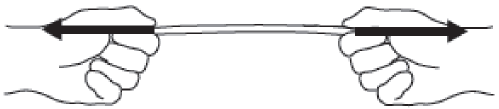
Newtons lover i én dimensjon

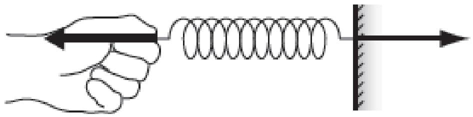
24.01.2013

kraft $\Rightarrow$ akselerasjon $\Rightarrow$ hastighet $\Rightarrow$ posisjon

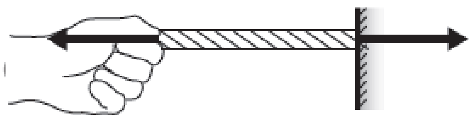
Hva er kraft ?



Vi har en intuitivt idé om hva kraft er.



Vi kan kvantifisere en kraft
med elongasjon av en fjær.



Hva hvis vi bruker et tau i stedet ?.

Bok på bordet

ingen bevegelse – ingen kraft ?

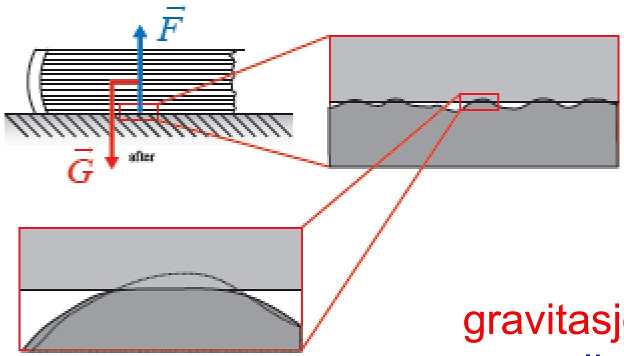
uten bord vil boken falle ned $\Rightarrow$ kraft virke på boken $\Rightarrow$ gravitasjon

på bordet: hvorfor faller boken ikke ?
er gravitasjon borte ?

gravitasjonen virker fortsatt på boken,
men bordet hindrer boken å falle ned.

$\Rightarrow$ det må være en kraft fra bordet på boken som kompenserer gravitasjonskraften

fjær mellom boken og bordet:
- boken dytter på fjæren som dytter på bordet
- fjæren blir komprimert og dytter tilbake på boken



mikroskopisk deformasjon i overflaten

normalkraft

kraft er normal (vinkelrett) til overflaten

gravitasjon: langtrekkende eller fjernkraft
normalkraft: kontaktkraft

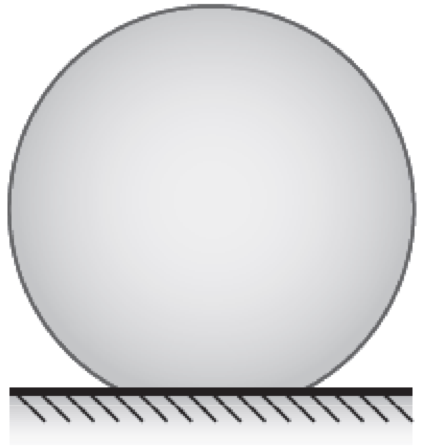
Identifikasjon av krefter

Eksempel: en ball spretter opp fra gulvet

Vi skiller mellom **systemet** (=ball)
og **omgivelsen** (= alt annet)

Alle krefter har en årsak i omgivelsen.
Vi bare vurderer **eksterne krefter**, ikke interne.

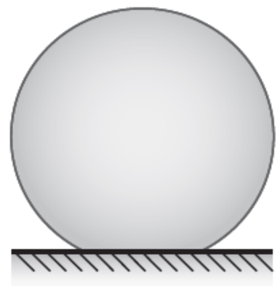
Krefter er enten **kontakt-**
eller **langtrekkende** krefter.



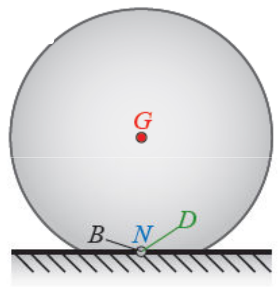
Oppskrift:

1. Del problemet inn i
   - ➢ system: ball
   - ➢ omgivelsen: gulvet, luft rund ballen

2. Tegn figur av objekt og alt som berører det.

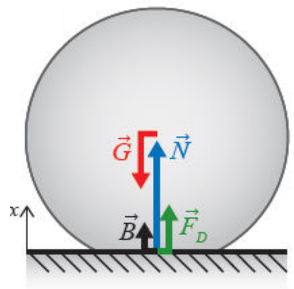


3. Identifiser kontaktkrefter og kontaktpunkter mellom systemet og omgivelsen
   - ➢ normalkraft fra gulvet til ballen: N
   - ➢ luftmotstand fra luften til ballen: D (*drag force*) forskjell i hastighet mellom ballen og luften
   - ➢ oppdrift fra luften til ballen: B (*buoyancy*) forskjell i tetthet mellom ballen og luften



4. Identifiser langtrekkende krefter
   - ➢ gravitasjon: G

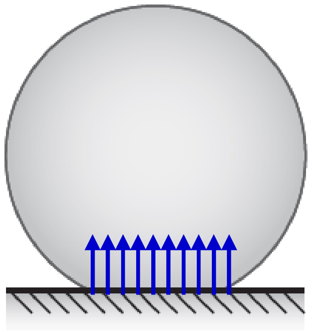
5. Tegn objekt med kraftvektorer (skalert)



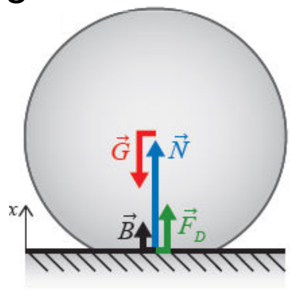
6. Tegn inn koordinatsystemet

Angrepspunkter:

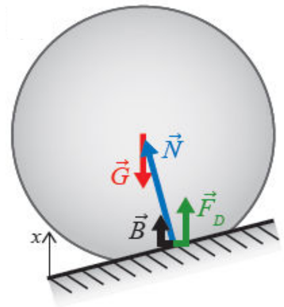
Normalkraften:
Ballen er i kontakt med en utstrekt flate.
$\Rightarrow$ mange små kontribusjoner til normalkraften
hvor mange – for hvert atom ?
Vi kan se på en enkelt kraft som er summen
av alle små kontribusjoner: **superposisjonsprinsippet**.



luftmotstand:
mange kontaktpunkter over hele ballen
mange små kraftkomponenter virker i samme retning: mot bevegelsesretning
igjen: vi forenkler luftmotstand som én kraft som angriper i ett punkt.

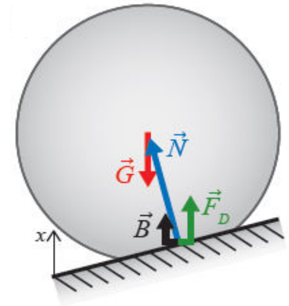


obs.: vi må passer på retning!



Fri-legeme diagram

- diagram som inneholder alle kreftene som virker på et legeme
- viktig verktøy for å finne ut hvordan et legeme beveger seg

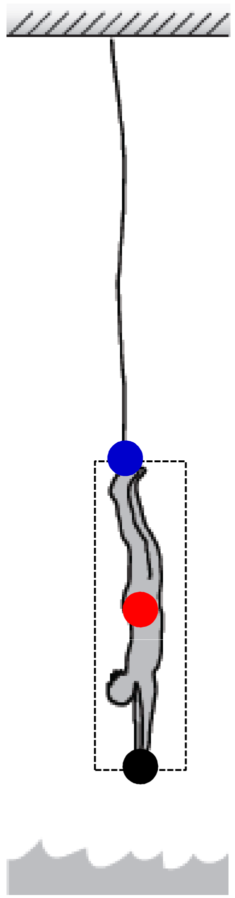


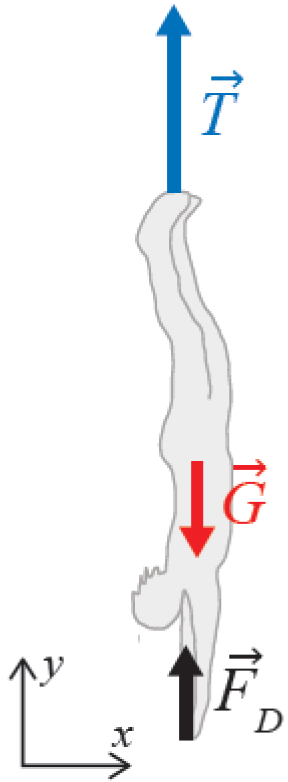
Oppskrift:

1. Del problemet inn i system og omgivelser.
2. Tegn figur av objektet og alt som berører det.
3. Tegn en lukket kurve rundt systemet.
4. Finn kontaktpunkter hvor kontaktkrefter angriper.
5. Navngi kontaktkrefter og definer symboler.
6. Identifiser langtrekkende krefter og definer symboler.
7. Tegn objektet med skalerte krefter.
8. Tegn inn koordinatsystemet.

Eksempel: bungee jump

1. Del problemet inn i system og omgivelser.
   system: person; omgivelse: tau, luft
2. Tegn figur av objektet og alt som berører det.
3. Tegn en lukket kurve rundt systemet.
4. Finn kontaktpunkter hvor kontaktkrefter angriper.
   Personen er i kontakt med tauet og med luften.
5. Navngi kontaktkrefter og definer symboler.
   Kraft fra tauet på personen: T
   Luftmotstand: F_D
6. Identifiser langtrekkende krefter og definer symboler.
   Gravitasjonskraft: G
7. Tegn objektet med skalerte krefter.
8. Tegn inn koordinatsystemet.



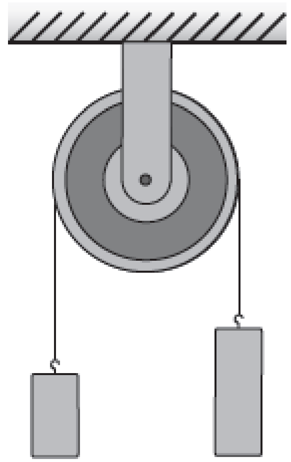


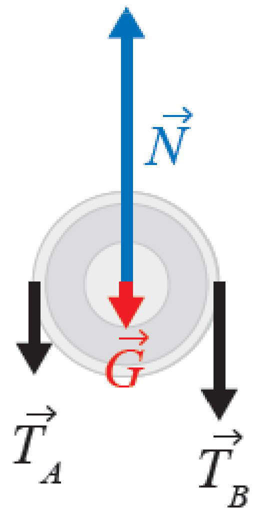
Eksempel: trinse

system: trinse
omgivelse: tau, akse, luft
(loddene og taket er ikke i kontakt med trinsen)

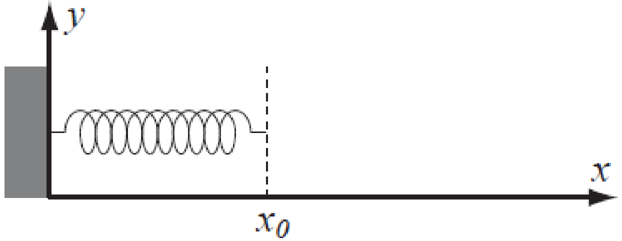
kontaktkrefter:
- normalkraft fra aksen på trinsen: N
- kraft fra tauet på trinsen venstre/høyre: T_A, T_B

langtrekkende krefter:
- gravitasjonskraft: G

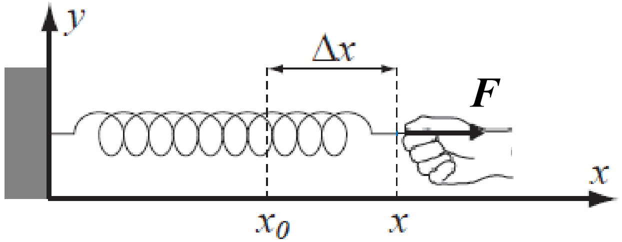




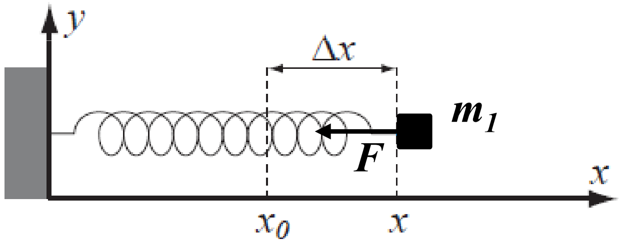
kraft ⇔ akselerasjon



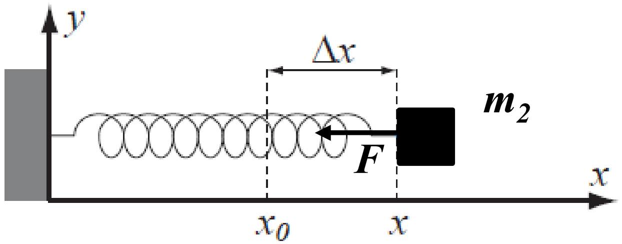
(Gedanken-) Experiment



Vi trekker på en fjær med kraft F
slik at lengden blir $x_0 + \Delta x$



Vi fester en masse m_1 og slipper.
Fjæren trekker på massen med kraft F
og vi måler akselerasjonen $a_{1.}$



Vi fester en masse m_2 og slipper.
Fjæren trekker på massen med kraft F
og vi måler akselerasjonen $a_{2.}$

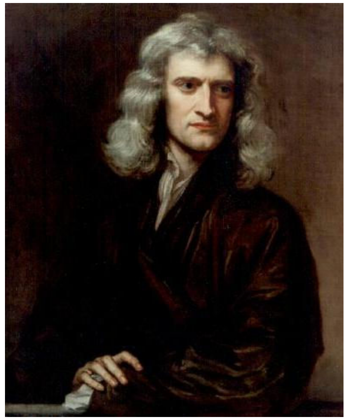
Vi finner: $F = m_1 a_1 = m_2 a_2$

Newtons andre lov: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

Vi kan ikke bevise loven.
Eksperimenter viser at loven er riktig.

"Endringen av bevegelsen er alltid proporsjonal med den motiverende kraft som blir påført, og blir gjort i den rettlinjede retning i hvilken denne kraft blir påført."

Philosophiæ Naturalis
Principia Mathematica,
1687



Isaac Newton
1643-1727

Newtons andre lov: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

- er gyldig i inertialsystemer.
  I et akselerert referansesystem må vi innføre fiktive krefter.

- gjelder punkt-partikkler.
  Vi kan bruke N2L for utstrakte objekter hvis vi bruker massesenteret.

- inertialmasse m er en egenskap av et legeme:
  motstanden mot akselerasjon (= treghet)
  enhet: kg

- gjelder summen av alle ytre krefter som påvirker objektet: netto kraft $\vec{F}_{\text{net}} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$
  Ytre krefter har årsak i omgivelsen.

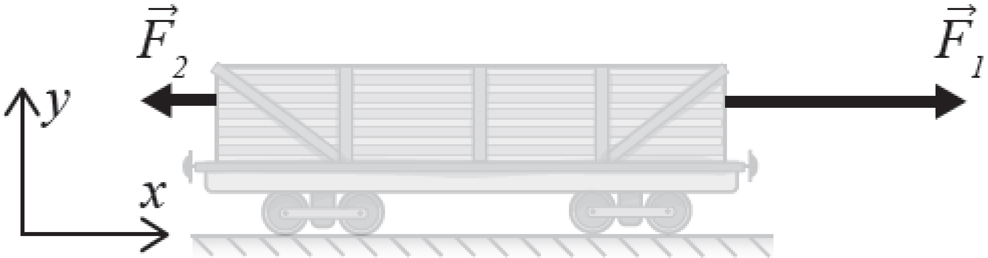
- er en vektor likning – gyldig for hver komponent: $\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

- kreftene er additiv: superposisjonsprinsippet

- krefter måles i enhet: 1 kg m/s^2 = 1 N = 1 Newton

Eksempel

To krefter virker på en vogn: F_1 trekker til høyre med 6000 N, F_2 trekker til venstre med 1000 N. Massen til vogn er 2500 kg. Du kan se bort fra andre krefter. Hva er akselerasjonen?



$$\vec{F}_1 = 6000\,\mathrm{N}\,\hat{i}$$

$$\vec{F}_2 = -1000\,\mathrm{N}\,\hat{i}$$

$\hat{i}$: enhetsvektor i *x* retning

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 6000\,\mathrm{N}\,\hat{i} - 1000\,\mathrm{N}\,\hat{i} = 5000\,\mathrm{N}\,\hat{i}$$

N2L: $\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \dfrac{\vec{F}_{\text{net}}}{m} = \dfrac{5000\,\mathrm{N}\,\hat{i}}{2500\,\mathrm{kg}} = 2\,\mathrm{m/s^2}\,\hat{i}$

Kraftmodeller

- vi har en oppskrift for å identifisere kreftene
  $\Rightarrow$ fri-legeme diagram
- vi bruker Newtons andre lov for å finne akselerasjonen fra summen av ytre krefter
- vi kan løse bevegelsesligningene (analytisk eller numerisk)

vi vet ikke hvordan vi kan beskrive / kvantifisere de forskjellige krefter – vi trenger kraftmodeller

Modeller:

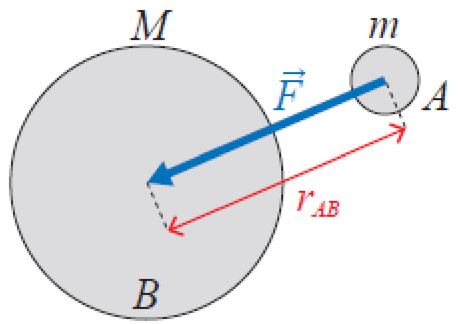
Finn kreftene som påvirker objektet.

Beskriv kreftene med en modell.

Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen.

Gravitasjon

Isaac Newton har også oppdraget gravitasjonsloven (fra empirisk observasjon)



$$\vec{F}_{\text{fra B på A}} = \gamma \frac{mM}{r_{\text{AB}}^3} \vec{r}_{\text{AB}}$$

γ: gravitasjonskonstant
m: gravitasjonsmasse til A
M: gravitasjonsmasse til B
$\vec{r}_{\text{AB}}$: vektor fra senteret av A til senteret av B

inertialmasse: treghet – et legemes motstand mot å forandre hastighet

gravitasjonsmasse: definert av gravitasjonsloven

Eksperimenter finner ingen forskjell mellom inertialmasse og gravitasjonsmasse.

på jorden

$$\vec{F}_{\text{fra B på A}} = \gamma \frac{mM}{r_{\text{AB}}^3} \vec{r}_{\text{AB}}$$

$$\gamma = 6.67384 \cdot 10^{-11} \ \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

$$M = 3.9736 \cdot 10^{24} \ \text{kg}$$

$r_{\text{AB}} = 6.378 \cdot 10^6 \ \text{m}$ (posisjonsavhengig)

Gravitasjonskraft er rettet mot jordens senteret.

$$F = \gamma \frac{mM}{r_{\text{AB}}^2} = mg \qquad g \approx 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

hvis ingen andre krefter enn gravitasjon virker:

$F_{\text{net}} = m_g g = m_i a$ m_i: inertialmasse, m_g: gravitasjonsmasse

$a = \frac{m_g}{m_i} g$ $m_i = m_g \Rightarrow$ alle legemer faller med samme akselerasjon

Eksempel: legeme som faller

Du slipper en ball fra en høyde på 1m over bakken.
Du kan se bort fra luftmotstanden.
Hvor lang tid tar det før den treffer bakken?

meget enkelt eksempel for å demonstrere den generelle løsningsoppskriften.

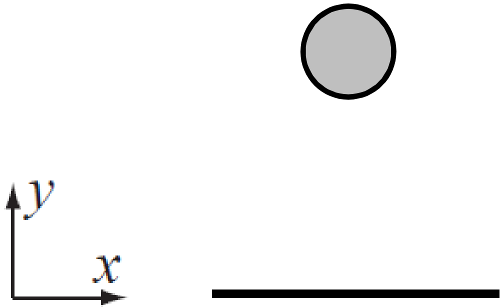
Identifiser:	**Modeller:**	**Løs:**	**Analyser:**
Hvilket objekt beveger seg? Hvordan måler vi? Definer et koordinatsystem. Finn initialbetingelsene.	Finn kreftene som påvirker objektet. Beskriv kreftene med en modell. Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen.	Løs bevegelsesligningen . $\frac{d^2x}{dt^2} = a\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$ med initialbetingelser (analytisk eller numerisk). Finn hastighet og posisjon.	Er resultatene for *x*(*t*) og *v*(*t*) fornuftig? . Bruk resultatene for a svare på spørsmålet. Interpreter resultatene.

Identifiser:

Hvilket objekt beveger seg?

Hvordan måler vi? Definer et koordinatsystem.

Finn initialbetingelsene.



Ballen beveger seg.

Vi måler posisjon med $y(t)$ oppover med nullpunkt på bakken.

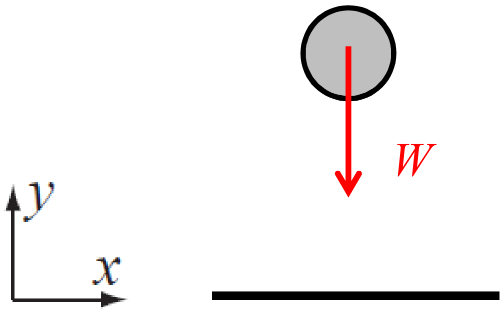
Ved $t_0 = 0$ er $x_0 = 1$ m og $v_0 = 0$ m/s.

Modeller:

Finn kreftene som påvirker objektet.

Beskriv kreftene med en modell.

Bruk Newtons andre lov for å finne akselerasjonen.



Vi ser bort fra luftmotstand.
Det er ingen kontaktkrefter som virker.
Langtrekkende kraft:

- gravitasjon: $\vec{W} = -W\,\hat{j}$

Kraftmodell: $W = mg$

N2L: $\sum \vec{F} = \vec{W} = -mg\,\hat{j} = m\vec{a}$

$a(t) = -g$

Løs:

Løs bevegelsesligningen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

med initialbetingelser (analytisk eller numerisk).

Finn hastighet og posisjon.

Vi løser analytisk:

$$a(t) = -g$$
$$v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$$
$$y_0 = 1.0\,\mathrm{m}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -g$$

$$v(t) - v_0 = \int_0^t (-g)dt = -gt$$

$$v(t) = -gt$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -gt$$

$$y(t) - y_0 = \int_0^t (-gt)dt = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Analyser:

Er resultatene for
x(*t*) og *v*(*t*) fornuftig?
.

Bruk resultatene for
a svare på spørsmålet.

Interpreter resultatene.

$$v(t) = -gt$$

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

Hastighet er rettet nedover.
For t = 0 finner vi initialbetingelser.

Hvor lang tid tar det før den treffer bakken?

$$y(t_1) = y_0 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0\,\mathrm{m}$$

$$t_1 = \pm\sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \pm\sqrt{\frac{2\,\mathrm{m}}{9.81\,\mathrm{m/s^2}}} = \pm 0.45\,\mathrm{s}$$

Bare den positive verdien er meningsfylt.

Ballen treffer bakken etter 0.45 s.

Eksempel: heis

En heis med masse m_H = 2400 kg beveger seg opp med en maksimal akselerasjon a_{max} = 2.0 m/s^2. Den maksimale nyttelasten er m_L = 1600 kg. Hva er den maksimale kraften som virker på kabelen?

Det er heisen som beveger seg.
Vi måler posisjonen i x retning oppover.

Heisen er i kontakt med kabelen og med luften rund seg.
Nyttelast er innenfor systemet og forårsaker ingen ytre krefter.

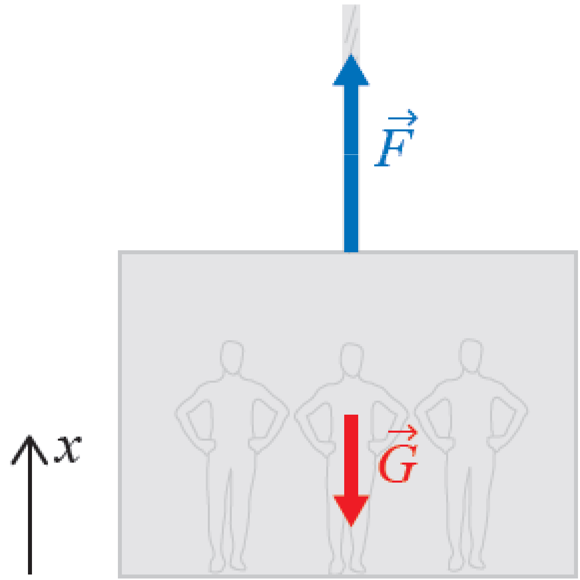
Kontaktkrefter:

- Kraft fra kabelen på heisen: F

Vi ser bort fra luftmotstand.

Langtrekkende krefter:

- Gravitasjon: G

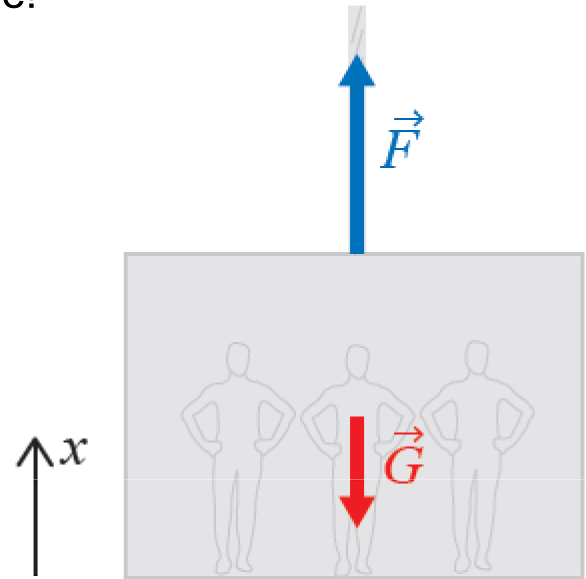


Kraftmodeller:

Kraft *F* fra kabelen på heisen er ukjent – den skal vi beregne!

Vi vet at den virker oppover: $\vec{F} = F\,\hat{i}$

Gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{i}$



N2L: $\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F} + \vec{G} = F\,\hat{i} - mg\,\hat{i} = ma\,\hat{i}$

$$F = m(g+a)$$

Kraften *F* avhenger akselerasjonen av heisen.
Den maksimale kraften oppstår hvis $a = a_{\text{max}}$
og med den maksimale nyttelasten ($m = m_H + m_L$).

$$F_{\text{max}} = m_{\text{max}}(g + a_{\text{max}}) = (m_H + m_L)(g + a_{\text{max}})$$

$$F_{\text{max}} = (2400\text{ kg} + 1600\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2 + 2\text{ m/s}^2) = 47.24\text{ kN}$$

Kraftmodeller: viskøs kraft

viktig for realistisk problemstillinger

mange av de legemene vi studerer er omgitt av væsker:

- en ball i luften
- en partikkel i vann
- ...

Hvis jeg trekker en ball gjennom luften,
må luften flytte seg og strømme rundt ballen.

Den strømmen gir opphav til krefter på ballen som vi kaller luftmotstand.

Det er ikke det samme som friksjon – vi kommer tilbake til det.

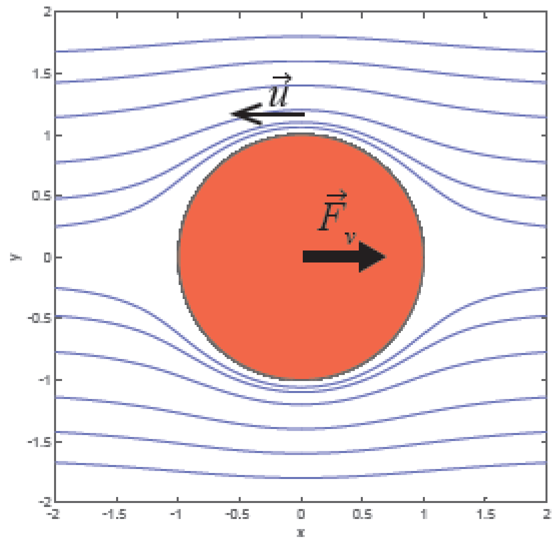
Det er ingen fundamental naturlov som beskriver viskøse krefter,
men vi kan finne empiriske modeller fra eksperimenter.

Slike modeller er ikke eksakt, men tilnærminger.

Generell er viskøse krefter hastighetsavhengig.
(Det gjenkjenner vi fra vår erfaring, f.eks. når vi sykler.)

viskøs kraft for små hastigheter

Hvis hastighet er små, så flyter væsken jevnt rundt objektet.



kraften på et objekt som beveger seg med små hastighet relativ til en væske:

$$F_D = -k_v v$$

Kraften virker mot bevegelsesretningen.

$$k_v = 6\pi\eta R$$

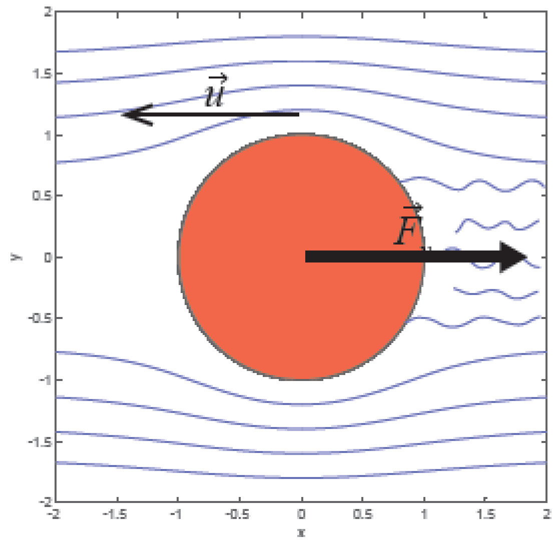
R: radius
η: viskositet av væsken

luft: $\eta = 1.82 \cdot 10^{-5} \dfrac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2}$

vann: $\eta = 1.0 \cdot 10^{-3} \dfrac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2}$

viskøs kraft for større hastigheter

Hvis hastighet er større, så flyter væsken ikke jevnt rundt objektet, men blir turbulent og forårsaker undertrykk bak objektet.



kraften på et objekt som beveger seg med stor hastighet relativ til en væske:

$$F_D = -Dv^2$$

Kraften virker mot bevegelsesretningen.

fra eksperimenter: $D \approx 12.0\,\rho\,R^2$

ρ: tetthet av væsken
R: radius

Du behøver ikke huske uttrykket for k_v og D, men du bør huske

$F_D = -k_v v$ for små hastighet

$F_D = -Dv^2$ for stor hastighet