Prosjektoppgave i

FYS-MEK 1110

03.05.2005

Kari Alterskjær

Gruppe 1

Prosjektoppgave i FYS-MEK 1110 våren 2005

Hensikten med prosjektoppgaven er å studere Jordas bevegelse rundt sola og beregne bevegelsen til satellitten Rosetta i gravitasjonsfeltet fra Sola og Jorda idet Rosetta gjennomførte sin første ”gravity assist”. Til slutt i oppgaven studerer jeg begrepet ”gravity assist” nærmere.

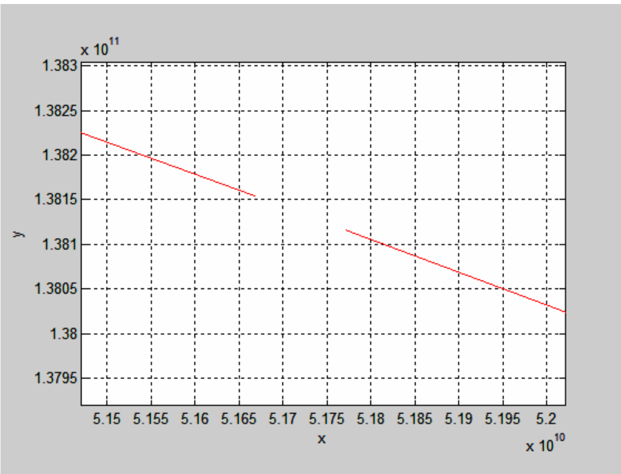
<u>Oppgave a)</u>

Jeg beregner og plotter Jordas bane rundt sola fra 1.desember 2004 og ett siderisk år fremover (365.25 døgn = 365.25*24*3600 sekunder), og kontrollerer tilslutt om Jorda er tilbake på samme sted som den startet fra når et år har gått. Dette kan ses på to måter. Ut fra plottet ser det ved første øyekast ut som Jorda er tilbake på samme sted. Jeg lar Mat-Lab skrive ut den siste posisjonen det beregner for Jorda og ser at denne likner komponentene til startposisjonen:

Oppgitt startposisjon (i m):
x= 5.166734180331959E+10 y =1.381539034726806E+11 z = -1.604723030678928E+06

Mine sluttverdier (i m):
x=5.177E+10 y = 1.3812E+11 z = -0.0000E+11

Om jeg imidlertid tenker på hvilken størrelsesorden det er her snakk om, blir det tydelig at disse punktene er langt fra hverandre. Jeg lar mat-lab beregne avstanden mellom de to punktene og finner at Jorda er 1.0958e+008 meter (eller 1.0958e+5 km) fra startpunktet 1.desember 2005. Jeg ser også dette ut fra zoom i plottet av banen (Fig. 1).



Figur 1

Kode i Mat-Lab:

```
'Jordas posisjon 1. desember 2005'
r(N,:)


'Avstand mellom endepunktene i banen'
norm(r(1,:)-r(N,:))
```

Om jeg likevel tar hensyn til hvor mange kilometer Jorda har tilbakelagt i løpet av denne tiden, blir det tydelig at Jorda er svært nær sitt startpunkt etter et siderisk år.

Hvis vi lar løkka løpe for et tidsintervall akkurat større enn et siderisk år, ser vi at jorda ikke fortsetter i samme bane, men passerer lenger bort fra sola enn den var et år tidligere. Dette kommer av den store usikkerheten i de numeriske beregningene – at vi får et lite feilledd ved hver utregning og at denne blir med videre – feilen kumulerer seg.

Oppgave b)

I denne oppgaven plotter jeg Jordas bane med ulike antall steg (N = 500, 1000, 2000, 4000), og ser hvilken innvirkning dette har på beregningene. Resultatet er at de ulike banene går svært parallelt. Avstand mellom start og sluttpunkt ser også ut til å være svært lik. De skjærer hverandre riktig nok i enkelte punkter og befinner seg derfor på ulike tidspunkt i året nærmere eller lenger bort fra sola enn hva de andre banene gjør. Denne unøyaktigheten kommer igjen av at de numeriske beregningene ikke er helt nøyaktige – at det for hver gang man beregner et punkt oppstår en liten feil og at denne kumulerer seg. Tar man med mange punkter får man en ”glattere” kurve med flere punkter, men blir antallet for stort vil det være så mange beregninger at feilen blir uforholdsmessig stor. Har man få punkter vil banen bli unøyaktig fordi en da kan risikere å ikke gjøre beregninger i punkter som vil være kritiske for kurvens form.

Plottene viser at resultatet til vårt bruk ikke er kritisk avhengig av antall steg, men det ville vært noe ganske annet om en for eksempel skulle lande et fartøy på Jorda etter disse beregningene.

Oppgave c)

Jeg lar Mat-Lab beregne tidspunktene der Jordas bane krysser koordinataksene i løpet av banen rundt sola (se kode nedenfor), og finner at den krysser x-aksen 21. mars og 23. september, og y-aksen 22.desember og 22. juni. Jeg behandler passeringen av hver akse for seg.

Datoene hvor den krysser x-aksen er vår - og høstjevndøgn – de dagene vi har like mye lys som mørke. Dette stemmer fint med hvordan x-aksen er plassert. Den ligger akkurat der hvor skjæringen mellom Jordas ekvatorplan og planet som Jordas bane utspenner, treffer sola. Dette innebærer at Jordas helning skjer i y-retning – at verken nord- eller sydpol er vendt bort fra sola. Dette fører til at vi alle steder på kloden får like mye lys som mørke ettersom Jorda har konstant vinkelhastighet.

22.desember og 22. juni er vinter- og sommersolverv – årets korteste og lengste dag (på den nordlige halvkule). Dette er punktene hvor Jordas ekvatorplan, og da henholdsvis den nordlige (21.desember) og den sørlige (21.juni) halvkule er vendt lengst bort fra sola. Dette innebærer at vi på den nordlige halvkule har årets korteste dag 21.desember og årets lengste dag 21.juni (da den nordlige halvkule er vendt/tiltet mot sola).

Del av plott for å beregne når Jorda krysser aksene:

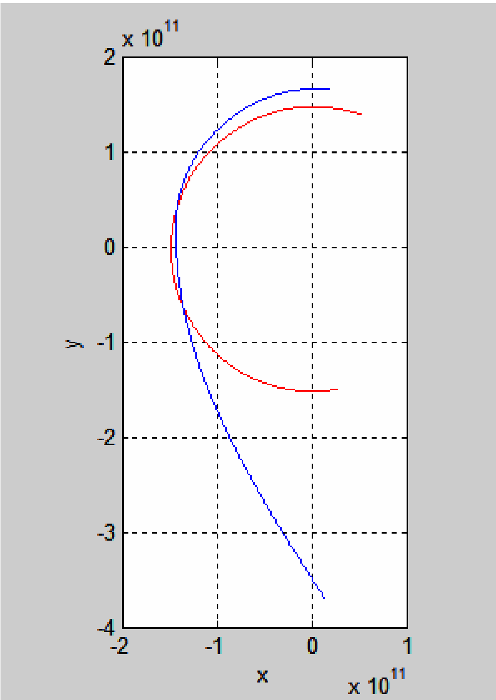
```
for n=2:N
	if r(n,2)*r(n-1,2) <= 0
```

```
    'Jorda skjærer vår x-akse etter'
    sekunder = n*delta_t;
    antall_dogn = sekunder/(3600*24)
    end;

    if r(n,1)*r(n-1,1) <= 0
    'Jorda skjærer vår y-akse etter'
    sek = n*delta_t;
    dogn = sek/(3600*24)
    end;

end;
```

Oppgave d)



Figur 2

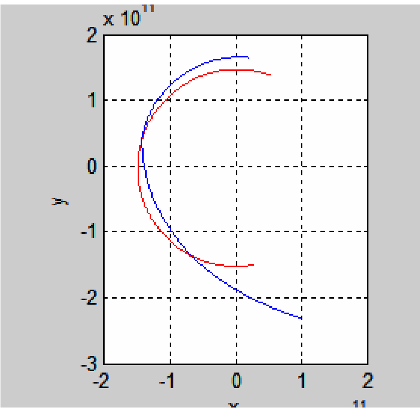
Plott av Jordas og Rosetta-satellittens bane i perioden 1.desember 2004 til 1.juli 2005.

Ikke-adaptiv metode

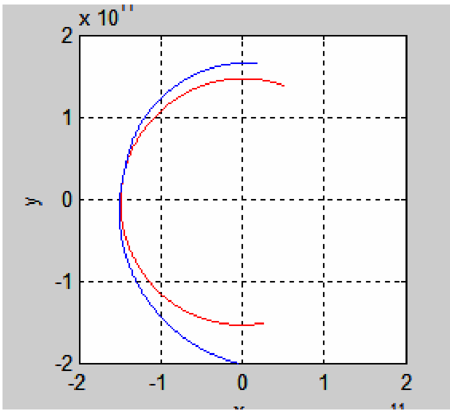
For plottekode se vedlegg 1.

Oppgave e)

I denne oppgaven plotter jeg både Jordas og Rosettas bane med ulike antall steg (N = 500, 1000, 2000, 4000), og ser hvilken innvirkning dette har på beregningene. Det er tydelig at ulike steg ikke påvirker jordas bane nevneverdig. Dette er ikke overraskende etter hva jeg kom fram til i oppgave b. Ulike antall steg fører imidlertid til helt forskjellige plott av Rosettas bane. Bruker jeg 500 stepp blir satellitten slynget i en bane helt ulik den som framkommer om jeg bruker 4000 stepp:



Figur 3



Figur 4

Til venstre:
Bane beregnet med 500 steg.

Til høyre:
Bane beregnet med 4000 steg.

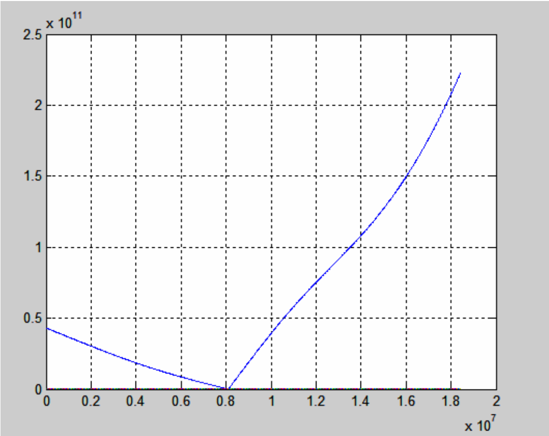
Dette resultatet er imidlertid ikke særlig overraskende. Siden Jorda har enorm masse i forhold til Rosetta-satellitten vil gravitasjonen fra Jorda ha stor betydning for Rosettas bane når den nærmer seg og passerer Jorda. Her er kreftene fra Jorda så store at selv små forskjeller i hvor banen blir kalkulert, vil ha stort utslag. Det vil med andre ord ha mye å si akkurat hvilket punkt banen blir beregnet ut i fra. Antall steg deler den tiden vi ser på i like store deler. Det innebærer at ulike antall steg vil beregne banen i ulike tidspunkt. Det betyr at beregningene kan "hoppe over" punkter som kunne ha spilt kraftig inn på Rosettas bane, eller at de på grunn av unøyaktigheter kan komme til punkter hvor gravitasjonskraften er uforholdmessig stor.

Det er nå klart at en av årsakene til at banen til Jorda ikke ble særlig påvirket i oppgave b var at den kun ble påvirket av ett gravitasjonsfelt og at dette var relativt stabilt gjennom hele perioden. Dette førte til at beregningene ble like selv om stegene var store. I denne oppgaven vil derimot store steg i det Rosetta passerer Jorda føre til store feil i beregningene.

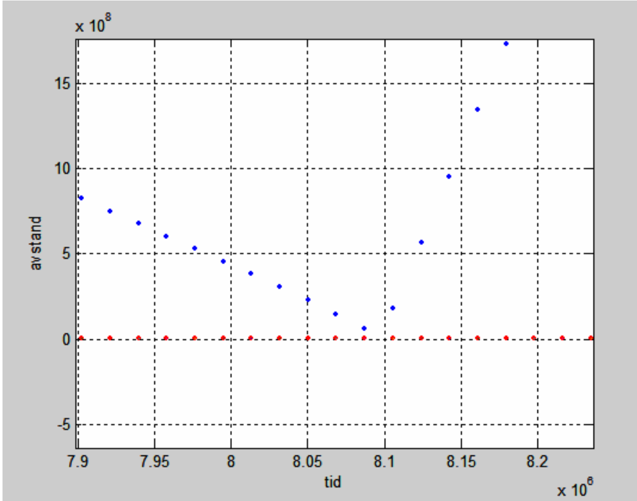
Oppgave f)

Her beregner jeg og plotter avstanden mellom Jorda og Rosetta som en funksjon av tiden. Plottet (fig. 5) forteller at avstanden minker jevnlig til satellitten nesten krasjer i jorda, for så å øke kraftig. Avstanden mellom de to er større i slutten av perioden enn i begynnelsen i perioden, og jeg ser også at stigningen i avstand per tidsenhet er større etter "kollisjonen" enn minkningen før denne. Dette innebærer at hastigheten de skilles med er større enn hastigheten de nærmet seg med.

Programmet skriver ut den minste avstand mellom massesentrene de to legemene: 6.0939e+007 (m). Dette innebærer at de ikke virkelig kolliderer, noe også zoom av dette punktet på plottet antyder (fig. 6) (her antyder den røde linjen Jordas atmosfære). Av dette plottet ser vi likevel at dette kritiske området er beregnet i så få punkter at det vil være vanskelig å slå noe fast med sikkerhet.



Figur 5

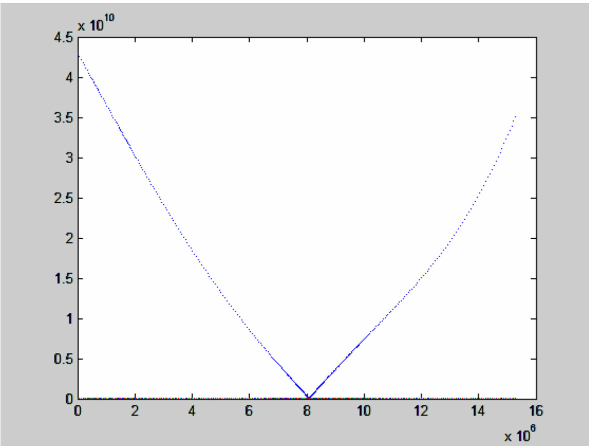


Figur 6

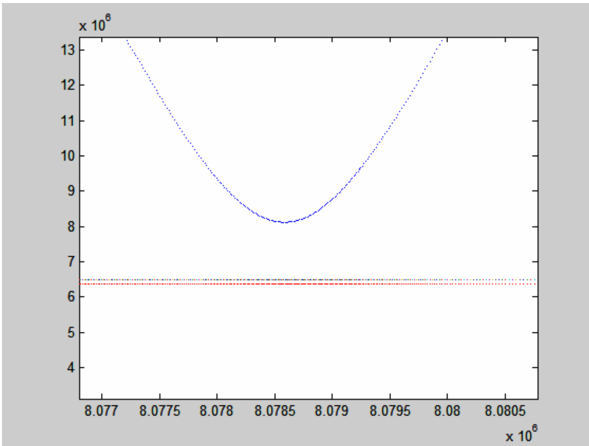
Oppgave g)

Plotter nå banene ved hjelp av en adaptiv Runge-kutta metode (se vedlegg 2) og beregner avstanden mellom satellitt og jord på nytt. Plottene skiller seg i stor grad fra plottene jeg fikk ved bruk av ikke-adaptiv metode. Dette blir særlig tydelig om jeg zoomer inn på det kritiske området hvor avstanden mellom Jord og satellitt er på et minimum (fig. 8). Ved ikke-adaptiv metode var dette området beregnet kun ut i fra enkelte punkter, som gav stor usikkerhet. Fra figur 8 ser vi at den adaptive metoden beregner det samme området ved hjelp av en rekke punkter. Her ser vi at satellitten følger en bane tydelig utenfor jordas atmosfære. Dette var ikke like tydelig i f).

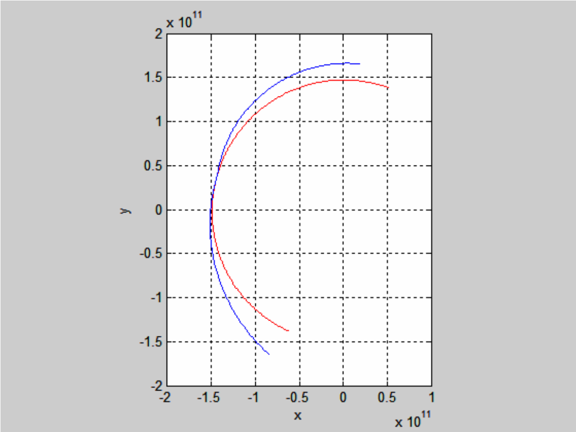
Ved denne metoden finner jeg at minimumsavstanden mellom Jorda og satellitten er 8.1460e+006 (m).



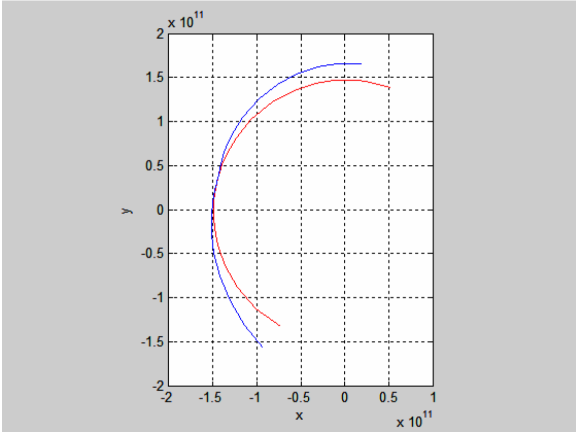
Figur 7



Figur 8



Banen med gitt feilmargin
Figur 9



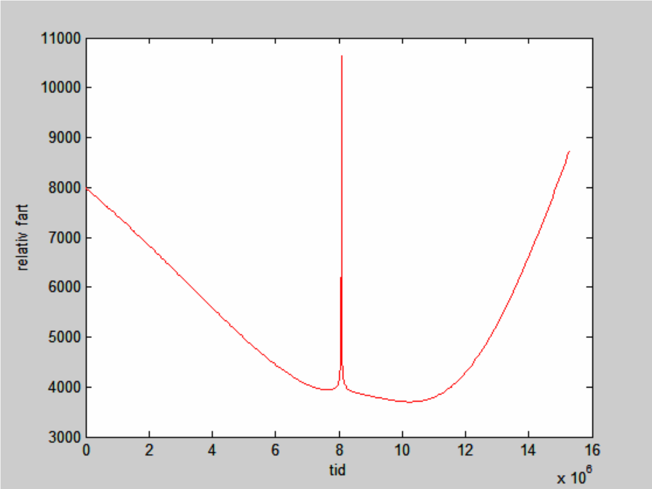
Banen med feilmargin 1.0E-05
Figur 10

Størrelsen på feilmarginen spiller veldig lite inn på resultatene og plottene vi får med den adaptive metoden. Dette kommer tydelig fram av figur 9 og 10 ovenfor. Blir den imidlertid veldig stor, blir det uforholdsmessig stor avstand mellom punktene Mat-Lab beregner banen ut fra. Resultatet blir da unøyaktig og plottene fremstår som oppstykket eller hakkete. Blir feilmarginen svært liten, beregnes banen ut fra svært mange punkter og operasjonen tar uhensiktsmessig lang tid.

Oppgave h)

Plotter relativ fart mellom Jorda og Rosetta i den gitte perioden (1.desember 2004 til 1.juli 2005) (fig 11). I begynnelsen av perioden vi ser på er vinkelen mellom hastigheten til Jorda og hastigheten til satellitten relativt stor. Dette medfører at den relative farten her har en stor verdi. Etter hvert som satellitten nærmer seg Jorda, blir banene og derfor hastighetene mer parallelle og den relative farten minker gradvis. I det satellitten blir slynget rundt Jorda vil retningen på dens hastighet endres veldig, og vil i denne perioden stort utslag for den relative farten. Etter dette tidspunktet vil banene og hastighetene til de to fjerne seg fra hverandre – få større vinkel. Dette fører til at vi igjen får større relativ fart.

Vi må i tillegg tenke på farten satellitten og Jorda har til de ulike tidene. Dette spiller mest inn i det Rosetta passerer Jorda. Her får den en voldsom fartsøkning som følge at den blir slynget rundt Jordas som en følge av gravitasjon. Det store utslaget for relativ fart i det satellitten passerer Jorda er da en konsekvens av både stor vinkel mellom de ulike hastighetene og at Rosetta har svært stor fart.



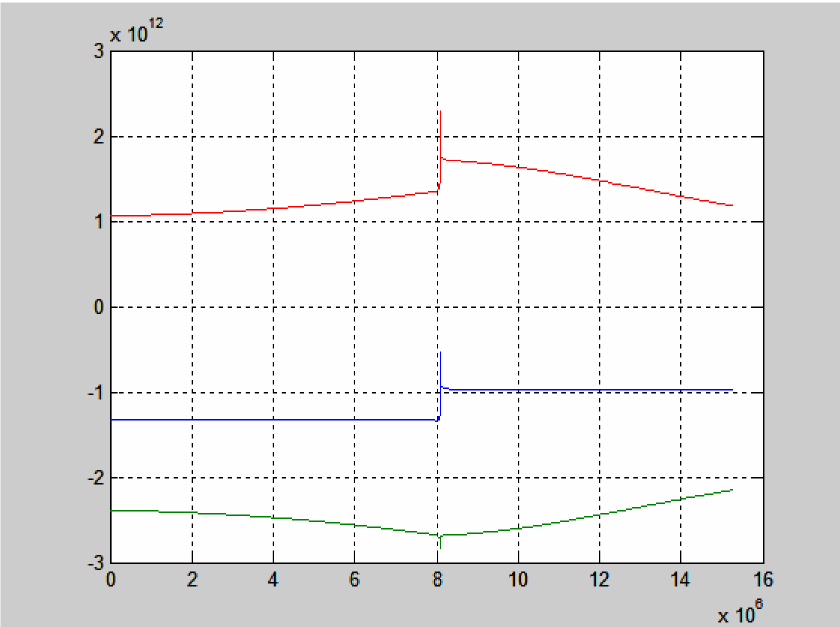
Figur 11

Oppgave i)

Ep = -G*M*m/r gir den potensielle energien mellom henholdsvis jorda og satellitten og sola og satellitten, der M er massen til jord/sol, m er satellittens masse og r er avstanden mellom satellitt og jord/sol. Summen av disse og satellittens kinetiske energi gir den totale mekaniske energien.

Ut fra figur 12 ser en at den totale mekaniske energien til satellitten øker i det den passerer jorda (ser at det skjer på dette tidspunktet om du sammenholder dette plottet med plottet som viser avstanden mellom de to legemene, fig 7). Dette kommer også fram av energiendringen fra første til siste punkt i bevegelsen vi ser på :

energiendring = 3.5702e+011



Øverst:
Kinetisk energi
(for å se hvordan farten til Rosetta påvirkes)

Midten:
Total mekanisk energi

Nederst:
Potensiell energi
(for å sjekke at den totale energien gir mening)

Figur 12

Oppgave j)

Ut i fra beregningene i oppgavene ovenfor ser en at gravity assist innebærer at satellitten drar nytte av jordas gravitasjonsfelt. I dette tilfellet øker både farten og den totale mekaniske energien til Rosetta-satellitten, i tillegg til at banens retning påvirkes i det den passerer Jorda.

Gravity assist er da at et legeme bruker gravitasjonen fra et annet legeme til å endre retning, fart og total mekanisk energi. Jeg ser nærmere på dette i neste oppgave.

Oppgave k) og l)

Her legger jeg til ulike tilleggshastighet i initialbetingelsene for Rosetta for å finne ut hvor viktige initialbetingelsene er for det endelige resultatet. Tilleggshastigheten er rettet normalt på Rosettas "opprinnelige" hastighet. Jeg finner retningen til tilleggshastigheten ved hjelp av vissheten om at skalarproduktet av vektorer som står vinkelrett på hverandre vil være null. Om initiell fart er gitt ved vr-vektor, tilleggshastighet ved vr2-vektor og delta er hva en må multiplisere initiell fart med for å få ønsket tilleggshastighet, har vi:

vr-vektor(t) • vr2-vektor(t) = vr_x*vr2_x + vr_y*vr2_y = 0

Jeg oppnår dette om vr_x = vr2_y
vr_y = -vr2_x

Har da at komponentene av tilleggsfarten er gitt ved
vr2_x = -delta*vr_y
vr2_y = delta*vr_x

Her innebærer negative verdier av delta at Rosetta får en ekstra hastighet bort fra sola, og motsatt.

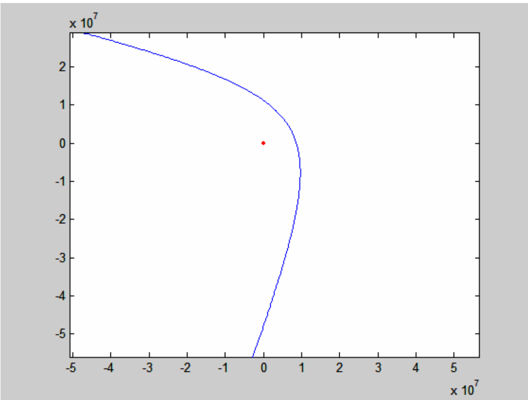
Delta	Minste avstand	Endring i total energi
-5e-4	1.3369e+008	1.1205e+011
-4e-4	1.0686e+008	1.3441e+011
-3e-4	8.0291e+007	1.6686e+011
-2e-4	5.4226e+007	2.1682e+011
-1e-4	2.9327e+007	2.9551e+011
0	8.1208e+006	3.5704e+011
1e-4	9.2714e+005	-8.5794e+010
2e-4	1.5636e+007	-3.2153e+011
3e-4	3.8926e+007	-2.5458e+011
4e-4	6.4439e+007	-1.9509e+011
5e-4	9.0717e+007	-1.5575e+011

Endringer i Rosettas bane:
Med små negative tillegg i hastigheten, som peker bort fra sola, vil Rosettas bane kysse Jordas i to punkter, før den fortsetter lenger bort fra sola enn hva Jorda gjør. Blir disse tilleggene større, går satellittens bane raskere og raskere bort fra Jordas bane, og sola. Dette beskriver også banen uten tilleggshastighet.

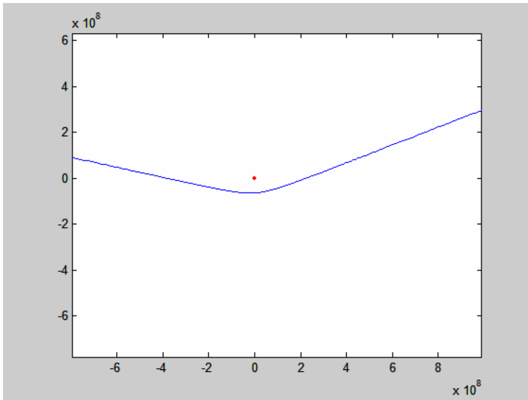
Med små positive tillegg i hastigheten, som peker mot sola, vil Rosettas bane krysse Jordas i ett punkt, for så å fortsette nærmere og nærmere sola. Blir disse tilleggene større, vil de til et visst punkt føre til at satellittens bane går raskere og raskere inn mot sola.

Ut i fra endringene i satellittens bane de ulike initialbetingelsene førte til, kan en slå fast at betingelsene er av stor betydning.

For å se hvordan gravity assist fører til økt eller redusert energi, plotter jeg posisjonen til Rosetta relativt til Jorda (fig 13 og 14):



ikke tilleggshastighet/negativ tilleggshastighet
figur 13



positiv tilleggshastighet
figur 14

Ut fra disse plottene og tabellen ovenfor ser jeg at når tilleggshastigheten er negativ – at den peker bort fra sola - vil satellitten passere Jorda på den siden som vender mot sola. Det essensielle er likevel at satellitten tar igjen Jorda på en slik måte at de begge går i ”samme retning”, slik at Jordas gravitasjon kan dra satellitten videre og øke dens kinetiske energi. Rosetta slynges så utover på en slik måte at dens totale mekaniske energi har økt. Jeg leser av tabellen at energiendringen her er nettopp positiv – Rosetta får mer mekanisk energi. Dette burde stemme med plottene, som viser at satellitten blir slynget i en bane større enn Jordas.

Når tilleggshastigheten er positiv – den peker mot sola – vil satellitten passere jorda på den siden som vender bort fra sola (på figur 14 vil den komme fra venstre). Her tar den igjen Jorda ”utenfra” slik plott 14 viser, og vil bli dratt bakover og få redusert mekanisk energi. Av tabellen ser jeg nå at Rosetta her har nettopp en negativ energiendring. Også dette stemmer med plottene, som viser at satellitten blir slynget i en bane nærmere sola.

Jeg ser også fra tabellen over at jo nærmere Jordsystemets massesenter satellitten passerer, jo større endring i mekanisk energi får den.

Det essensielle punktet som bestemmer hvorvidt ”gravity assist” skal kunne gi økt eller redusert mekanisk energi er da her på hvilken måte satellitten kommer inn i Jordas gravitasjonsfelt i forhold til Jordas egen bane rundt sola.