

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

“Midtveis”-eksamen i AST1100, 12. oktober 2010, 15.00 – 18.00

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 8 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling finner du bakerst

Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side enn selve oppgaven

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevner hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene vises.

Spørsmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

1. Vi skal studere en komet i elliptisk bane omkring sola:

- **Lag en enkel skisse** av sola og kometbanen og tegn inn kometen på et tilfeldig punkt i banen i en avstand r fra sola. Marker vinkelen f definert som vinkelen mellom linjen som går fra sola til perihel/aphel og linjen som går fra sola til kometen.
- Vi skal bruke posisjonsvektoren \vec{r} som peker fra sola til kometen. **Skriv et uttrykk for \vec{r}** uttrykt med basisvektorene $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ (radielle og tangensielle enhetsvektorer) i det kometen er i en avstand r fra sola.
- **Hint:** Svaret er veldig enkelt.

2. • Bruk uttrykket for \vec{r} til å vise at hastighetsvektoren til kometen er gitt ved

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + \frac{h}{r}\vec{e}_\theta,$$

der h er spinn per masse for kometen og prikk betegner tidsderivert. **[Denne oppgaven fortsetter på neste side!]**

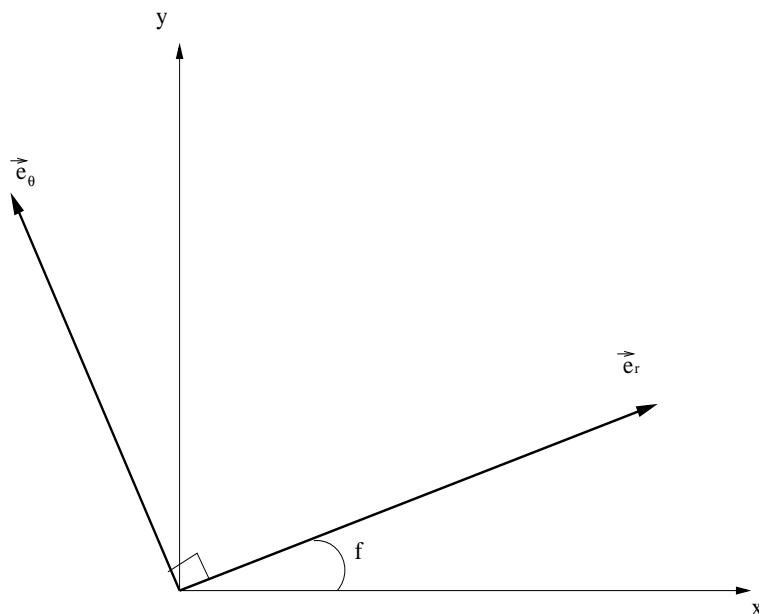


Figure 1: For oppgave 2

- **Hint 1:** Skriv enhetsvektorene \vec{e}_r og \vec{e}_θ uttrykt ved enhetsvektorene \vec{e}_x og \vec{e}_y (i et fast koordinatsystem) samt vinkelen f (bruk gjerne figur 1 til hjelp).
 - **Hint 2:** Bruk dette til å vise at

$$\dot{\vec{e}}_r = f\dot{\vec{e}}_\theta.$$
 - **Hint 3:** Til slutt mangler det bare å regne ut kryssproduktet for spinnet.
3. • **Bakgrunnsinformasjon:** Kometen blir observert til å ha avstanden 0.33 AU fra sola i perihel og 4.11 AU i aphel. I det kometen er i aphel, så er jorda i en avstand av 1 AU fra sola og ligger tilfeldigvis akkurat på linja mellom sola og kometen (se figur 2). På dette tidspunktet observerer vi at kometen beveger seg med 38.7 buesekunder (arc seconds) per time på himmelen (jorda beveger seg i samme retning som kometen med banehastighet 30 km/s). Anta at jorda og kometen har samme baneplan og se bort ifra påvirkningen fra planetene.
- **Oppgave:** Beregn hvilken banehastighet v_{perihel} kometen vil ha når den kommer til punktet nærmest sola.
 - **Hint 1:** Du kan anta at solmassen er betydelig større enn kometmassen slik at du kan se bort fra solas banebevegelse og dermed også solas spinn.
 - **Hint 2:** Beregn først banehastigheten i aphel.

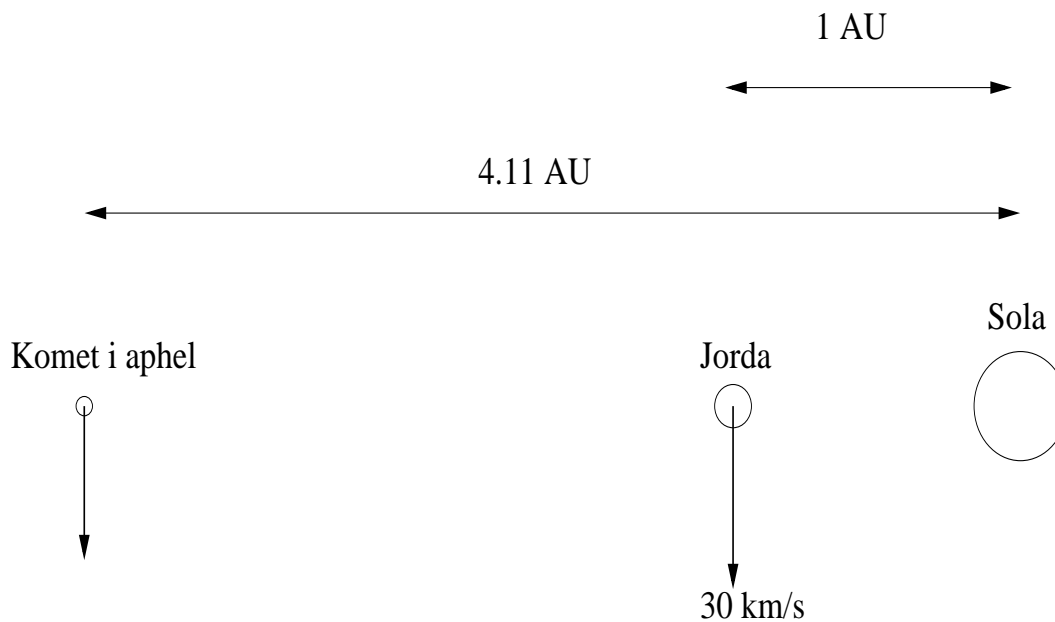


Figure 2: For oppgave 3. Merk: figuren er ikke riktig skalert

4. Les neste oppgave før du gjør denne siden du godt kan slå de to oppgavene sammen til en hvis du ønsker det.

- **Oppgave:** Du skal nå forklare hvordan du vil gå frem for å skrive en kode for å beregne banen til kometen numerisk. Du bør (a) få med både hvordan du går fra fysisk problemstilling til en algoritme samt (b) skrive en pseudo-kode
- **Litt detaljer:** For koden: du behøver ikke å ha nøyaktig syntaks, men det bør markeres hvordan du definerer lister/arrayer og variabler, hvor du har løkker, hvor du har if-tester og hvordan du definerer funksjoner/subrutiner. I koden trenger du ikke å ta med selve plottingen, kun baneberegningen
- **Antakelser:** Siden kometen er mye mindre enn sola, kan du se bort fra solas bevegelse og anta at den hele tiden står i ro. Massen til kometen kan du angi med en variabel m , du trenger ikke å sette inn noen verdi for denne, vi antar at denne er satt lenger opp i koden. Du definerer selv koordinatsystemer og initialbetingelser ut i fra den informasjonen du har om kometen.
- **Hint:** Det forventes omkring 1/2 til maks 1 side med normal skrift for forklaring og omtrent det samme for koden, noe mer trengs ikke, husk at det er hovedprinsippene i koden vi trenger, ikke alle detaljene.

5. Du skal nå utvide koden i forrige spørsmål:

- **Bakgrunnsinformasjon:** Når kometer kommer nær sola fordamper en del av isen og den mister masse. Vi antar at kometen mister $1/100$ av massen hver gang den passerer sola. La oss for enkelhets skyld anta at den mister denne massen på et kort øyeblikk, i det den er i perihel. Anta at massen blir sendt ut som en prosjektil i motsatt retning av sola med hastighet $1m/s$.
- **Oppgave:** Skriv koden som du må legge til programmet i forrige oppgave for å ta hensyn til dette i hvert baneomløp og forklar kort fysikken du bruker til å beregne baneendringene hver gang kometen passerer perihel.

6. Hva er fluksen fra sola på kometen i aphel? Angi svar i W/m^2 (bak finner du solas luminositet).

- 7.
- **Bakgrunnsinformasjon:** Anta at kometen har albedo 0.7, som betyr at den reflekterer 70% av sollyset den mottar. Anta videre at kometen er kuleformet med radius 10 km.
 - **Oppgave:** Hvilken tilsynelatende (appaerent) magnitudo observerer vi at kometen har når den er i aphel (bruk igjen figur 2)?
 - **Kort tilleggsspørsmål:** Er det mulig å se kometen uten kikkert?
 - **Antakelser:** For å forenkle beregningen av hvor mye stråling som blir reflektert ut ifra kometen, kan du se på kometen som en jevn flat skive som reflekterer 70% av alt lyset som faller på den. Anta videre at dette lyset blir reflektert ut fra kometen uniformt i en halvkule.
 - **Hint:** Husk at du bak vil finne tall for sola som du kan bruke til å beregne magnituden.

- 8.
- **Bakgrunnsinformasjon:** Siden kometen etterhvert kom farlig nær jorda, ble det besluttet å sende prosjektiler med sprengladninger mot kometen. Siden dette er langt inn i fremtiden, så går prosjektilene med en hastighet svært nær lysets hastighet. Inne i prosjektilet er det en klokke som skal utløse sprengladningen etter en viss angitt tid.
 - **Oppgave:** Vi skal nå utlede sammenhengen mellom et tidsintervall Δt på klokken på jorda og et tidsintervall $\Delta t'$ på klokka i et prosjektil med hastighet v . Bruk invarians av tidromsintervall til å utlede en sammenheng mellom Δt og $\Delta t'$.
 - **Hint:** Definer event A til å være da prosjektilet ble sendt fra jorda og event B til å være da en tidsperiode $\Delta t'$ hadde gått på klokka i prosjektilet.

- 9.
- **Bakgrunnsinformasjon:** Det ble sendt to prosjektiler mot kometen, begge langs en og samme linje som vi bruker som x -aksen. Begge prosjektiler blir sendt fra samme posisjon $x = 0$ ved samme tid $t = t' = t'' = 0$ (vi kaller dette event A) der merkede koordinater brukes for referansesystemet til prosjektil 1 og dobbeltmerkede koordinater brukes for referansesystemet til prosjektil 2. Prosjektil 1 ble sendt ut med hastighet $v_1 = 0.99$ og prosjektil 2 med hastighet $v_2 = 0.995$. De to prosjektilene er innstilt til

å eksplodere på forskjellige tidspunkt i jordsystemet. I referansesystemet til prosjektil 2 så skjer eksplosjonen i prosjektil 2 (event C) samtidig som eksplosjonen i prosjektil 1 (event B) ved $t'' = 100$ sekunder.

- **Oppgave:** Sett opp posisjon og tid til event A, B og C i alle tre referansesystemer og marker de størrelsene som er ukjente.
 - **Hint:** Siden du kjenner hastighetene vil du kunne uttrykke noen av de ukjente posisjonene i jordsystemet ved hjelp av de tilsvarende ukjente tidspunktene.
- 10.
- **Oppgave:** Ved hvilke tidspunkter t_B og t_C skjedde eksplosjonene i jordsystemet? For å finne t_B skal du bruk invarians av tidromsintervall til å komme frem til svaret, det blir ikke gitt poeng for å bruke Lorentz-transformasjonene.
 - **Hint 1:** Du kan bruke svaret fra oppgave 8 (som du bør kjenne til selv om du ikk har fått til oppgaven) til å finne t_C .
 - **Hint 2:** For å finne t_B : Du må finne to tidromsintervall som gir deg to likninger (du vil få en ukjent til som du må løse for).
 - **Hint 3:** Det kan være lurt å velge tidromsintervall BC og AB, du må selv finne ut hvilke ref. systemer å bruke i disse intervallene som gir lettest regning. Du vil få en ukjent, men ved å velge riktige kombinasjoner kan denne meget lett elimineres, denne eliminasjonen vil samtidig føre til at du **ikke** får annengradslikning i t_B .

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s

Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s

Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m²/kg²

Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K

Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$ W/m²K⁴.

Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg

Protonets hvilemasse: $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg

Nøytronets hvilemasse: $m_n = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg

Wiens forskyvningslov: $\lambda_{\max} T = 0.0029$ m K

1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J

Solmassen: $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg

Solradien: $R_{\odot} = 6.98 \times 10^8$ m.

Solas tilsynelatende magnitudo: $m = -26.7$

Solas luminositet: $L_{\odot} = 3.827 \times 10^{26}$ W

Massen til Jupiter: 1.9×10^{27} kg

Temperaturen på solens overflate: 5780 K

Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m

Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc

lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m

parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

$$P^2 = a^3$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

$$\ddot{\vec{r}} + m \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}$$

$$m = G(m_1 + m_2)$$

$$p = h^2/m$$

$$p = a(1 - e^2) \quad (\text{ellipse})$$

$$p = a(e^2 - 1) \quad (\text{hyperbel})$$

$$p = 1/2a \quad (\text{parabel})$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = M \vec{R}$$

$$m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_* r P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\rho(r) = \frac{v^2(r)}{4\pi G r^2}$$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + (r/R)^2}$$

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$$

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

$$I(\nu) = \frac{dE}{\cos\theta d\Omega dA dt d\nu}$$

$$L = \frac{dE}{dt}$$

$$F = \frac{dE}{dA dt}$$

$$F = \sigma T^4$$

$$n(v)dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$$

$$\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT \ln 2}{m}}$$

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right)$$

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{pc}} \right)$$

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1 \right)$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{rel}} & -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & \gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{\mu} = \gamma(1, \vec{v})$$

$$\langle E_K \rangle = \frac{3}{2} kT$$

$$N = \frac{M}{\mu m_H}$$

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2} .$$