vec{e}_\theta$ som enhetsvektorer i henholdsvis $\vec{r}$ retning og θ retning (se figure 2. Du vil få bruk for at $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ og at $\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r$. Vis at for sirkulære baner gjelder

$$\dot{\vec{r}} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \tag{2}$$

og forklar den fysiske betydningen av $r\dot{\theta}$.

5. Se nå kun på den radielle delen av likning 1 og vis at den gir

$$v_\theta = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

hvor v_θ er den tangentielle hastigheten i den sirkulære banen.

6. *(kort oppgave)* Tegn (veldig omtrentlig, uten å tenke på tall, det er formen som teller) inn en slik kurve i plottet ditt. Du skal finne en forskjell mellom den teoretisk og observerte kurven. Hva er den vanlige fysiske forklaringen på denne forskjellen?

7. *(krevende oppgave)* En alternativ forklaring på forskjellen mellom teoretiske og observerte rotasjonskurver er gitt ved en modell kalt MOND (MOdified Newtonian Dynamics) hvor en alternativ form av Newtons 2. lov brukes. I denne modellen så kan Newtons 2. lov for små akselrasjoner (På store avstander fra galaksesenteret er gravitasjonskraften liten og dermed er også akselrasjonen liten) skrives

$$\vec{F} = m\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a},$$

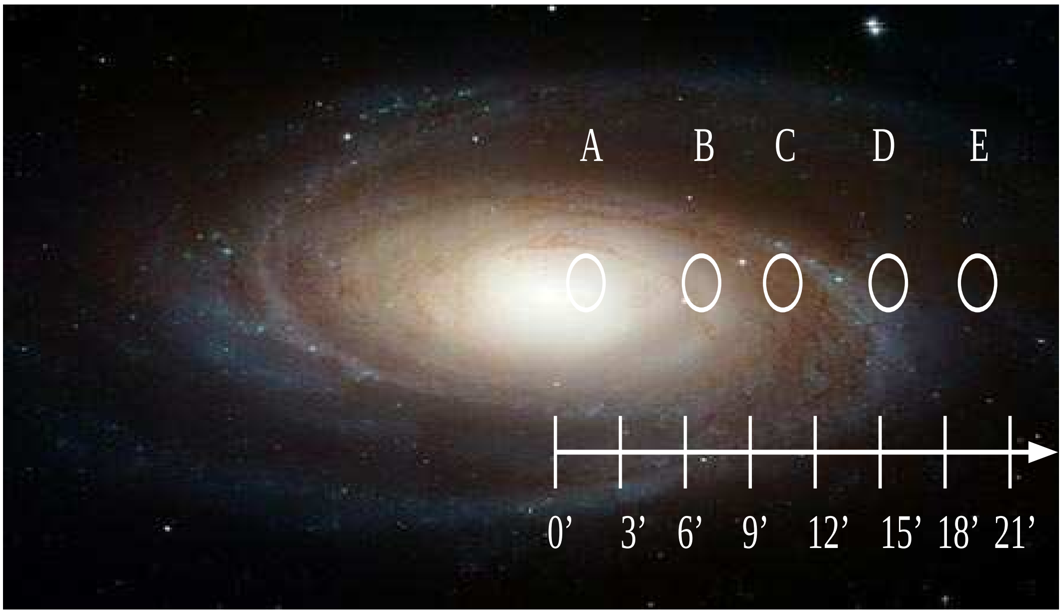

Figure 1: For oppgave 1

hvor $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ er akselrasjonen, $a = |\vec{a}|$ og a_0 er en konstant. Dette uttrykket gjelder altså asymptotisk for store avstander, for små avstander (og dermed større akselrasjoner) som gjelder alle fenomener vi kan måle direkte her på jorda og i solsystemet, så går den modifiserte loven asymptotisk mot den vanlige formen for Newtons annen lov $F = ma$. Se tilbake på utledningen av likningen 1, korriger den med den nye formen for Newtons annen lov og vis at hastigheten v_θ er uavhengig av r for store avstander. Bruk deretter uttrykket til å finne en omtrentlig verdi for konstanten a_0 i denne teorien ved å bruke gass-sky dataene for galaksen over. Bruke en masse M for galaksen (som i dette tilfellet er omtrent lik massen i stjerner) som tilsvarer en galakse med 2×10^{11} stjerner hvor middelmassen til en stjerne er lik solmassen.

Oppgave 2

På stjernen Betelgeuse i stjernebildet Orion er det observert uregelmessige oscillasjoner som betyr at stjernen i løpet av kort tid kan eksplodere i en supernovaeksplosjon. Avstanden til denne stjernen (fra jorda) er 130pc. Du vil gjerne reise dit for å studere eksplosjonen nærmere. Vi skal nå bruke to koordinatsystemer, jord-systemet (x, t) og romskip-systemet (x', t'). Romskipet ditt har avreise fra jorda ved origoeventet O, posisjon $x = x' = 0$ ved tidspunkt

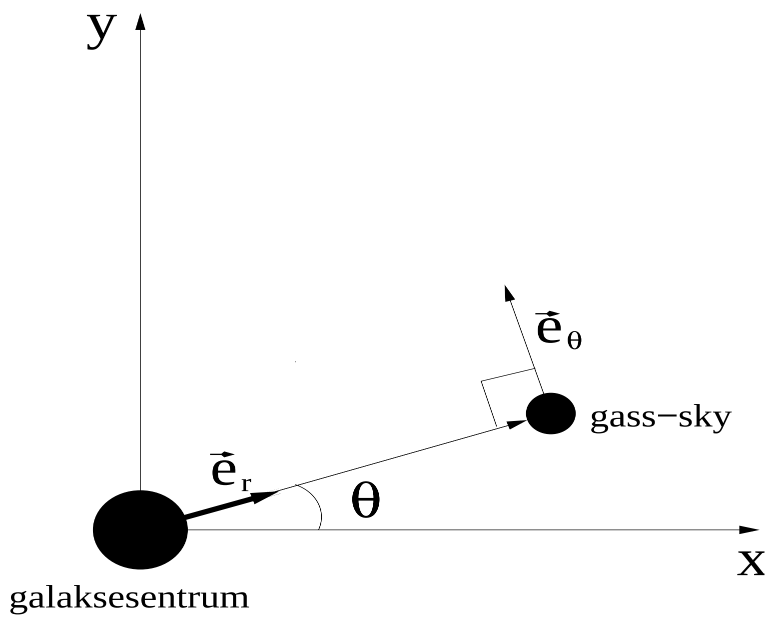

Figure 2: For oppgave 1

$t = t' = 0$. Romskipet reiser med en hastiget $v = 0.99999$ ganger lyshastigheten. Etter en lengre reise så ser du at stjernen er veldig nær å eksplodere. Du tør ikke lenger nærme deg mer og stopper romskipet ditt helt. Event A er det eventet at du stopper romskipet ditt. Ved dette eventet ser du at klokken i romskipet ditt viser 1.5 år. Det viser seg at du såvidt fikk stoppet i tide, fordi sett fra ditt romskip-system så eksploderte supernovaen samtidig med at du stoppet romskipet ditt. Eksplosjonen av supernovaen kaller vi event S. Se figur 3.

1. Skriv opp tidspunkter t og t' og posisjoner x og x' for alle eventene, O, A og S. Du kan forme tre tidromsintervaller mellom disse eventene. Bruk invarians av tidromsintervallet til å løse følgende tre deloppgaver (i dette tilfellet vil du kunne hente informasjon fra alle 3 intervallene):
   (a) Når skjedde supernovaeksplosjonen sett fra jorda? (Angi svaret i år)
   (b) På hvilket tidspunkt t_A stoppet du romskipet ditt, sett fra jorda? (Angi svaret i år)
   (c) Målt fra romskipet ditt, hva var avstanden til supernovaeksplosjonen da du stoppet romskipet? (angi svaret i lysår)
2. *(kort oppgave)* Samtidig som du reiste fra jorda, startet også et annet romskip. Koordinatene til dette romskipet i origoeventet O er $x'' = 0$ og $t'' = 0$. Dette romskipet reiste med hastiget $u = 0.999$ ganger lyshastigheten sett fra jorda. Skriv opp hastighets-firervektorene V_μ og U_μ til romskipet

ditt samt til det andre romskipet sett fra jord-systemet (definer retningen på aksene du bruker). Uttrykk svarene med v og u.

3. Bruk transformasjonsegenskaper for firervektorer til å vise at

$$v'' = \frac{v - u}{1 - uv},$$

hvor v'' er hastigheten på romskipet ditt observert fra det andre romskipet. Angi også tallverdien i enhetsløs hastighet.

4. *(krevende oppgave)* Ved event A stopper du romskipet ditt, men vi antar nå at du i panikk øyeblikkelig snur og reiser tilbake igjen i samme hastighet som du hadde opprinnelig. Frem til tidspunktet for event A reiser du altså mot supernovaen med hastighet v (sett fra jorda), rett etter event A reiser du i nøyaktig motsatt retning også med hastighet v (fortsatt sett fra jorda). Vi antar at 'snuoperasjonen' tok så kort tid at vi kan se bort fra den. Etter en tid vil du møte det andre romskipet som hele tiden er på vei mot supernovaen med hastighet u sett fra jorda. I det dere møtes så kikker du på klokka i det andre romskipet. Oppgaven blir nå å finne ut hvilken tid du leser av, men vi tar det i to skritt:

   (a) For å løse denne oppgaven er det viktig å først merke seg at det er et av de tre referansesystemene (jord, ditt romskip, det andre romskipet) som du IKKE kan bruke i beregningen din. Hvilket er det og hvorfor?

   (b) Med det i mente kan du nå sette igang og beregne hvilken tid du leser av i det andre romskipet. Du kan bruke den fremgangsmåten du vil, men alt må begrunnes.

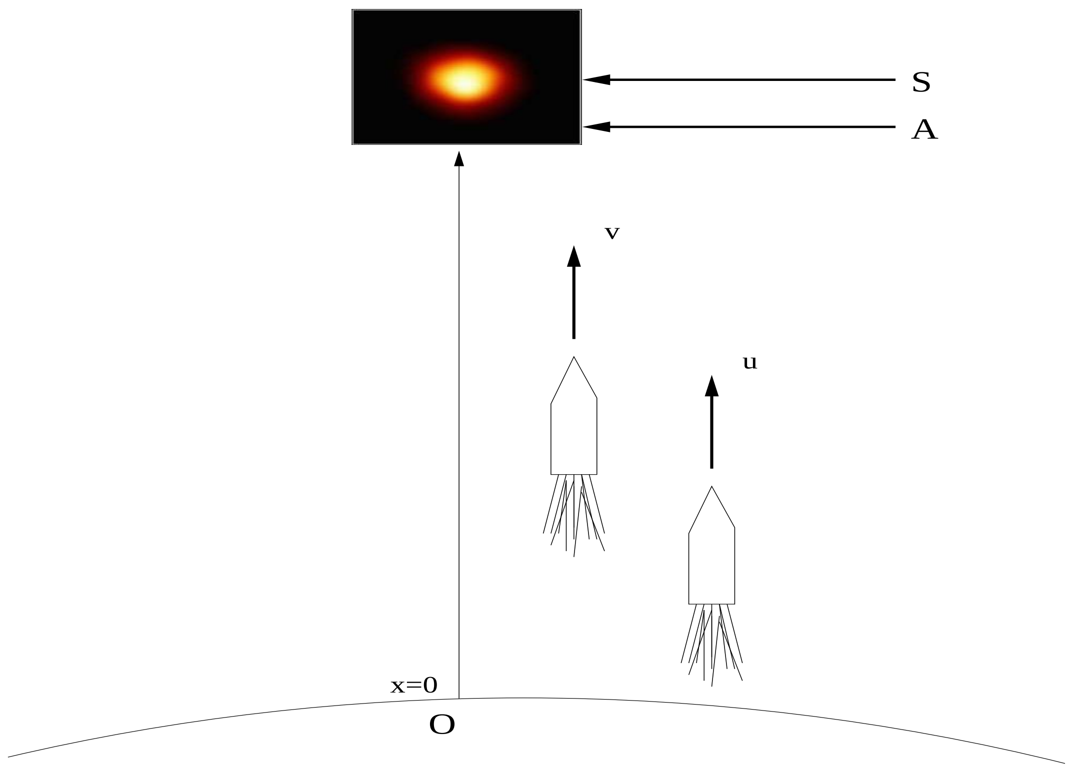

Figure 3: For oppgave 2

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_\mathrm{e} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_\mathrm{max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

$$P^2 = a^3$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

$$\ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

$$p = h^2/m$$

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{(ellipse)}$$

$$p = a(e^2 - 1) \quad \text{(hyperbel)}$$

$$p = 1/2a \quad \text{(parabel)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = M\vec{R}$$

$$m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$

$$< K >= -\frac{1}{2} < U >$$

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

$$L = \frac{dE}{dt}$$

$$F = \frac{dE}{dAdt}$$

$$F = \sigma T^4$$

$$n(v)dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$$

$$\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT \ln 2}{m}}$$

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10\text{pc}}\right)$$

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{rel}} & -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & \gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_\mu = \gamma(1, \vec{v})$$

$$< E_K >= \frac{3}{2} kT$$

$$N = \frac{M}{\mu m_H}$$

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}.$$