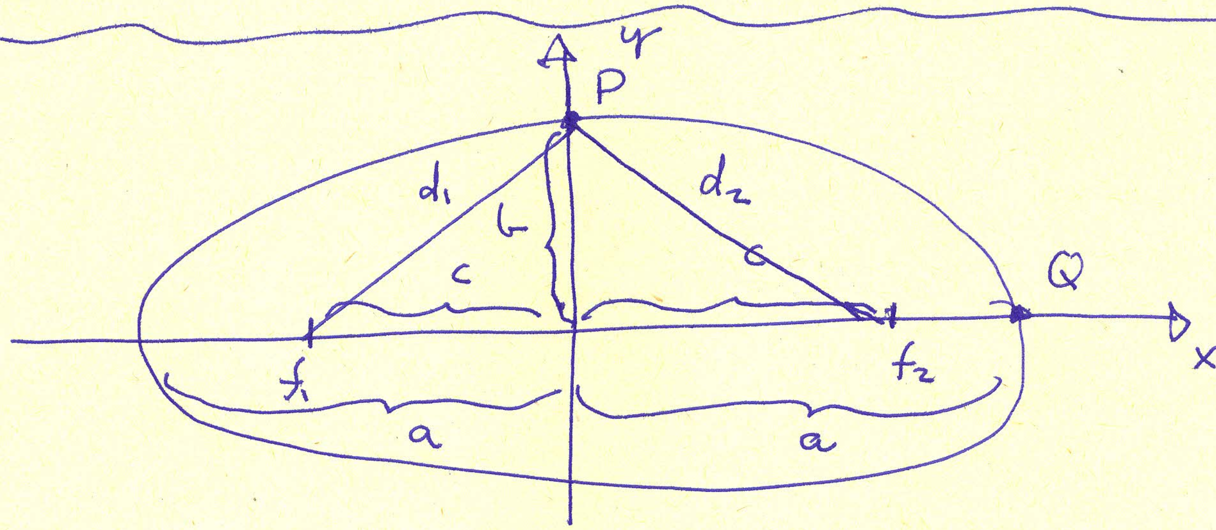
Fra kartesiske koordinater til polarkoordinater:
Ligningen for en ellipse




$c$ = avstand fra origo til fokus

$a$ = store halvakse, $b$ = lille halvakse

Plangeometrisk definisjon av ellipse:

Mengden av punkter i planet som er slik at summen av avstandene fra punktet til to gitte fokus (punktene $f_1$ og $f_2$ i figuren) er den samme.

P og Q er punkter på ellipsen.

I P: $\quad d_1 + d_2 = 2\sqrt{b^2 + c^2}$

I Q: $\quad d_1' + d_2' = \underbrace{c + a}_{\text{avstand fra } f_1} + \underbrace{a - c}_{\text{avstand fra } f_2} = 2a$

Må ha

$$d_1 + d_2 = d_1' + d_2'$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c^2 = a^2 - b^2}$$

Eksentrisiteten til ellipsen :

$$e \equiv \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Vi kan da skrive

$$c = ae$$

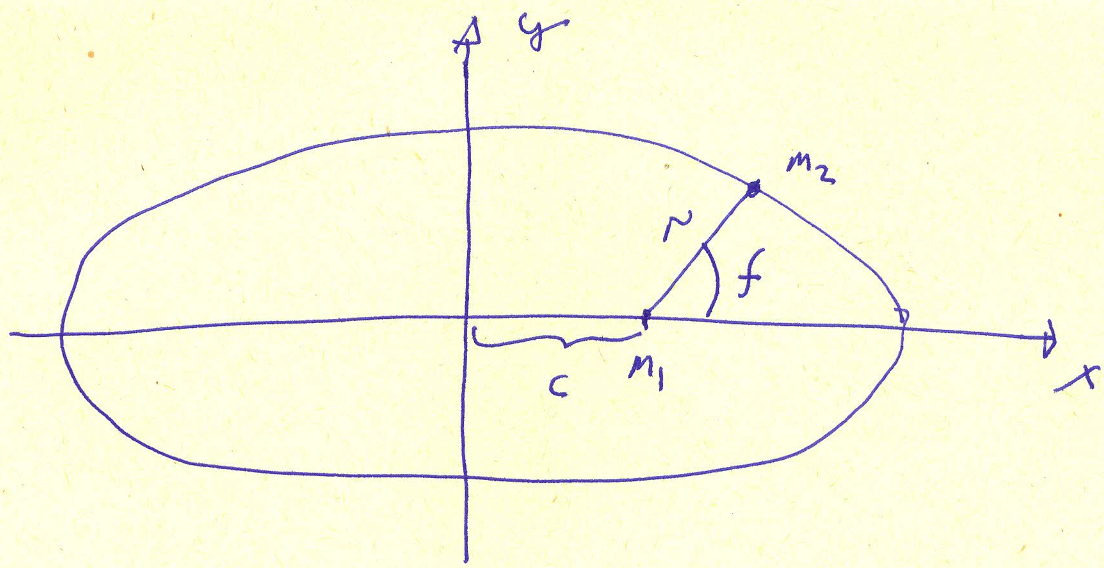
$$c^2 = a^2 e^2 = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{b^2 = a^2(1 - e^2)}$$

Mest kjent med ligningen for en ellipse i kartesiske koordinater :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vil nå vise at løsningen vi fant for $r = r(\theta)$ er konsistent med denne ligningen.




Ser at
$$x = c + r\cos f$$
$$y = r\sin f$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a} = \frac{c}{a} + \frac{r}{a}\cos f \equiv e + \eta\cos f \;;\; \eta \equiv \frac{r}{a}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{r}{b}\sin f = \frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}\sin f = \eta\frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}}$$

For at
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

må vi ha
$$(e + \eta\cos f)^2 + \eta^2\frac{\sin^2 f}{1-e^2} = 1$$

Litt algebra gir
$$\frac{1 - e^2\cos^2 f}{1-e^2}\eta^2 + (2e\cos f)\eta - (1-e^2) = 0$$

Ved å bruke formelen for den generelle løsningen av en andregradslikning:

$$\eta = \frac{1-e^2}{2(1-e^2\cos^2 f)}\left[-2e\cos f \pm \sqrt{4e^2\cos^2 f + 4\frac{1-e^2\cos^2 f}{1-e^2}(1-e^2)}\right]$$

$$= \frac{1-e^2}{2(1-e^2\cos^2 f)}\left(-2e\cos f \pm 2\right)$$

$\eta = \frac{r}{a}$ er pr. definisjon positiv, og $0 \leq e < 1$. Da er bare +-tegnet i parentesen mulig, og vi får

$$\eta = \frac{1-e^2}{2(1-e\cos f)(1+e\cos f)}\,2(1-e\cos f)$$

$$= \frac{1-e^2}{1+e\cos f}$$

Men $\eta = \frac{r}{a}$, så

$$\boxed{r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}}$$

Løsningen vi fant er virkelig en ellipse!