

Kaotiske systemer i fysikken

Et notat for bruk i FYS-MEK/F 1110 våren 2006

av Arnt Inge Vistnes

Innledning

Grunnlaget for den klassiske mekanikken ble utmeislet gjennom Newtons tre lover, og i en undersøkelse blant fysikere ble nylig Newtons bidrag til fysikken rangert som en større bragd enn alle Einsteins arbeider tilsammen. Newtons mekanikk fikk blant annet en enorm innflytelse i filosofien og folks tenkesett generelt, fordi Newtons lover innebærer at dersom vi kjenner initialbetingelsene og kreftene som virker på et system, kan vi regne oss fram til hvordan systemet kommer til å være i all fremtid. Man fikk derfor en oppfatning av at fysikken var deterministisk i minste detalj, og filosofene fikk store problemer bl.a. når de diskuterte fri vilje og ansvar for egne handlinger. For dersom menneskekroppen til syvende og sist kan beskrives ved fysikk (og kjemi), var ikke da også våre tanker og vår handlinger forutbestemt på en deterministisk måte av de initialbetingelsene som man måtte ha på et eller annet vilkårlig tidspunkt?

Det gikk over 300 år etter Newtons *Principia* før man innså at naturen på langt nær er så deterministisk som man hadde trodd. Man innså at Newtons lover kunne løses eksakt når man hadde et to-legeme-problem, men at det samme ikke gjaldt for systemer der tre eller flere legemer påvirker hverandre med sammenlignbare krefter. Og man oppdaget at det finnes en rekke fysiske systemer som man ikke kan regne seg fram til hvordan de vil bli i fremtiden, fordi systemene viser en kaotisk oppførsel.

I dette notatet skal vi fortelle litt om karakteristiske trekk ved kaotiske systemer. Kaosteori er en egen disiplin innen matematikk, og det er vel matematikerne som har jobbet mest med slike systemer hittil. Deres analyser blir imidlertid ofte abstrakte og løsrevet fra fenomener vi kan observere i naturen rundt oss. Jeg har derfor i dette notatet forsøkt å vektlegge tilknytningen til et fysisk system, nettopp for å få fram at kaotiske systemer i høy grad er aktuelle også i fysikken. For bare et par år siden var en norsk astrofysiker med på å vise at bevegelsen til noen av månene rundt Saturn (eller var det Neptun?) har kaotisk oppførsel, og at man ikke kan beregne banen til disse månene mer enn noen få år framover i tid. Og de av dere som skal gå videre i meteorologi vil jo få masse å gjøre med et kaotisk system, nemlig værsystemet på Jorda vår. De som skal jobbe med fluid mekanikk vil møte kaotiske systemer i enhver turbulens-sammenheng. Og de som skal videre i vanlig fysikk, vil også ha glede av å kjenne til kaotiske systemer bedre. Blant annet er det noen interessante analogier mellom kaotiske systemer og kvantemekanikk. Og når man studerer komplekse systemer, kan fraktaler og andre karakteristiske trekk ved kaotiske systemer være nyttige begreper å anvende.

Når kaotiske systemer er blitt en så viktig del av fysikken som de er blitt, hvorfor behandler da ikke læreboka vår kaotiske systemer på en ordentlig måte? Ja, det kan man lure på! Det har nok mest med konservatisme å gjøre, nemlig at mange fysikere har et statisk bilde av "hva som må være med" i en lærebok i fysikk, noe jeg selv synes er sørgelig når man ser at dette fører til at mange deler av mer moderne, spennende fysikk ikke blir med.

En annen viktig grunn til at kaotiske systemer ikke er med i lærebøker hittil er at kaotiske systemer stort sett må undersøkes ved hjelp av datamaskinberegninger siden rent analytiske løsninger ikke finnes. Det er ingen formel for kaotiske systemer som man bare kan sette et tallsett inn i og

få svaret ut på en kalkulator. Man må ofte følge et system over en betydelig tid med et stort antall gjentatte beregninger for å få fram de typiske trekkene ved kaotiske system. Som dere vet, er det ikke så mange universiteter i verden ennå som har tatt i bruk numeriske metoder i matematikk og fysikk allerede fra starten av universitetsstudiet, slik vi gjør ved UiO. Da er det ved de fleste læresteder foreløpig nesten umulig å gå inn i kaosteori allerede i begynnerkursene i fysikk på en tilfredsstillende måte. Her ved UiO ligger forholdene bedre til rette, men selv hos oss er det til dels en krevende prosess å sette seg litt inn i kaotiske system. Det skyldes at det er en utfordring for vår tanke å fatte hvordan kaotiske system oppfører seg, nettopp fordi vi her får et gløtt inn i en verden som vi ikke har viet tanken vår til tidligere. Men nettopp dette gjør kaotiske systemer ekstra interessante når man først har fått øynene opp for hva som karakteriserer dem! Det gir en dypere forståelse av naturen.

Et konkret kaotisk system

Som nevnt innledningsvis, ønsker vi i kurset vårt å knytte kaosteori til et virkelig fysisk system for at man skal kunne se konsekvensene av de karakteristiske trekkene vi kommer fram til. Vi har i flere år sett på en ball som spretter opp og ned fra et vibrerende underlag. Denne gangen velger vi en pendel.

Vi vil på forelesningene vise at en vanlig pendel vanligvis er prototypen på en deterministisk bevegelse. Noe så trofast som bevegelsen til en pendel på et gammelt bestefarsur skal man lete lenge etter. Men hekter man enda en pendel i enden av den første pendelen, kan situasjonen endre seg drastisk! Vi får en dobbeltpendel som absolutt ikke er forutsigbar i sin bevegelse.

Det hadde vært morsomt å nettopp ta utgangspunkt i dobbeltpendelen når vi skal studere et kaotisk system, nettopp fordi vi har en slik pendel tilgjengelig og kan observere den direkte. Men det er vanskelig å sette opp ligningsystemet for en dobbeltpendel ut fra den fysikk-formalismen vi hittil har gjennomgått. Jeg har derfor valgt et noe enklere system som utgangspunkt for beskrivelsen i dette notatet og som utgangspunkt for oblig 3. Systemet vi har valgt er en vanlig pendel, men som påtrykkes et ytre periodisk kraftmoment i tillegg til tyngde og luftmotstand.

Vi kan tenke oss en liten, tung kule som sitter ytterst på en lang, tynn, stiv stang. Kulas masse er m og er mye større enn massen til stanga. Avstanden mellom opphengningspunkt og kulas sentrum er L . Posisjonen til pendelen er gitt ved vinkelen θ stanga danner med loddlinjen under opphengningspunktet. Kula blir påvirket av gravitasjonskraften mg og av luftmotstand. Luftmotstanden burde nok beskrives på en liknende måte som vi gjorde i oblig 1 da vi så på luftmotstanden for en dråpe som faller gjennom luft. Men det ville kreve så mye ekstra regning at vi nøyer oss med en enklere beskrivelse, nemlig at luftmotstanden (friksjonen) er $F_f = -qv$ hvor v er farten til kula (langs banen) og q er en luftmotstandskoeffisient. Luftmotstanden kan vi tenke oss virker gjennom sentrum i kula.

I tillegg til tyngde og luftmotstand, blir pendelen påvirket av et ytre harmonisk varierende kraftmoment som vekselvis forsøker å dreie pendelen med urviseren og mot urviseren, uansett hvilken posisjon pendelen befinner seg i. Kraftmomentet endrer seg harmonisk med tiden med en vinkelhastighet ω_y og amplitudeverdi τ_{y0} , slik at: $\tau_y(t) = \tau_{y0} \sin(\omega_y t)$.

Merk at denne ytre, pådyttede kraften ikke *tvinger* pendelens bevegelse, - den bare representerer et ekstra kraftmoment som modifierer den bevegelsen pendelen ellers ville hatt. Men det er likevel dette ytre kraftmomentet som holder bevegelsen ved like en stund etter vi startet bevegelsen. Ellers ville pendelutslaget etter hvert ha dødd ut.

Man kan ved å ta utgangspunkt i spinnsatsen, finne følgende likning som beskriver systemet:

$$\tau(\theta, t) = -mgL\sin\theta - qL^2\omega + \tau_{y0}\sin(\omega_y t) = mL^2\alpha \quad (1)$$

hvor m er massen til pendelen, L pendelens lengde, g tyngdens akselerasjon, θ vinkelutslaget, ω vinkelhastigheten, α vinkelakselerasjonen, hvor θ , ω og α alle beskriver pendelen i seg selv. τ_{y0} er amplituden for det påtrykte kraftmomentet, ω_y det påtrykte kraftmomentets vinkelhastighet, og t er tiden. Det antas at luftmotstanden er proporsjonal med farten til kula, at den virker på kula, og at luftmotstandskoeffisienten er q .

Forsøk nå å se pendelen foran deg. Dersom du ikke har noe pådyttet kraft, setter vi pendelen i gang med en eller annen initialbetingelse, f.eks. trekker pendelen ut til siden til en startvinkel θ_0 , og slipper den f.eks. med en startvinkelhastighet ω_0 lik null. Pendelen vil da svinge fram og tilbake med en egen naturlig svingefrekvens ω_n , og utslagene vil avta litt etter litt på grunn av luftmotstanden inntil pendelen til slutt henger i ro rett ned.

Tenk deg så at vi starter på samme måte, men kobler inn det ytre harmonisk varierende kraftmomentet med (vanligvis) en annen vinkelfrekvens ω_y enn pendelens naturlige svingefrekvens. Pendelenbevegelsen vil da gjerne i starten bli dominert av initialbetingelsene og den naturlige svingefrekvensen, men etter hvert vil bevegelsen i mer eller mindre grad domineres av den pådyttede kraften. Vi skal finne ut hva slags bevegelse som kan forekomme, men innser vel allerede nå at det ikke er opplagt hvordan denne bevegelsen blir.

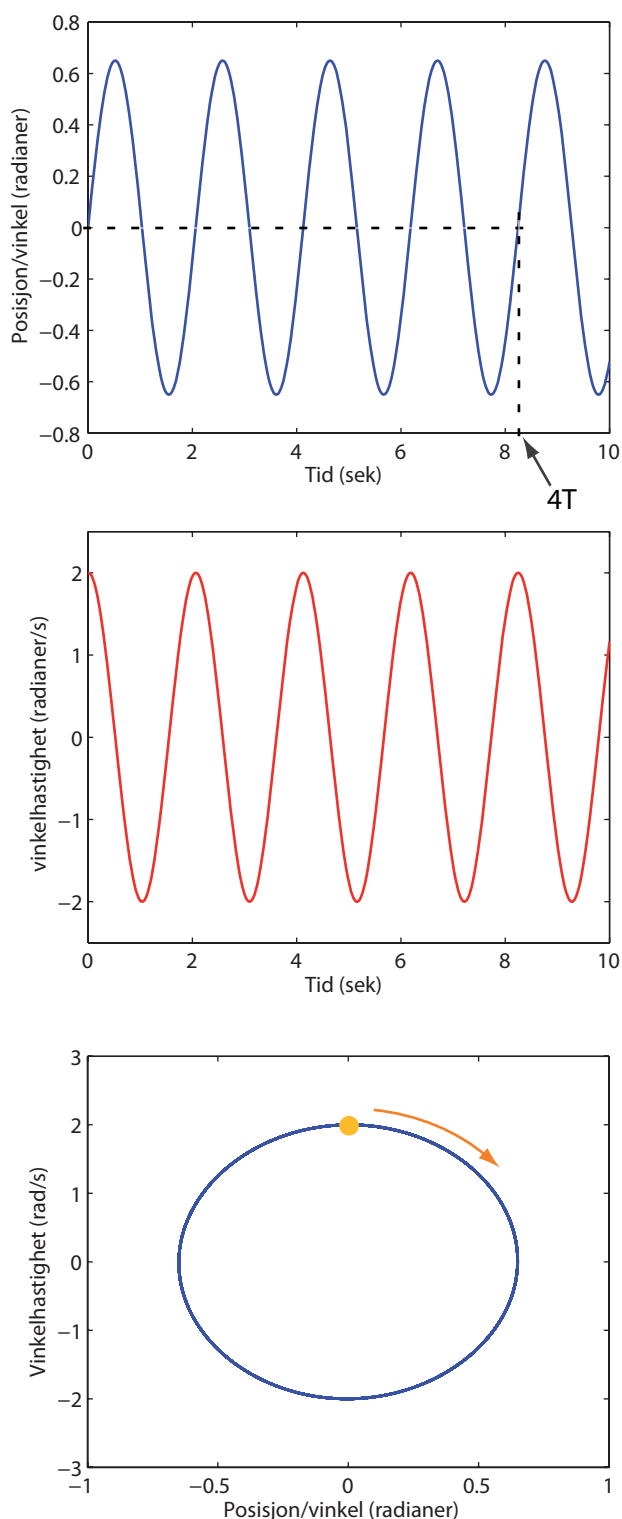
Vi kan integrere opp ligning 1 for å finne hvordan bevegelsen blir. Det er ikke mulig å gjøre dette analytisk, bortsett fra i visse enkle spesialtilfeller. Vi må derfor basere oss på numeriske beregninger.

Vi må da lage et enkelt dataprogram som foretar den numeriske integrasjonen av ligning 1 ut fra gitte initialbetingelser. Vi bør som en naturlig del av programmeringen teste om programmet fungerer som det skal i enkle spesialtilfeller. Ett slikt spesialtilfelle er at luftmotstanden og påtrykt ytre kraft begge er lik null. Da må pendelen etter at den er sluppet, svinge med sin naturlige vinkelhastighet og uforandret amplitude helt til vi stopper den. (Eulers metode duger ikke i dette tilfellet, se oppgavetekst for oblig3 samt notat med programmeringstips.)

Når vi ser at beregningene våre funker tilsynelatende bra for spesialtilfellene, kan vi våge oss på å beregne de mer kompliserte tilfellene og håpe at programmet fungerer bra også her.

Resultatene kan vi f.eks. plote som posisjon (vinkel) som funksjon av tid. Men dette er en presentasjonsform som ikke alltid er så anvendelig i tilfeller som dette. Det er vanskelig å sammenholde svingninger tidlig i en tidsperiode med svingninger mange perioder senere. Dessuten inneholder ikke vinkel vs tid-plot noe direkte informasjon om vinkelhastigheten, og det kan være interessant å sammenholde informasjon om vinkel og vinkelhastighet, siden det jo er disse to verdiene som til enhver tid danner "initialbetingelsene" for neste step i beregningene.

Vi velger derfor ofte å plote *vinkelhastighet som funksjon av vinkel* etter hvert som tiden går. Et slikt plot kallet et *faseplot*. Dette er en uvant presentasjonsform for oss hittil, så det kan lønne seg å dvele med slike plot litt grundig for å være sikker på at man skjønner dem.



Figur 1 viser tidsplot for vinkel og vinkelhastighet, samt faseplottet for denne bevegelsen, alt sammen for en pendel som svinger fritt uten luftmotstand og uten ytre pådyttet kraftmoment. Initialbetingelsen er her en vinkelen lik null og vinkelhastigheten lik 2 radianer pr sek ved tiden $t=0$. Vi har markert initialbetingelsene i faseplottet med en sirkulært punkt. Vi har også markert hvilken vei vi beveger oss gjennom faseplottet etter initialpunktet.

Vi ser at faseplottet i dette tilfellet er en ellipse som viser at når vinkelutslaget er størst, enten positivt eller negativt, er vinkelhastigheten null, og når vinkelutslaget er null er vinkelhastigheten størst i tallverdi, enten positiv eller negativ (pendelen passerer loddrett-posisjonen enten mens pendelen svinger mot urviseren eller med urviseren).

Vi har i øverste del av figuren vist hvordan vi kan lese av periodetiden for bevegelsen. Siden startverdien var null vinkelutslag (på vei oppover), har vi her valgt å gå fire perioder framover i tid og lese av fire ganger periodetiden, for å få litt bedre nøyaktighet enn om vi hadde forsøkt å lese av bare en periodetid. I Matlab kan man gjerne bruke zoom-funksjon for å få en enda mer nøyaktig avlesning.

Vi kan forøvrig merke oss av øvre del av figur 1 at en start-vinkelhastighet på 2.0 radianer pr sek førte til et maksimal vinkelutslag på 0.65 radianer, dvs ca 37 grader.

Figure 1: Plot som viser hvordan vinkelutslag og vinkelhastighet endrer seg som funksjon av tid for en pendel, og hvordan disse opplysningene kan slås sammen i et faseplot (nederst).

Figur 2: Samme type plot som i figur 1, men nå en pendel som har så stor fart at den snurrer forbi toppunktet. Se forøvrig teksten.

I oblig 3 skal du variere start-vinkelhastigheten fra om lag 0 til en så stor verdi at pendelen ikke lenger bare går fram og tilbake omkring loddlinjen, men at pendelen snurrer rundt og rundt i samme retning (forutsatt at friksjonen ikke demper bevegelsen).

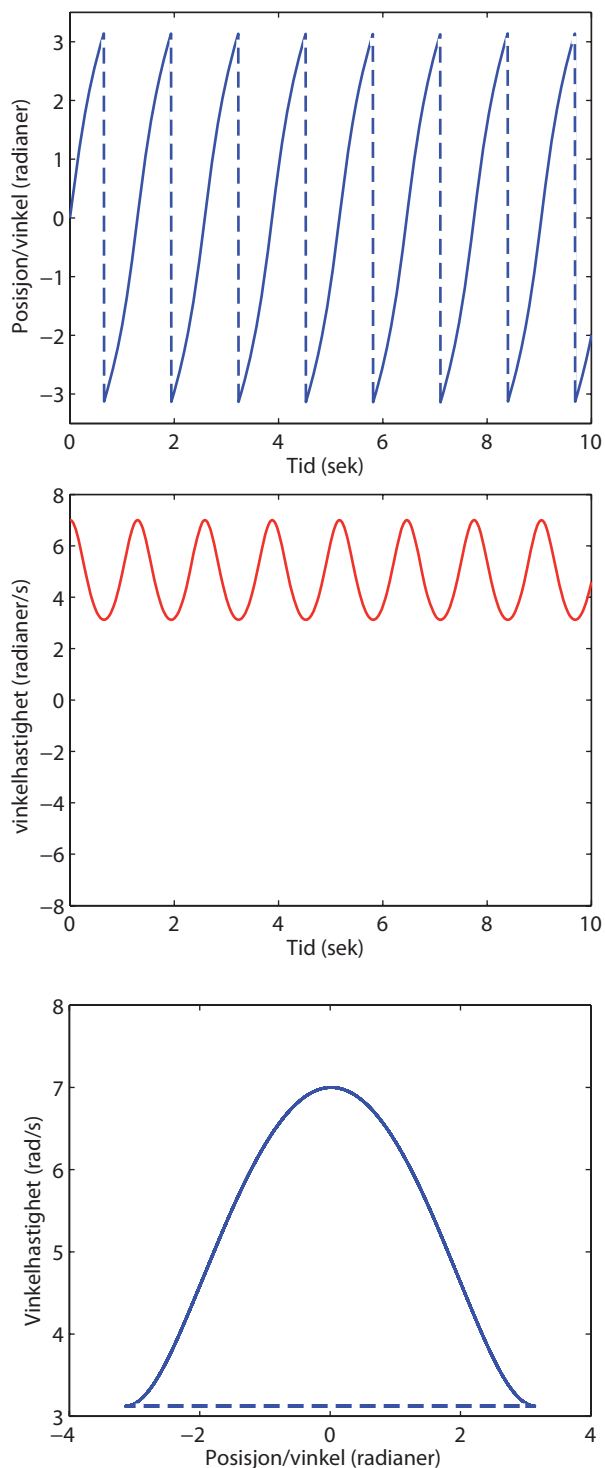
Et eksempel på hvordan de tilsvarende plottene nå ser ut, er vist i figur 2. Studér denne figuren grundig til du skjønner den ut og inn! Det vil hjelpe deg i den videre forståelsen av obligen.

Siden vinkelen matematisk sett bare øker og øker etter som pendelen gjør flere og flere omdreininger samme vei, blir situasjonen nå en annen enn i figur 1.

Pendelen slik vi observerer den, vil alltid vil ha en vinkel mellom -180 og $+180$ grader (mellom -3.14 og $+3.14$ radianer). Vi velger derfor ved beregningene å trekke fra eller legge til tilstrekkelig mange ganger 2π til at vinkelen havner innenfor intervallet $-\pi$ til $+\pi$. Det har vi gjort ved beregningene som ligger bak figur 2.

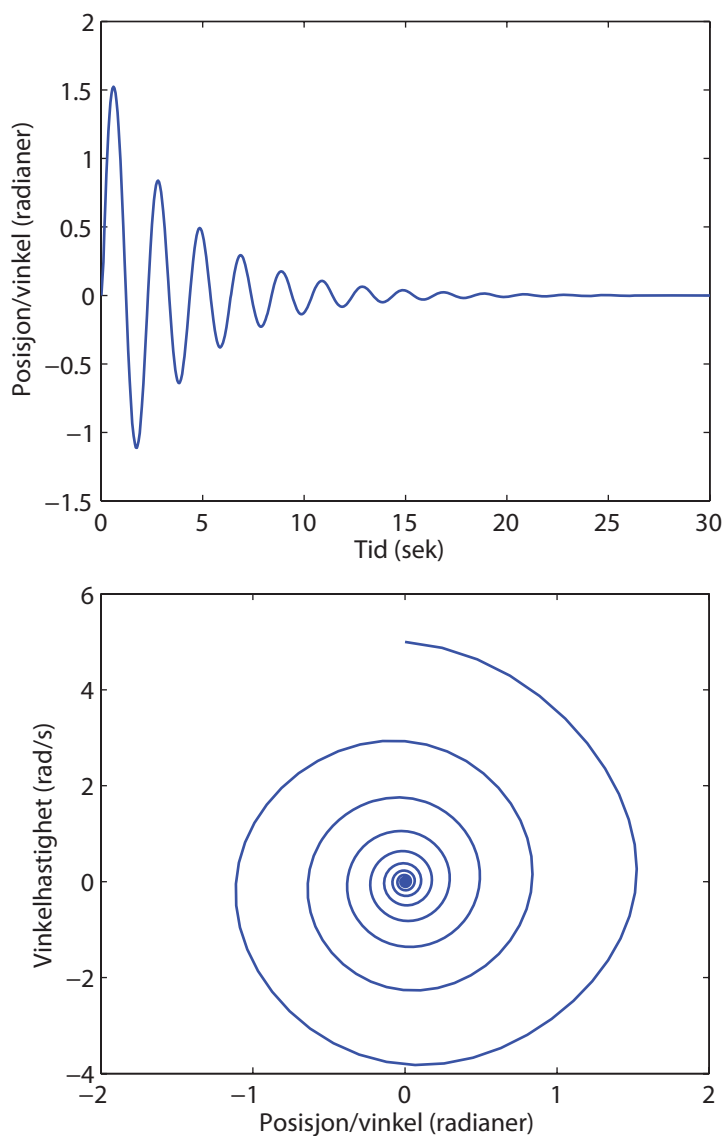
Vi ser at ved tiden $t=0$ har vi nå vinkel lik 0 og vinkelhastighet lik $+7.0$ radianer pr sekund. Pendelutslaget øker første tiden, helt opp til π (180 grader), dvs pendelen står da med kula rett opp. Men selv ved denne posisjonen er vinkelhastigheten bare sunket til ca 3.1 radianer pr sekund og fortsatt positiv! Det betyr at kula vil snurre forbi toppunktet, og vil da få en negativ vinkel som markerer nettopp dette. I vinkelutslag-vs-tid plottet gjør vi da et hopp mellom $+\pi$ og $-\pi$. Vi har i figur 2 indikert at det er en diskontinuitet mellom disse punktene, ved at vi bruker en prikket linje ved hoppene. Man må imidlertid merke seg at når Matlab lager slike plot, skjønner ikke den at dette er en diskontinuitet. Matlab tegner derfor en heltrukket linje også gjennom diskontinuitetene.

Faseplottet neders i figur 2 blir nå ikke lenger en ellipse, men en kurve som gjennomløper samme vei for hver omreining av pendelen. Igjen har vi tegnet en stiplet linje der vi har dis-



kontinuiteten i vinkel (idet pendelen passerer toppunktet). Og nok en gang minner vi om at Matlab vil tegne denne linjen som en heltrukket strek.

Merk forøvrig at Matlab normalt velger et passende utsnitt langs aksene for å få et bra plot. Det er jeg selv som har presset Matlab til å bruke intervallet -8 til $+8$ i det midterste plottet i figur 2, for å få fram at vinkelhastigheten i dette tilfellet aldri blir null eller negativ. I faseplottet har Matlab selv valgt egnet utsnitt langs aksene. Sjekk at du gjenkjenner intervallet langs y-aksen i de to første delfigurene av figur 2 med intervallet som er brukt i faseplottet nederst.



Samtlige plot som vi har i figur 1 og 2 vil se annerledes ut dersom vi legger til friksjon. Da vil bevegelsen dempes etter som tiden går. Figur 3 viser et vinkelutslag- vs-tid plot og et faseplot for en dempet bevegelse der vi har tatt utgangspunkt i liknende initialverdier som i figur 1 bare at startvinkelhastigheten er lik 5 radianer pr sekund.

Vi ser at pendelen svinger med sin naturlige svingefrekvens, men at svingningene hele tiden avtar både i vinkelutslag og vinkelhastighet inntil pendelen etter veø 10 svingninger blir liggende i ro i sentrum (vinkel og vinkelhastighet begge lik null).

Figur 3 viser hvordan en pendelbevegelse arter seg ved en moderat demping. Parametre brukt ved beregningene (se ligning 1): $g = 9.81$, $m = 1.0$, $L = 1.0$, $q = 0.50$; $\text{thau}_y = 0$; $\text{omega}_y = 5.0$. Initialbetingelsene var: $\text{theta}0 = 0.0$; $\text{omega}0 = 5.0$.

Hva vil skje dersom vi nå også legger til det ytre harmoniske kraftmomentet i ligning 1? Figur 4 viser ett mulig resultat dersom vi har alle leddene på plass i ligning 1. Man bør merke seg at dette er resultatet bare for ett bestemt sett av parametre og initialbetingelser.

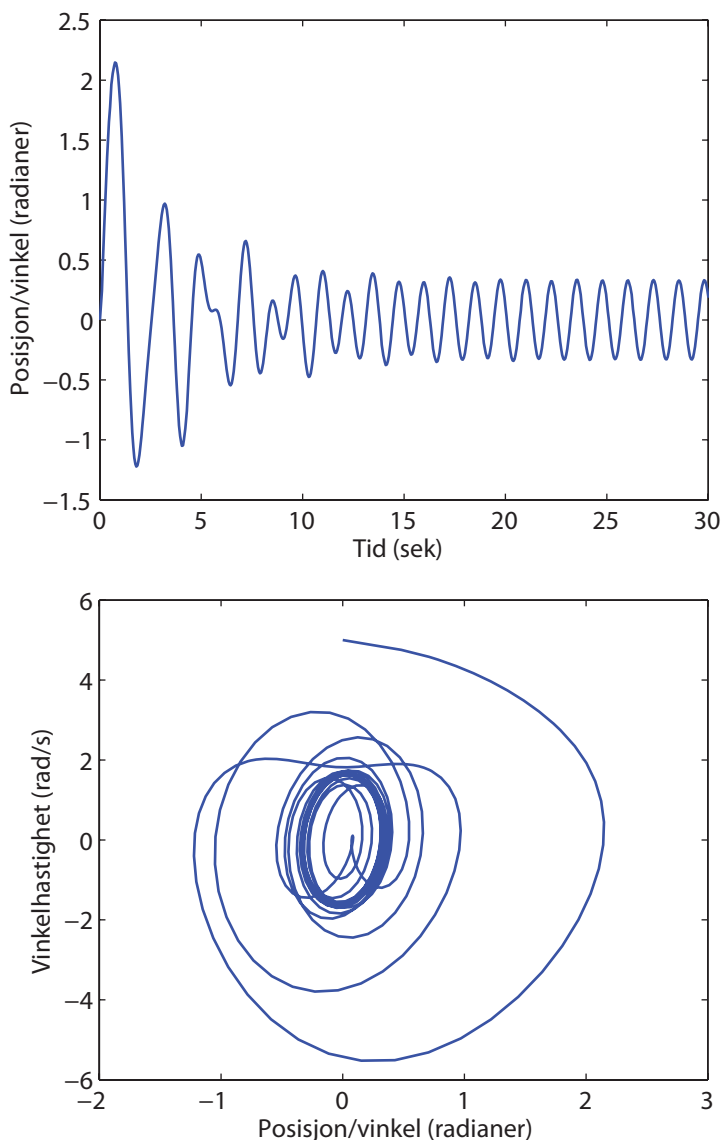
Figur 4. Figuren viser hvordan en pendelbevegelse arter seg ved en moderat dempning pluss et ytre harmonisk kraftmoment som opprettholder bevegelsen over tid. Parametre brukt ved beregningene (se ligning 1): $g = 9.81$, $m = 1.0$, $L = 1.0$, $q = 0.50$; $\text{thau}_y = 5.0$; $\omega_y = 5.0$. Initialbetingelsene var: $\theta_0 = 0.0$; $\omega_0 = 5.0$. Beregningene ble gjennomført for et tidsintervall på 400 sekunder, og hele dette intervallet er brukt da faseplottet ble tegnet. For tidsplottet valgte vi ut bare de 30 første sekundene for å få fram de viktige karakteristiske trekk.

Vi ser her at systemet starter ved initialbetingelsene og en tilnærmet naturlig svingefrekvens, men svingningene avtar på en litt uregelmessig måte inntil stabile svingninger tar over. De stabile svingningene som dannes etter en stund har en annen frekvens enn den naturlige, nemlig frekvensen til det ytre påtrykte kraftmoment.

I faseplottet ser vi en uregelmessig spiralering innover liknende det vi hadde i figur 3, på grunn av dempingen. Spiraleringen går imidlertid ikke inn til origo (0,0) fordi den ytre påtrykte kraften etter en stund sørger for at pendelen får en svingebevegelse lignende den vi hadde i figur 1. Dette kommer til uttrykk i den kraftige ellipsen i faseplottet.

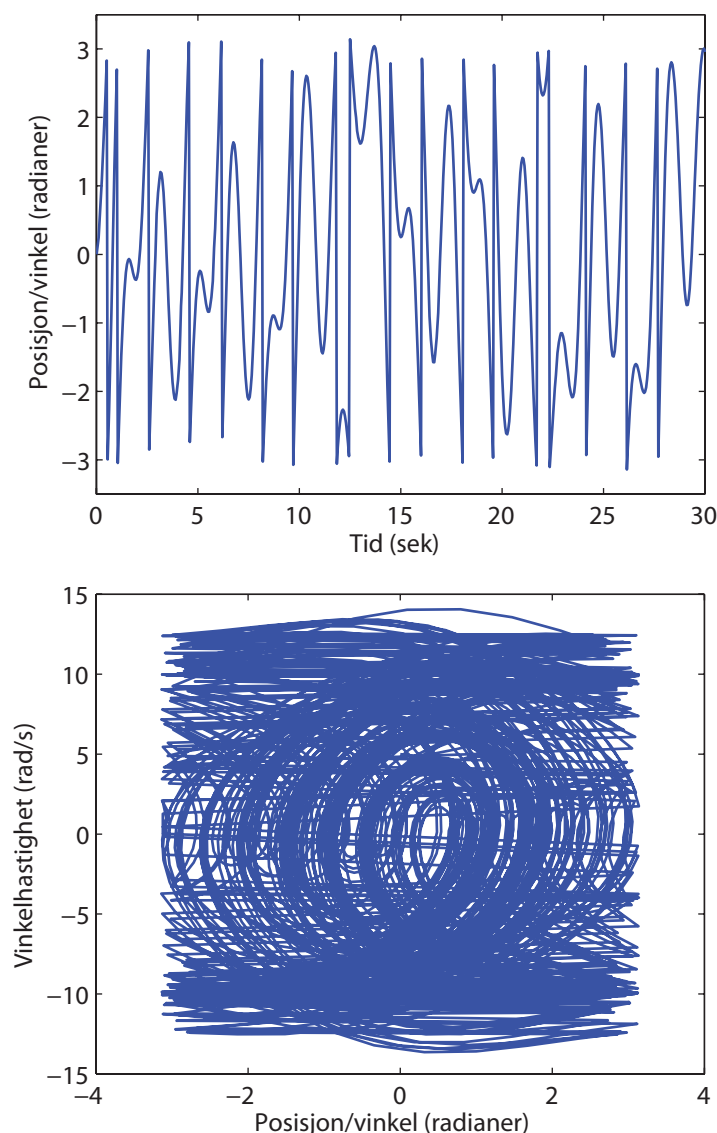
De som er spesielt observante kan merke seg at den kraftige ellipsen står litt på skrå i faseplottet. Det betyr at man ikke får maksimalt vinkelutslag samtidig som vinkelhastigheten er lik null, og heller ikke maksimal vinkelhastighet når vinkelutslaget er null. I figur 1 var det $\pi/2$ (90 grader) forskjell mellom vinkel og vinkelhastighet. Nå er det et ekstra faseskift mellom dem. Vi kommer tilbake til denne figuren igjen litt senere i dette notatet.

En digresjon kan her være på sin plass. Mange studenter lurer på hva man skal ta med i rapporten (den skriftlige delen av besvarelsen i obliqer). Dersom man hadde fått et resultat slik som faseplottet i figur 4, ville mange bare satt figuren inn i rapporten og ikke kommentert den overhodet. Leseren får da ikke noe oppfatning av hvorvidt rapportskriveren overhodet har sett på resultatet eller ikke, og hvorvidt vedkommende har klart å trekke ut informasjon av grafene. Vi



som driver dette kurset er absolutt ikke fornøyd med slike besvarelser, selv om beregningene er aldri så korrekte.

Det vi ønsker oss er at den som skriver rapporten over hva som er gjort, *beskriver og kommenterer med ord* alle resultatene man kommer fram til, i tillegg til at man gir grafer og tabeller ol. Det behøver ikke være dyptgående forklaringer på enhver detalj, - det vil neppe noen være i stand til å gi, men i det minste beskrivelser og kommentarer som viser at rapportskriveren har observert og tenkt litt gjennom detaljer som finnes i resultatene. Kommentaren om faseskiftet (skjevstillingen av ellipsen) i faseplottet i figur 4 er et eksempel på en slik kommentar. Når vi først gjør numeriske eksperimenter slik som her, er det jo viktig at man lærer seg å observere interessante trekk i resultatene!



Men la oss nå vende tilbake til beskrivelsen av kaotiske system igjen...

Foreløpig har vi ikke sett noe spesielt spennende med systemet vårt. Men dersom vi nå endrer parametrene en del, kan vinkelutslag-vs-tid samt faseplottet bli svært så uryddig, som vist i figur 5. Vi ser her at det er kommet inn en del uregelmessigheter i resultatene som ikke var der i stad, og vi kan si at det er noe vedvarende kaotisk med bevegelsen. I figur 4 var det også noe kaotisk over overgangen mellom bevegelsen som var dominert av initialbetingelsen over til bevegelsen som var dominert av den påtrykte bevegelsen, men i figur 5 kommer vi på sett og vis aldri ut av den kaotiske tilstanden.

Legg merke til at vi i figur 5 har mange diskontinuiteter i angitt vinkelutslag idet pendelen passerer toppen (som diskutert i forbindelse med figur 2). Tilsvarende horisontale linjer finnes i faseplottet.

Figur 5. Figuren viser hvordan en pendelbevegelse arter seg ved en moderat dempning pluss et nokså kraftig ytre harmonisk kraftmoment som driver bevegelsen. Parametre brukt ved beregningene (se ligning 1): $g = 9.81$, $m = 1.0$, $L = 1.0$, $q = 0.50$; $\text{thau}_y = 25.0$; $\text{omega}_y = 3.5$. Initialbetingelsene var: $\text{theta}0 = 0.0$; $\text{omega}0 = 5.0$. Igjen er faseplottet basert på beregninger over et 400 sekunders intervall, mens tidsplottet bare angir de 30 første sekundene.

Lyapunov-eksponenten

Selv om vi i plot slik som i figur 5 visuelt kan se at det er noe kaotisk over bevegelsen, må vi ha noe mer håndfast å holde oss til for å bedømme hvorvidt en bevegelse er kaotisk eller ikke. Vi må ha en test som kan avgjøre det hele. For hva mener vi egentlig med kaotisk oppførsel i et system slik som vår pendel utgjør?

Én måte å analysere bevegelsen på er å studere hvor ømfintlig løsningen er med hensyn til små endringer i initialbetingelsene. Vi kan f.eks. gjøre beregning av vinkelutslaget som funksjon av tid $\theta_1(t)$, og deretter endre startvinkel med en liten størrelse $\delta\theta$ og gjøre beregningen om igjen, og få $\theta_2(t)$, og sammenligne de to beregningene. Vi ønsker å ta logaritmen av forskjellen mellom de to settene med vinkelutslag, men må da bruke absoluttveriden siden vi ikke kan ta logaritmen til et negativt tall. I tillegg har vi her valgt å normere resultatet ved at vi dividerer på forskjellen i initialbetingelsene. Vi bruker med andre ord formelen:

$$\Delta(t) = \log\left(\left|\frac{\theta_1(t) - \theta_2(t)}{\delta\theta}\right|\right) \quad (2)$$

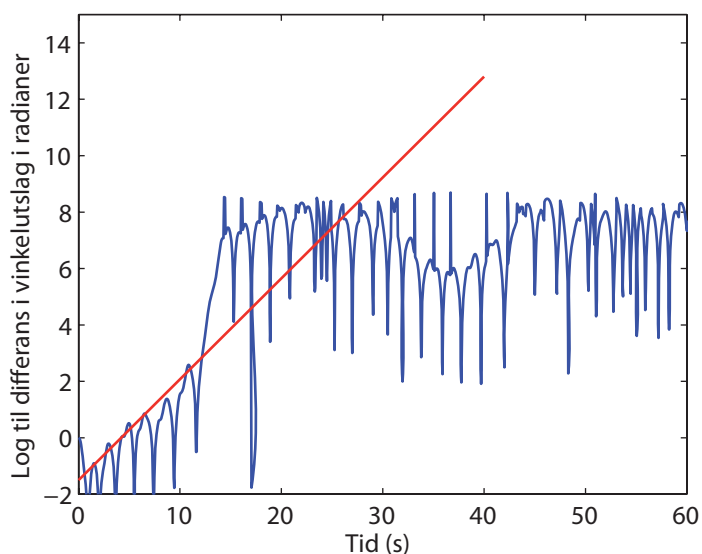
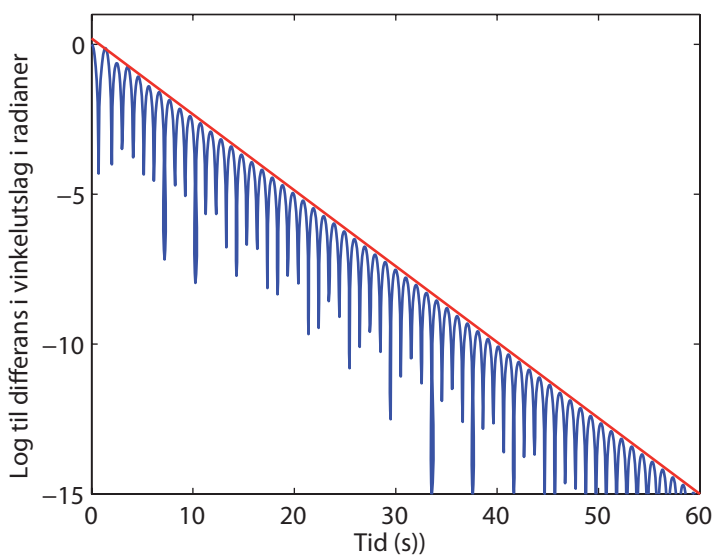
Vi har gjort to slike beregninger, og resultatet er gitt i figur 6. Øvre del av figuren tilsvarer tilfellet vi hadde i figur 4 og nedre del av figur 6 gjelder tilfellet i figur 5.

Vi merker oss at i det første tilfellet (øvre del av figur 6) *avtar* forskjellen mellom de to løsningene etter som tiden går. De konvergerer mot samme løsning. Forskjellen var 0.001 radianer i første punkt, men etter 60 sekunder er forskjellen redusert til

$$e^{-15} \cdot 0.001 = 3.1 \cdot 10^{-10} \text{ radianer.}$$

Logaritmen til differansen følger ingen rett linje, riktignok, for vi har med svingninger å gjøre. To ganger hver periodetid vil de to løsningene krysse hverandre slik at differansen

Figur 6. Logaritmen til forskjellen mellom to beregninger med 0.001 radianer forskjell i initialverdien for vinkelutslaget, men ellers identisk med dem i figur 4 (for øvre del) og 5 (for nedre del). Forøvrig henvises det til teksten.



blir nær null. Det er dette som gir hakkene nedover. Men dersom vi følger *maksimalt avvik innenfor hver periode* etter som tiden går, ser vi at denne nokså nær følger en rett linje i et lin-log-diagram (tiden i lineær skala, differansen i en logaritmisk skala).

Det betyr at vi kan skrive

$$\Delta\theta \sim e^{\lambda t} \quad (3)$$

der tegnet \sim må betyr “proporsjonal med” i dette tilfellet. Eksponenten λ kalles *Lyapunov-eksponenten*. I øverste del av figur 6 er denne eksponenten om lag -0.25 (inversverdien av tiden som det går fra differansen har sunket med en faktor lik e). Det er tegnet inn en rød, rett linje som i stigningstall følger eksponentialfunksjonen gitt i ligning 3 med $\lambda = -0.25$.

I det andre tilfellet (nedre del av figur 6) er det et langt mer uordnet bilde, men med litt velvilje ser vi at differansen mellom fasene ϕ øker etter som tiden går. Det vil si at de to løsningene $\theta_1(t)$ og $\theta_2(t)$ skiller mer og mer lag. Før eller senere flater kurven ut, fordi for en pendelbevegelse har vi valgt å plassere vinkelutslaget hele tiden innenfor et intervall fra $-\pi$ til $+\pi$. I nedre del av figur 6 er Lyapunov-eksponenten λ for den røde linjen om lag $+0.32$.

Vi ser at systemet i tilfellet vist i figur 4 og øvre del av figur 6 er vesensforskjellig fra tilfellet vist i figur 5 og nedre del av figur 6. I det første tilfellet får systemet etter en stund en stabil bevegelsesform, men i det siste tilfellet er dette ikke tilfelle. Det første tilfellet var karakterisert med en *negativ* Lyapunov-eksponent som indikerte at løsningen etter litt tid ble nesten den samme uansett hva initialverdien var (så lenge den holder seg innenfor et begrenset område). Men i det siste tilfellet hadde vi en *positiv* Lyapunov-eksponent som viste at løsningen er *kritisk avhengig av initialbetingelsene*. Et slikt system sier vi er et kaotisk system.

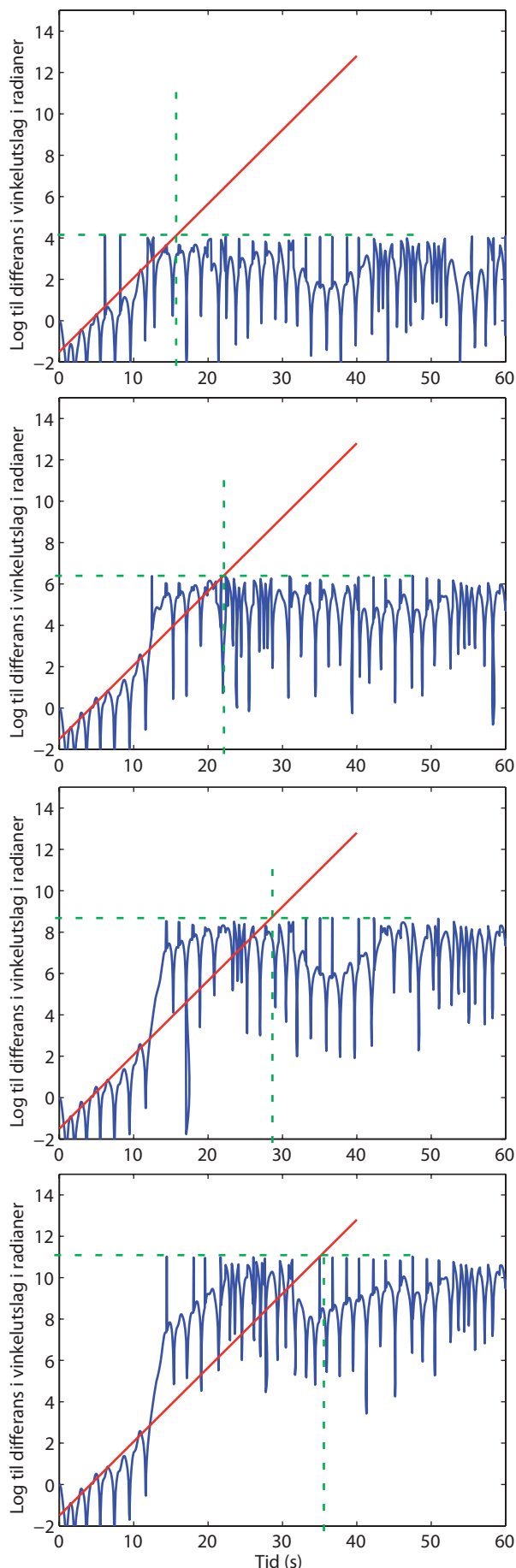
Ikke alle kaotiske system kan analyseres ut fra en Lyapunov-eksponent, men det er likevel et karakteristisk trekk ved kaotiske system at de er kritisk avhengig av initialbetingelsene. Vi kjenner dette fenomenet også under navnet “sommerfugleffekten”: Et vingeslag til en sommerfulg i Mellom-Amerika er nok til å endre på været over hele kloden en stund senere.

I figur 6 valgte vi å plote (logaritmen av) differansen mellom to tidsforløp der startverdiene for de to forløpene bare adskilte seg med 0.001 radianer. Denne differansen er litt tilfeldig valgt, og man kan undres over om resultatet ville bli svært annerledes dersom vi hadde valgt en annen differans i initialbetingelsene.

Dette har vi undersøkt nærmere ved å gjenta beregninger av samme type som den som førte til nedre del av figur 6, men nå for etter tur fire ulike differanser i initialverdier. Resultatet er vist i figur 7. Vi ser at i alle disse tilfellene vokser differansen med omtrent samme Lyapunov-eksponent den første tiden, men etter en stund blir kurven mer uregelmessig og flater gjerne mer eller mindre ut. Vi har som vist i ligning 2 normert plottene slik at initial-differansen i plottene alltid kommer ut som 0 (logaritmen til 1). Vi kan da ut fra figurene og de gitte start-differansene beregne differansen i vinkelutslag som svarer til platå-verdien.

For øvre del av figur 7 er logaritmen til de aller største forskjellene i vinkelutslag omlag 4.15 i plottet. Differansen 0.1 radianer tilsvarer 0 i plottet. De største forskjellene (høyeste toppene i lottet) svarer da til:

$$\Delta\phi \approx e^{4.15} \cdot 0.1 = 6.3 \quad \text{det vil si om lag } 2\pi.$$



Figur 7. Logaritmen til forskjellen mellom to beregninger for fire ulike forskjeller i initialverdien for vinkelutslaget, men ellers identisk med dem i figur 5 og nedre del av figur 6. Forøvrig vises det til teksten.

For nest øverste del av figur 7 er logaritmen til de største forekommende forskjeller i vinkler om lag 6.45, men her var det 0.01 som svarte til 0 i plottet. Største forekommende forskjell i vinkel blir da

$$\Delta\phi \approx e^{6.45} \cdot 0.01 = 6.3$$

som igjen er lik 2π .

På samme måte kan vi vise også for de to nederste delene av figur 7 at de maksimale forskjellene som kan forekomme nettopp er lik 2π , noe som er helt naturlig så lenge hver av tidsforløpene for vinkelutslagene ligger i intervallet fra $-\pi$ til $+\pi$.

I figur 7 er det også satt inn vertikale stiplede linjer som viser omtrentlig hvor lang tid det tar fra de to systemene startes til forskjellen mellom vinkelutslaget er så stort som det kan være. Denne tiden øker fra ca 22 sekunder ved $dq = 0.1$ radianer til ca 36 sekunder ved $dq = 0.0001$ radianer. Vi ser altså at selv en endring med en faktor 1000 i størrelsen på forskjell i initialbetingelser, endret tiden før man fikk maksimal forskjell seg bare med mindre enn en faktor 2.

Vi ser altså at jo tettere initialbetingelsene ligger til hverandre, desto lengre tid vil det ta før vi lett merker forskjellen mellom to tidsforløp. Men på grunn av den eksponentielle karakteren til systemet, ser vi at tiden som må til før vi lett kan se forskjeller i vinkelutslag tross alt endrer seg nokså lite.

Av denne grunn kan vi sånn løselig si at ethvert kaotisk system har en viss "hukommelsestid" der bevegelsen er nokså entydig bestemt ut fra initialbetingelsene. Men ut over en slik "hukommelsestid" vil systemet

ikke lenger ha en oppførsel som kan tilbakeføres til initialbetingelsene. For dobbeltpendelen som vi skal vise på forelesningen, er hukommelsestiden bare noen få sekunder. For værsystemer på jorda er hukommelsestiden anslagsvis noen få uker. For månene rundt Uranus er hukommelsestiden noen få år.

Men er et kaotisk system deterministisk? Både ja og nei! Det synes ikke å være mulig å gi et konsist svar på et slikt spørsmål. For hvert enkelt step er i seg selv deterministisk, og innenfor “hukommelsestiden”, virker det (så lenge vi ikke gjør alt for nøye målinger) som om systemet er deterministisk. Men ut over “hukommelsestiden” er det ikke lett å karakterisere systemet som deterministisk, siden enhver liten forskjell i initialbetingelser vil føre til at vi da ikke lenger kan beregne oss fram til forventet resultat ut fra gitte initialbetingelser minst en hukommelsestid tidligere.

Selvfølgelig er det ingen skarp grense ved én hukommelsestid. Det er en gradvis overgang fra det som kan predikeres til det som ikke kan predikeres.

Er denne begrensingen bare av praktisk art, kan man lure på. Dersom vi hadde kjent initialbetingelsene EKSAKT, ville vi jo hatt et deterministisk system. Vi vet ikke med sikkerhet hvorvidt det er *fundamentalt umulig* å kjenne initialbetingelsene nøyaktig eller ikke. Men går vi til kvantefysikken og Heisenberg uskarphetsrelasjon, sier den at det er umulig å kjenne både posisjon og hastighet samtidig. Vi tror at denne relasjonen er en fundamental egenskap i naturen. I så fall vil alle kaotiske system fundamentalt sett være ikke-deterministiske ut over “hukommelsestiden”. Men selv om det ikke skulle være en fundamentalt usikkerhet i initialbetingelsene, vil det i alle fall nesten i alle kaotiske system være *praktisk umulig* å bestemme initialbetingelsene nøyaktig. Dessuten vil bitte små påvirkninger etter som tiden går også sørge for at kaotiske system blir umulige å beregne entydig ut over “hukommelsestiden”.

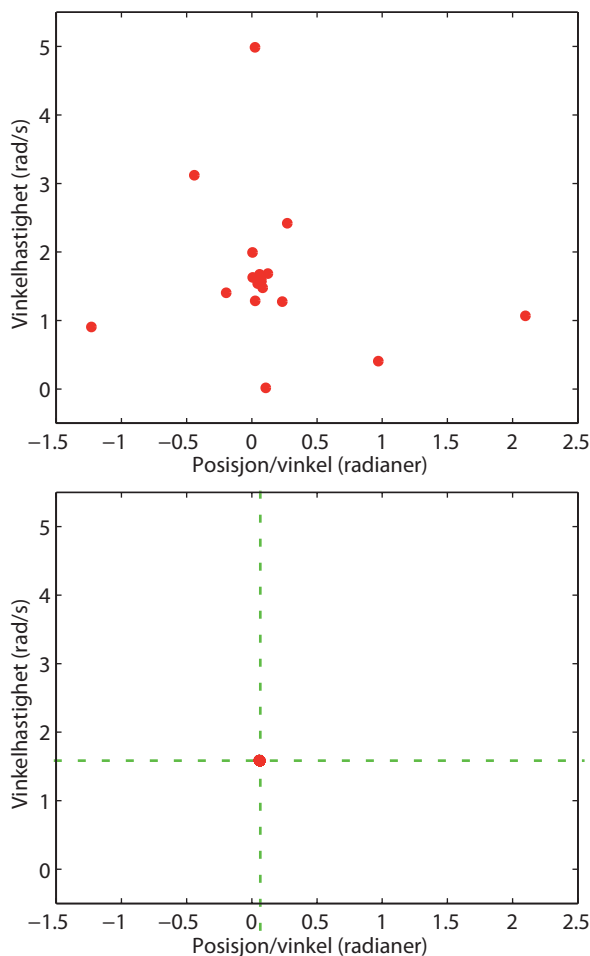
Poincaré-snitt

Det er flere karakteristiske trekk med kaotiske system enn dette med kritisk avhengighet for initialbetingelser. Selv blir jeg mest fascinert av at kaotiske systemer viser en god del orden i kaoset når alt kommer til alt. Riktignok ser faseplottet i nedre del av figur 5 temmelig kaotisk ut, men man kan ofte å gjøre et “snitt” i plottet på en eller annen velvalgt måte, for å få fram karakteristiske trekk som ellers blir maskert bort. Det er ofte nødvendig å se på egnede “snitt” i faseplottet dersom vi skal kunne skille en form for kaotisk tilstand fra en annen.

I vårt tilfelle kan vi gjøre vårt snitt på følgende måte: Vi velger å plukke ut pendelens vinkel og vinkelhastighet hver gang det påtrykte kraftmomentet er null (på vei til å bli positiv). Det vil si i ligning 1, alle tidspunkt der $\omega_y t$ er et heltallsmultippel av 2π . Diagrammet vi da får kalles et Poincaré-snitt. Merk at vi da bare plotter enkeltpunkter, og ingen linjer mellom punktene.

Å lage Poincaré-snitt er en svært regnemaskinkrevende jobb, for ikke bare skal vi gjøre mange beregninger innenfor hver pendelsvingning, men så må vi ha mange, mange punkter (dvs mange periodetider for den påtrykte kraften) før vi får et Poincaré-plott som gir tilstrekkelig struktur. Men resultatet kan bli vidunderlig!

For et ikke-kaotisk system blir Poincaré-plottet en skuffelse, riktignok, for så snart vi har tråkket oss gjennom det innledende innsvingningsforløpet fram til vi har en stabil bevegelse, vil



Figur 8: Poincaré-snitt for den ikke kaotiske bevegelsen vi hadde i figur 4. I øvre del har vi tatt med punkter fra innsvingningsforløpet helt fra systemet ble satt i gang. I nedre del av figuren har vi fjernet de 40 første punktene for at ikke innsvingningen skal ta oppmerksomhet bort fra tilstanden som man kommer fram til en stund etter den innledende fasen i bevegelsen.

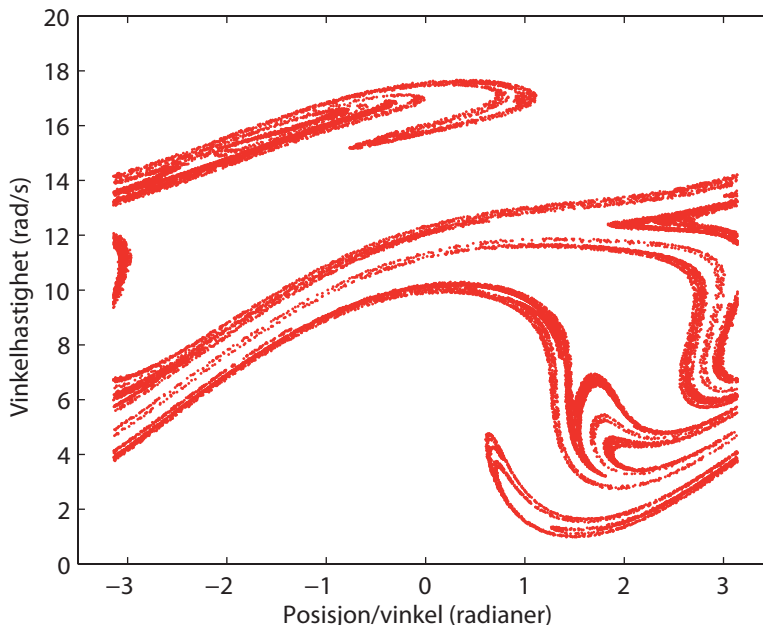
punktene vi plukker ut i Poincaré-snittet stort sett ligge oppå hverandre i ett og samme punkt (se figur 8). Punktene vil liksom suges inn til dette spesielle samlingspunktet, og et slikt punkt kalles for en *attraktor*.

Men for parametre og initialbetingelser som fører til at systemet blir kaotisk, blir situasjonen en annen. Punktene i Poincaré-plottet vil da fordele seg ut over faserommet gjerne i spesielle, artige mønstre. Vi snakker da om *merkelige attraktorer* (strange attractors på engelsk). Mønstrene gjentar seg iblant i mange ulike størrelsesskalaer, og vi kan snakke om en fraktal struktur.

Et Poincaré-snitt for den kaotiske bevegelsen vi hadde i figur 5 er vist i figur 9. Vi ser her nettopp et eksempel på hvordan en merkelig attraktor kan se ut i praksis. Og vi merker hvor fascinerende det er å se underliggende lovmessigheter i den kaotiske bevegelsen, samtidig som vi merker at det er vanskelig å fatte helt hva et slikt plot sier oss.

Det interessante er at alt etter hvordan vi velger parametre for svingningene og initialbetingelser vil vi kunne havne opp i ulike mønstre (merkelige attraktorer). Dersom det bare er initialbetingelsene vi endrer på, vil alle forskjellige merkelige attraktorer (såvel som enkle attraktorer), ligge adskilt fra hverandre, men gjerne flettet innimellom hverandre uten at nøyaktig de områdene de okkuperer overlapper hverandre. Når også parametrene som styrer systemet endres, vil ulike merkelige attraktorer (og vanlige attraktorer) kunne okkupere samme områder i Poincaré-plottene.

Figur 9 Poincaré-snitt for den kaotiske bevegelsen vi hadde i figur 5. Vi har fjernet de 40 første av de totalt vel 32000 punktene som finnes i dette plottet. Det inngikk vel 7 millioner tidssteg i beregningene som ligger bak denne figuren. Det er med andre ord svært tidkrevende beregninger som trengs for å få detaljerte Poincaré-plott. Ved uttesting må man bruke langt grovere plot (færre beregninger) dersom man ikke skal bruke evigheter med tid!



Hva vil det si at vår pendel er kaotisk?

Det kan være vanskelig å skjønne hva som skjer i et kaotisk system som vårt. I figur 10 har vi tatt for oss et utsnitt i den kaotiske tidsstrengen og forsøker å se hva som skjer med pendelen i litt mer detalj. I øvre del av figuren har vi tegnet vinkelutslag som funksjon av tid, hvor vi har en masse diskontinuiteter idet pendelen passerer toppunktet i en eller annen retning. I nedre del av figuren har vi fjernet linjene over diskontinuitetene og tilsynelatende skjøtt sammen kurvene for å bedre få fram at pendelen i praksis i dette spesielle tilfellet ofte snurrer to eller tre ganger rundt i en retning før den snur og snurrer to-tre ganger rundt i motsatt retning.

I figuren representerer de horisontale stiplede linjene at pendelen er i toppstilling. Passerer den blå kurven rett gjennom de stiplede linjene, betyr det at pendelen passerer toppunktet. Går den blå linjen nedover etter som tiden går, betyr det at vinkelhastigheten er negativ, dvs at pendelen roterer med urviseren (negativ dreieretning).

I figuren har vi med rødt tegnet inn tidsvariasjonen av kraftmomentet sammen med vinkelutslaget. Når kraftmomentet er positivt, forsøker det å dreie pendelen i positiv dreieretning (mot urviseren). Dette er markert med beige vertikale bånd merket 1, 3, 5 og 7. Når kraftmomentet er negativt, forsøker det å dreie pendelen i negativ dreieretning (grønne, vertikale bånd merket 2, 4, 4, 6 og 8).

La oss nå følge pendelen fra begynnelsen av bånd 1. Pendelen er da omtrent i nederste punkt (midt mellom to horisontale stiplede linjer i nedre del av figur 10), og den roterer i negativ dreieretning. Men nå blir kraftmomentet positivt, og vinkelhastigheten blir bremsset både av kraftmomentet og av tyngde og luftmotstand på vei oppover. Likevel passerer pendelen toppunktet, men bare så vidt, for kraftmomentet er nå omtrent på sitt sterkeste. Det vinner over gravitasjonen og får snudd pendelens rotasjonsretning om lag midt i intervall 1.

Figur 10: Forsøk på å vise hvordan den kaotiske bevegelsen til vår pendel faktisk kan arte seg. Se nærmere forklaringer i teksten.

Pendelen roterer nå i positiv dreieretning og det ytre kraftmomentet forsterker bevegelsen så mye at pendelen farer forbi toppunktet når den kommer dit like før bånd 1 er over.

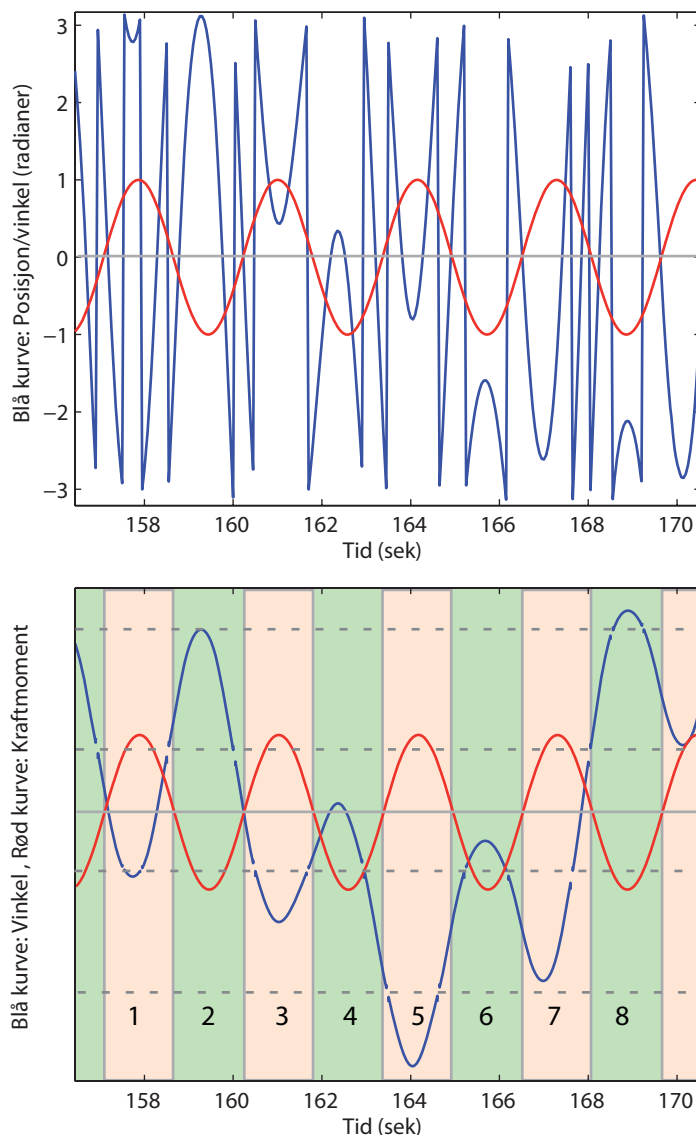
Når vi går inn i bånd 2, blir det ytre kraftmomentet negativt. Det bremser pendelens bevegelse, men likevel bare såvidt nok til at pendelen ikke passerer toppunktet når den kommer opp dit litt før midt i bånd 2. Pendelen vil da skifte dreieretning på ny, og vil få økt vinkelhastigheten så mye at pendelen på ny flyr rett forbi toppunktet når den kommer dit igjen litt før bånd 2 er over.

Slik kan vi fortsette å følge bevegelsen for akkurat de parametrene som er valgt for denne beregningen.

Vi ser at vi godt kan følge bevegelsen på kort sikt og innse at den er tilsynelatende deterministisk. Men undersøker vi hvilket vinkelutslag pendelen har hver gang den snur, innser vi at dette skjer med temmelig forskjellig vinkel fra gang til gang. Så her innser vi at systemet er kaotisk.

Likevel er det slik at det er visse kombinasjoner av vinkelutslag som kan forekomme. Fra første til andre dreining i rotasjonsretning, passerer pendelen toppunktet to (nesten tre) ganger, likeså mellom andre og tredje endring i rotasjonsretning. Men pendelen passerer toppunktet bare én gang mellom tredje og fjerde endring i rotasjonsretning. Og vi innser at det må være litt lovmessighet i bevegelsen tross alt. Dersom pendelen skifter dreieretning på vei nedover, vil mye av arbeidet dreiemomentet tilfører, bare gå med til å løfte pendelen tilbake til toppunktet. Da får pendelen en nokså liten fart nedover på andre siden, og pendelen vil ikke nå opp igjen til toppunktet før dreiemomentet på ny skifter retning. Vi ser dette i bånd 3, 6 og 8.

Med andre ord, ett punkt i Poincaré-plottet vil til en viss grad henge sammen med neste punkt, og det gir til syvende og sist de fine strukturene vi kan observere når mange punkter tegnes inn slik som i figur 9.



Om numeriske feil

Man kan med rette stille spørsmål om hvorvidt de effektene vi finner ved våre beregninger, om de egentlig kommer av systemet i seg selv, eller om det bare er artifakter som følge av numeriske feil i beregningene. Det er klart at så lenge vi ikke gjør nøye feilestimer og vier nøyaktighet stor oppmerksomhet, vil løsningene vi får nok delvis være preget av den begrensede nøyaktigheten vi har i numeriske beregninger. Likevel er det vist at de karakteristiske trekkene vi har diskutert i dette notatet, også holder stikk når man gjør så nøyaktige beregninger at de numeriske feilene ikke vil komme til syne.

Om oblig 3

Oblig 3 våren 2006 er basert på nettopp bevegelsen til en pendel slik den vi har beskrevet i dette notatet. Vi legger da opp til at du skal bruke andre parametre og initialbetingelser enn dem vi har brukt for å lage figurene i dette notatet, slik at du får litt forskjellige resultater enn dem du har i dette skrevet. Likevel blir mye likt. Selve oppgaveteksten er gitt i eget skriv.

Det er enkelte triks som kan være nyttige å ha når dataprogrammet skal lages og kjøres. Vi har samlet noen slike i nok et eget skriv.

Det er ingen enkel oblig dette her, men samtidig er ikke programmeringen spesielt krevende heller. Utfordringen blir vel først og fremst knyttet til dette å forstå hva som foregår, slik at man ikke føler seg fremmedgjort av oppgaven. Det ville vært fint om man klarte å være på hugget og leke med dataprogrammet for å utforske et fysisk system gjennom det vi kaller “numeriske eksperimenter”.

Litteratur

N.J. Giordano og H. Nakanishi: Computational Physics, 2.ed., Pearson/Prentics Hall, 2006 (ISBN 0-13-146990-8).

N.Hall (Ed.): The NewScientist Guide to Chaos. Penguin Books, 1992. (Spesielt kapittel 2.) (ISBN 0-14-014571-0).

Jan Frøyland: Introduction to Chaos and Coherence. Institute of Physics Publisher, Bristol, 1992. (ISBN 0-75-030194-5).

Annet

Jeg vil gjerne benytte anledningen til å takke Jan Frøyland for mange verdifulle samtaler innen flere ulike deler av fysikken opp gjennom årene, deriblant kaosteorien. I tillegg til faglig kompetanse har jeg gang på gang vært imponert over hvordan Jan har klart å skjøtte jobben og opprettholde godt humør og vennlighet til tross for sykdom og smerter over mange år. Han er etter min mening en sann hverdagshelt! Takk forøvrig til min kone, Kirsten, som mistet enda en påskeferie pga at jeg måtte jobbe med utvikling av undervisningsmateriell. Forhåpentligvis får vi en brukbar sommerfeire sammen hvor mine jobb-oppgaver kan legges bort for en stund!