UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

“Midtveis”-eksamen i AST1100, 7. oktober 2014, 15.00 – 18.00

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 8 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side en selve oppgaven

Det er totalt 6 oppgaver (som inneholder til sammen totalt 10 deloppgaver). Hver av disse 10 deloppgavene kan totalt gi 10 poeng slik at maksimal poengsum er 100 poeng.

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene utledes.
Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

- **OPPGAVE 1** Vi skal skyte opp en satelitt som skal til Saturn. For å finne riktig oppskytingstidspunkt så trenger ingeniørene å vite avstanden mellom jorda og Saturn på et gitt tidspunkt. I denne oppgaven skal vi finne denne avstanden. Beregningen er delt opp i 3 deloppgaver. I figur 1 ser du banen til de to planetene. Merk at både eksentrisiteten og vinkelen mellom de to banene er sterkt overdrevet på figuren. Alle størrelseforhold er også gale, men gjør der lettere å illustrere. De striplede linjene er de store halvaksene i banene til jorda og Saturn. Vinkelen f er vinkelen mellom store halvakse til Saturns bane og linje fra sola til Saturn. Vinkelen θ er vinkelen mellom store halvakse til Saturns bane og linja mellom sola og jorda. Vinkelen α er vinkelen mellom de store halvaksene til banene til Saturn og jorda.

  1. Skriv opp posisjonsvektoren $\vec{r}_1$ til Saturn (med sola som origo) uttrykt ved noen (eller alle) av de følgende størrelser: vinkelen f, eksentrisiteten e_1 til Saturns bane, store halvakse a_1 til Saturns bane og de radielle/tangensielle enhetsvektorene $\vec{e}_r$ og $\vec{e}_\theta$ som er rettet langs og ortogonalt på posisjonsvektoren til Saturn.

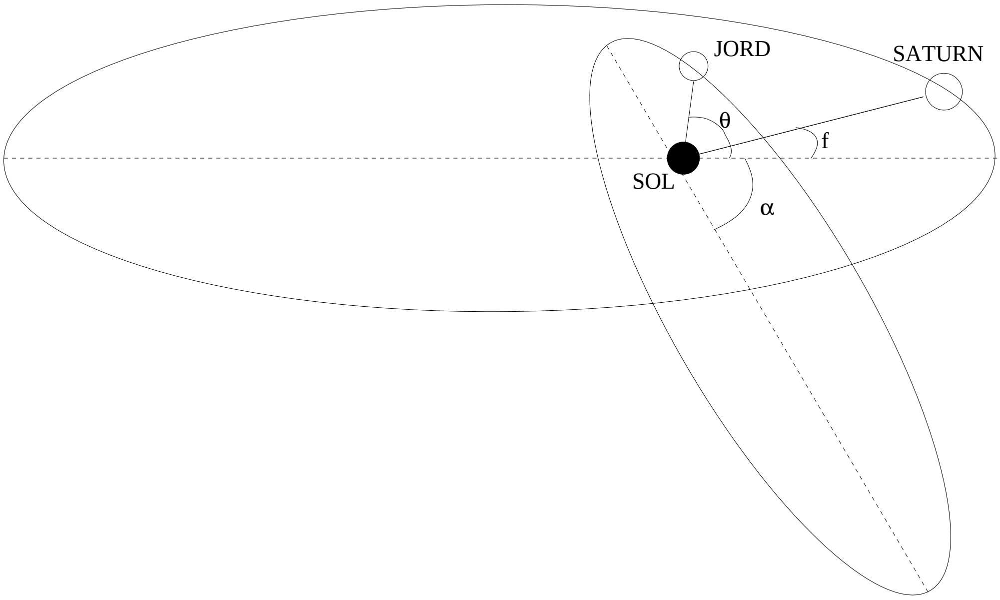

Figure 1: Til oppgave 1

2. I forrige oppgave uttrykte du Saturns posisjonsvektor i $\vec{e}_r/\vec{e}_\theta$-koordinatsystemet. Nå innfører vi isteden et x/y koordinatsystem med enhetsvektorer $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$ som ikke avhenger av tiden, definert ved:
$$\vec{e}_r = \cos f \vec{e}_x + \sin f \vec{e}_y$$
og
$$\vec{e}_\theta = -\sin f \vec{e}_x + \cos f \vec{e}_y$$
Merk at vektorene $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$ ligger langs henholdsvis store og lille halvakse i Saturns bane. Skriv opp posisjonsvektoren $\vec{r}_2$ til jorda (med sola som origo) uttrykt ved vinkelene θ og α, eksentrisiteten e_2 til jordas bane, store halvakse a_2 til jordas bane og enhetsvektorene $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$ (merk igjen at $\vec{e}_x$ og $\vec{e}_y$ er definert i forhold til Saturns bane).

3. Vis at avstanden mellom jorda og Saturn på ethvert tidspunkt kan skrives som
$$d = \sqrt{\left(\frac{a_1(1-e_1^2)x}{1+e_1 x} - \frac{a_2(1-e_2^2)y}{1+e_2 w}\right)^2 + \left(\frac{a_1(1-e_1^2)z}{1+e_1 x} - \frac{a_2(1-e_2^2)v}{1+e_2 w}\right)^2}$$
og finn uttrykk for x, y, z, v og w.

- **OPPGAVE 2** Du skal nå skrive en pseudo-kode som skal beregne banen til satelitten på vei fra jorda til Saturn og finne ut hvilken akselrasjon satelittens rakettmotorer må ha for at den skal komme frem til Saturn. Anta at de eneste tyngdekreftene som virker er tyngdekreftene mellom satelitten og sola og tyngdekreftene mellom Saturn og sola. Vi skal altså se bort ifra tyngdekrefter mellom satelitten, jorda, og Saturn. Rakettmotorene gir konstant akselrasjon a_0 i retning radielt ut fra sola under hele turen. Denne akselrasjonen kommer i tillegg til tyngdekrafta fra sola. Koden skal ha en løkke for mange forskjellige verdier for a_0 og inne i denne løkka, for hver a_0, beregne hele banen ved å beregne (1) satelittens bevegelse i hvert tidssteg, (2) Saturns bevegelse i hvert tidssteg og (3) en sjekk for å se om satelitten med den gitte a_0 har kommet frem til Saturn eller gått forbi. Anta at satelitten har kommet frem når avstanden mellom satelitten og Saturn er mindre enn Saturns radius R_{saturn}. Du trenger ikke å tenkte på at den faktisk må bremse opp før den kommer frem, beregn konstant akselrasjon fra rakettmotorene hele veien. Ved slutten av kodesnutten din skal variabelen a0 ha den verdien av akselrasjonen som satelitten må ha for å komme til Saturn. Ta utgangspunkt i koden i figur 2: alt du trenger er å skrive kode for den delen som er angitt med 'fyll ut'.

```
r_s = liste med posisjonsvektorer (x,y) for satelitten ved forskjellige tidspunkter
r_p = liste med posisjonsvektorer (x,y) for Saturn ved forskjellige tidspunkter
v_s = liste med hastighetsvektorer (v_x,v_y) for satelitten ved forskjellige tidspunkter
v_p = liste med hastighetsvektorer (v_x,v_y) for Saturn ved forskjellige tidspunkter
N=antall tidssteg
deltat=1
G=6.67e-11
mp = massen til Saturn
ms = massen til satelitt
msol=massen til sola
rp_max = maksimalavstanden til Saturn fra sola
a0max= = maximal verdi paa a0 som er mulig med rakettmotorene
r_saturn = saturns radius

rs_init = [x_jord,y_jord] ;initialposisjonsvektor til satelitten
rp_init = [x0_Saturn,y0_Saturn] ;initialposisjonsvektor til Saturn
vs_init = [vx0_s,vy0_s] ;initialhastighetsvektor til satelitten
vp_init = [vx0_p,vy0_p] ;initialhastighetsvektor til Saturn

;;; fyll ut med koden som beregner riktig a0 her:


;;; her slutter koden som du maa fylle ut. a0 har naa riktig verdi:

print, 'akselrasjonen maa vaere:', a0
```

Figure 2: Til oppgave 2

- **OPPGAVE 3** Vi antar at satelitten nå har kommet frem og går i en sirkulær bane rundt Saturn. Satelitten sender ut et radiosignal på frekvensen 10kHz (tilsvarer en bølgelengde på 30km). I figur 3 ser du endring i bølgelende til det mottatte radiosignalet som funksjon av tida: 0 på y-aksen betyr at du mottar signalet som 10kHz. Avviket fra denne frekvensen i det mottatte signalet vises på y-aksen som bølgelengde. Merk at i et lite tidsintervall så mangler kurven. I dette tidsintervallet så mottok man ikke noe radiosignal fra satelitten.

    1. Kan du forklare hvorfor kurven ser slik ut: I forklaringen må du få med hvorfor radiosignalet som sendes ut med frekvens 10kHz mottas på litt andre frekvenser, hvorfor denne kurven har topper og bunner og en mulig forklaring på hvorfor vi ikke mottok signal fra satelitten i en liten periode. Bruk minst en figur i forklaringen.
    2. Bruk kurven til å beregne banehastigheten til satelitten. Forklar hvilke antakelser du gjør. Anta at jorda og Saturn står stille i forhold til hverandre. (hint: du kan få bruk for tall fra den innramma tabellen rett etter oppgaveteksten)

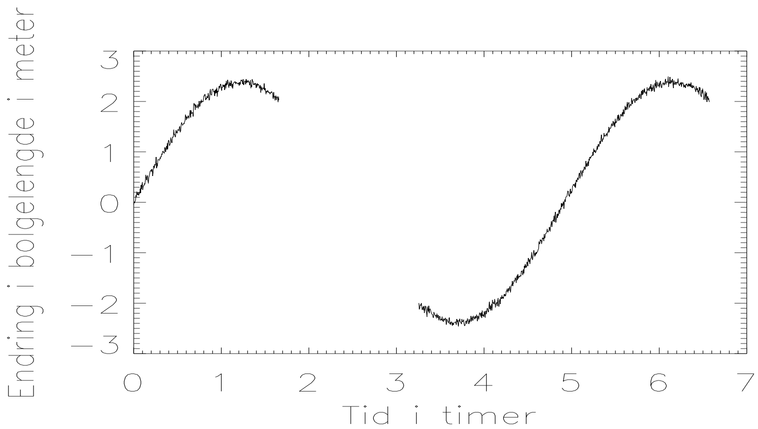

Figure 3: Til oppgave 3

- **OPPGAVE 4** Satelitten bruker store solpaneler for å generere energi. Vi skal nå beregne hvor stort areal av solpaneler satelitten trenger. Datamaskin og instrumentene ombord i satelitten bruker en energi på 100W.

    1. Bruk solas temperatur og størrelse til å beregne solas luminositet. Anta at sola er et sort legeme.
    2. Solpanelene har en effektivitet på 12%, dvs. at 12% av energien de mottar blir gjort om til elektrisk energi i satelitten. Hvor stort areal må solpanelet ha?

- **OPPGAVE 5** Et av instrumentene på satelitten sender nå ut en energirik protonstråle mot Saturn. Protonene sendes ut med en hastighet på 99.5% av lyshastigheten i forhold til satelitten. Skriv opp energi-bevegelsemengde-firervektoren P_μ til et proton i protonstrålen, både fra satelittens referansesystem og fra protonets referansesystem.

- **OPPGAVE 6** Protonstrålen blir bremset i Saturns atmosfære og blir til slutt reflektert rett tilbake til satelitten, nøyaktig i motsatt retning av den inkomne strålen. Rett før den reflekterte strålen treffer satelitten så har den en hastighet på 99% av lyshastigheten sett fra satelittens referansesystem (vi antar at satelitten ikke har endret hastighet siden protonet ble sendt ut). Sett fra den utsendte protonstrålens referansesystem, finn energi-bevegelsemengde-4-vektoren til det innkomne protonet og beregn hvor mye energi et proton har vunnet på turen gjennom Saturns atmosfære og tilbake igjen. (hint: sett opp energi-bevegelsemengde-firervektoren til protonet som kommer tilbake, sett fra satelittens referansesystem og bruk transformasjonsegenskapene til 4-vektorer til å finne denne 4-vektoren i det utsendte protonets referansesystem).

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_\mathrm{e} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_\mathrm{p} = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_\mathrm{n} = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_\mathrm{max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Jordmassen: $M_\mathrm{jord} = 6 \times 10^{24}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Massen til Saturn: 5.68×10^{26} kg
Middelavstand til Saturn: 1.433×10^{12} m
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

$$P^2 = a^3$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

$$\ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

$$m = G(m_1 + m_2)$$

$$p = h^2/m$$

$$E = \frac{1}{2}\hat{\mu}v^2 - G\frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\hat{\mu} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$E = \frac{G m_1 m_2}{2p}(e^2 - 1)$$

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{(ellipse)}$$

$$p = a(e^2 - 1) \quad \text{(hyperbel)}$$

$$p = 1/2a \quad \text{(parabel)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = M\vec{R}$$

$$m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$

$$\frac{m_p}{m_*} = \frac{v_*}{v_p}$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\rho(r) = \frac{v^2(r)}{4\pi G r^2}$$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + (r/R)^2}$$

$$< K >= -\frac{1}{2} < U >$$

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

$$I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dA dt d\nu}$$

$$L = \frac{dE}{dt}$$

$$F = \frac{dE}{dAdt}$$

$$F = \sigma T^4$$

$$n(v)dv = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$$

$$\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT\ln 2}{m}}$$

$$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\mathrm{pc}}\right)$$

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mathrm{rel}} & -v_{\mathrm{rel}}\gamma_{\mathrm{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\mathrm{rel}}\gamma_{\mathrm{rel}} & \gamma_{\mathrm{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_\mu = \gamma(1, \vec{v})$$

$$< E_K >= \frac{3}{2}kT$$

$$N = \frac{M}{\mu m_H}$$

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}.$$